ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ЗАДАЧ ФОКУСИРОВКИ ПУЧКОВ ИОНОВ В ЛИНЕЙНЫХ УСКОРИТЕЛЯХ

Федор Гаращенко, Игорь Харченко

Аннотация: *Предложен конструктивный метод параметрической оптимизации для проектирования систем ускорения и фокусировки ионов в линейных резонансных ускорителях. На примере математической модели процесса ускорения и фокусировки пучка ионов решена актуальная задача увеличения интенсивности пучка заряженных частиц для медицинского ускорителя заряженных частиц на 3 Мэв.*

Ключевые слова: *системы ускорения и фокусировки, структурно параметрическая оптимизация, динамические системы, линейный резонансный ускоритель.*

ACM Classification Keywords*: G.1.6 – Optimization – Nonlinear programming*

Введение

Системы ускорения и фокусировки широко используются в научных исследованиях и различных отраслях народного хозяйства. В последнее время актуальным является проектирование линейных ускорителей для медицинских целей. Такие ускорители имеют ряд существенных преимуществ особенно для локального облучения пораженных участков. Методы проектирования таких систем базируются на основе физических принципов ускорения и фокусировки [Башняков, 2000]. На данный момент актуальными являются задачи проектирования ускоряюще-фокусирующих систем с оптимальными характеристиками пучка ионов на выходе ускорителя, которые позволяли бы при одном и том же уровне расходов получить пучки с большей энергией и с большей плотностью заряда [Бублик, 1985]. Параметрическое представление полей в таких задачах дает возможность определить оптимальные режимы для структур, которые подлежат практической реализации [Ладиков-Роев, 1996] .

Постановка задач

Анализ различных характеристик ускоряюще-фокусирующих систем показывает, что их потенциальные возможности для получения оптимальных выходных характеристик пучка ионов используются не полностью. Для получения таких характеристик, например, в ускорителях с дрейфовыми трубками важно определить положение трубок (их длину, конфигурацию, напряжение поля в ускоряющих зазорах и т.п.), при которых достигается максимальная интенсивность пучка с заданными разбросами параметров его конечного состояния [Garashchenko, 2008].

Задача оптимизации пучка ионов в линейном резонансном ускорителе является очень сложной математической проблемой. Поэтому данную задачу при ее исследовании можно разбить на несколько подзадач:

– разработка методов расчета оптимальных ускоряющих структур для продольного движения;

– расчет динамики пучка при радиальной фокусировке ионов;

– исследование допусков на параметры системы ускорения и фокусировки;

– учет собственного электростатического поля пучка;

– разработка быстродействующих численных алгоритмов расчета внешних электромагнитных полей и т.д.

Для расчета и проектирования линейного ускорителя при учете параметров продольного движения, при заданном начальном разбросе по энергии и фазе, одна из основных задач заключается в определении структуры ускорителя таким образом, чтобы на выходе энергетический и фазовый разбросы пучка были минимальны.

Уравнение движения частицы будем рассматривать без учета сил кулоновского взаимодействия [Бублик, 1985] :

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = \alpha(\xi)\cos\varphi ,$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} ,$$

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} = \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1}\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{d\xi} + g(\xi)\right)x - \alpha(\xi)\frac{dx}{d\xi}\right]\cos\varphi ,$$

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} = \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1}\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{d\xi} - g(\xi)\right)y - \alpha(\xi)\frac{dy}{d\xi}\right]\cos\varphi .$$

Методика решения задачи

Будем считать, что известны точки переключения ξ_i и амплитуда напряженности поля, которая задается кусочно-постоянной функцией $\alpha(\xi)$.

Рассмотрим задачу выбора такого фокусирующего поля, чтобы для начальных условий $\gamma_0, \varphi_0, x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$ выполнялся следующий критерий качества :

$$\min_{g(\xi)}\left(x^2(T) + y^2(T)\right) .$$

Также будем полагать, что функция $g(\xi)$ принадлежит классу кусочно-постоянных функций. Тогда нормализованные уравнения движения частицы в ускоряющем зазоре линейного резонансного ускорителя имеют вид :

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = \alpha(\xi)\cos\varphi ,$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} ,$$

$$\frac{dx_1}{d\xi} = x_2 ,$$

$$\frac{dx_2}{d\xi} = \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1}\left[g(\xi)x_1 - \alpha(\xi)\frac{dx_1}{d\xi}\right]\cos\varphi ,$$

$$\frac{dy_1}{d\xi} = y_2 ,$$

$$\frac{dy_2}{d\xi} = \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1}\left[-g(\xi)y_1 - \alpha(\xi)\frac{dy_1}{d\xi}\right]\cos\varphi ,$$

а уравнение движения частицы в дрейфовой трубке представлены следующими соотношениями :

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = \alpha(\xi)\cos\varphi ,$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} ,$$

$$\frac{dx_1}{d\xi} = x_2 ,$$

$$\frac{dx_2}{d\xi} = 0 ,$$

$$\frac{dy_1}{d\xi} = y_2 ,$$

$$\frac{dy_2}{d\xi} = 0 .$$

При этом скачки соответствующих фазовых координат в точках переключения системы ускорения имеют вид :

$$x_2(\xi_i + 0) = x_2(\xi_i) - \frac{1}{2}\frac{\gamma(\xi_i)}{\gamma^2(\xi_i) - 1}\cos\varphi(\xi_i)x_1(\xi_i)\left[\alpha(\xi_i + 0) - \alpha(\xi_i)\right],$$

$$y_2(\xi_i + 0) = y_2(\xi_i) - \frac{1}{2}\frac{\gamma(\xi_i)}{\gamma^2(\xi_i) - 1}\cos\varphi(\xi_i)y_1(\xi_i)\left[\alpha(\xi_i + 0) - \alpha(\xi_i)\right].$$

С целью оптимизации критерия качества поставленной задачи запишем функцию Гамильтона [Понтрягин, 1976]

$$H(\psi, x, y, \alpha, g, \gamma, \varphi, \xi) = \psi_1(\xi)\alpha(\xi)\cos(\varphi) + \psi_2(\xi)\frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} + \psi_3(\xi)x_2 +$$

$$+\psi_4(\xi)\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1}\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{d\xi} + g(\xi)\right)x_1 - \alpha(\xi)x_2\right]\cos\varphi + \psi_5(\xi)y_2 +$$

$$+\psi_6(\xi)\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1}\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{d\xi} - g(\xi)\right)y_1 - \alpha(\xi)y_2\right]\cos\varphi .$$

Тогда соответствующая система для расчета сопряженных переменных [Бублик, 1975] $\psi(\xi) = \left(\psi_1(\xi), \psi_2(\xi), \psi_3(\xi), \psi_4(\xi), \psi_5(\xi), \psi_6(\xi)\right)^T$, которые будут далее использованы при решении оптимизационной задачи в ускоряющем зазоре, имеет следующий вид :

$$\frac{d\psi}{d\xi} = -grad_z H(\psi, x, y, \alpha, g, \gamma, \varphi, \xi) , \qquad z = \left(\gamma, \varphi, x_1, x_2, y_1, y_2\right)^T ,$$

$$\frac{d\psi_1}{d\xi}=\frac{2\pi}{\left(\gamma^2-1\right)^{3/2}}\psi_2(\xi)+\psi_2(\xi)\frac{\gamma^2+1}{\left(\gamma^2-1\right)^2}\left[g(\xi)x_1-\alpha(\xi)x_2\right]\cos\varphi+\psi_6(\xi)\frac{\gamma^2+1}{\left(\gamma^2-1\right)^2}\left[-g(\xi)y_1-\alpha(\xi)y_2\right]\cos\varphi,$$

$$\frac{d\psi_2}{d\xi}=\psi_1(\xi)\alpha(\xi)\sin\varphi+\psi_4(\xi)\frac{\gamma}{\gamma^2-1}\left[g(\xi)x_1-\alpha(\xi)x_2\right]\sin\varphi+\psi_6(\xi)\frac{\gamma}{\gamma^2-1}\left[-g(\xi)y_1-\alpha(\xi)y_2\right]\sin\varphi,$$

$$\frac{d\psi_3}{d\xi}=-\psi_4(\xi)\frac{\gamma}{\gamma^2-1}g(\xi)\cos\varphi,$$

$$\frac{d\psi_4}{d\xi}=-\psi_3(\xi)+\psi_4(\xi)\frac{\gamma}{\gamma^2-1}\alpha(\xi)\cos\varphi,$$

$$\frac{d\psi_5}{d\xi}=\psi_6(\xi)\frac{\gamma}{\gamma^2-1}g(\xi)\cos\varphi,$$

$$\frac{d\psi_6}{d\xi}=-\psi_5(\xi)+\psi_6(\xi)\frac{\gamma}{\gamma^2-1}\alpha(\xi)\cos\varphi$$

с начальными условиями

$$\psi(T)=-\left(0,0,2x_1(T),0,2y_1(T),0\right)^T.$$

Система для расчета сопряженных переменных в трубке дрейфа имеет вид :

$$\frac{d\psi_1}{d\xi}=\frac{2\pi}{\left(\gamma^2-1\right)^{3/2}}\psi_2(\xi),$$

$$\frac{d\psi_2}{d\xi}=0,$$

$$\frac{d\psi_3}{d\xi}=0,$$

$$\frac{d\psi_4}{d\xi}=\psi_3(\xi),$$

$$\frac{d\psi_5}{d\xi}=0,$$

$$\frac{d\psi_6}{d\xi}=\psi_5(\xi)$$

с начальными условиями

$$\psi(T)=-\left(0,0,2x_1(T),0,2y_1(T),0\right)^T.$$

Скачки в точках переключения для сопряженной системы переменных имеют вид :

$$\psi_1(\xi_i+0)=\psi_1(\xi_i)-\frac{1}{2}\psi_4(\xi_i)\frac{\gamma^2(\xi_i)+1}{\left(\gamma^2(\xi_i)-1\right)^2}\cos\varphi(\xi_i)x_1(\xi_i)\left[\alpha(\xi_i+0)-\alpha(\xi_i)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\psi_6(\xi_i)\frac{\gamma^2(\xi_i)+1}{\left(\gamma^2(\xi_i)-1\right)^{3/2}}\cos\varphi(\xi_i)y_1(\xi_i)\left[\alpha(\xi_i+0)-\alpha(\xi_i)\right],$$

$$\psi_2(\xi_i+0)=\psi_2(\xi_i)-\frac{1}{2}\psi_4(\xi_i)\frac{\gamma(\xi_i)}{\gamma^2(\xi_i)-1}\sin\varphi(\xi_i)x_1(\xi_i)\left[\alpha(\xi_i+0)-\alpha(\xi_i)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\psi_6(\xi_i)\frac{\gamma(\xi_i)}{\gamma^2(\xi_i)-1}\sin\varphi(\xi_i)y_1(\xi_i)\left[\alpha(\xi_i+0)-\alpha(\xi_i)\right],$$

$$\psi_3(\xi_i+0)=\psi_3(\xi_i)+\frac{1}{2}\psi_4(\xi_i)\frac{\gamma(\xi_i)}{\gamma^2(\xi_i)-1}\cos\varphi(\xi_i)\left[\alpha(\xi_i+0)-\alpha(\xi_i)\right],$$

$$\psi_5(\xi_i+0)=\psi_5(\xi_i)+\frac{1}{2}\psi_6(\xi_i)\frac{\gamma(\xi_i)}{\gamma^2(\xi_i)-1}\cos\varphi(\xi_i)\left[\alpha(\xi_i+0)-\alpha(\xi_i)\right].$$

Градиент от критерия качества по параметрам g_i для поставленной оптимизационной задачи записывается в следующем виде :

$$grad_{g_i} I=-\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} grad_{g_i} H(\psi,x,y,\alpha,g,\gamma,\varphi,\xi)d\xi ,$$

где

$$grad_{g_i} H(\psi,x,y,\alpha,g,\gamma,\varphi,\xi)=\psi_4(\xi)\frac{\gamma}{\gamma^2-1}x_1\cos\varphi-\psi_6(\xi)\frac{\gamma}{\gamma^2-1}y_1\cos\varphi .$$

Выводы

Алгоритмы управления с использованием градиентных методов в классе кусочно-непрерывных функций для многих прикладных задач использовать трудно в силу плохой сходимости итерационных процедур. Поэтому применяют методику параметризации управления и, таким образом, переходят к конечномерным оптимизационным задачам [Горбунов, 1979]. Решение таких задач в силу неявной зависимости решений от параметров также представляет достаточно сложную оптимизационную задачу, особенно в случае большого количества оптимизационных параметров. Поэтому для конкретных задач, изучая их природу, на первом этапе пытаются ввести минимальное количество оптимизационных параметров, возможно и формальных, которые бы приближенно определяли большее количество реальных параметров и с достаточной адекватностью описывали функционирование объекта. Далее находят оптимальный режим в пространстве меньшего количества параметров, который дает возможность определить приближение для большего количества оптимальных характеристик пучка в линейном резонансном ускорителе. Большое количество оптимальных параметров может стать основой для определения начального приближения функции управления, например, в классе кусочно-непрерывных функций и т.д. Такой подход является конструктивным и связанным с усложнением математической модели, как по управлению, так и по ее структуре. С другой стороны, использование метода параметрической оптимизации дает возможность определить режимы с оптимальной физической реализацией [Яковлев, 1996].

На основе указанной методики в данной работе разработан и протестирован алгоритм оптимального выбора фокусирующего поля для проектирования линейных резонансных ускорителей ионов для медицинских целей на 3 Мэв.

Литература

[Башняков, 2000] Башняков А.Н., Гаращенко Ф.Г., Пичкур В.В. Практическая устойчивость и структурная оптимизация динамических систем. – К.: Издательско-полиграфический центр "Киевский университет", 2000.

[Бублик, 1975] Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. – К.: Высшая школа, 1975.

[Бублик, 1985] Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно–параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К.: Наукова думка, 1985.

[Горбунов, 1979] Горбунов В.К. Метод параметризации задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – т. 19, №2. – С. 292-303.

[Ладиков-Роев, 1996] Ладиков-Роев Ю.П., Самойленко Ю.И. Структурная оптимизация регулирующих сред // Проблемы управления и информатики, – 1996, – №1-2, – С. 101-108.

[Понтрягин, 1976] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г, Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976.

[Яковлев, 1996] Яковлев О.С. Метод структурного синтеза нелинейных регуляторов // Проблемы управления и информатики, – 1996, – №1-2, – С. 211-223.

[Garashchenko, 2008] Garashchenko F, Kharchenko I. Applied aspects of mathematical modeling and optimization of dynamics of charged beams //Decision Making and Business Intelligence Strategies and Techniques/ International Books Series "INFORMATION SCIENCE & COMPUTING", Number 3, P. 23-29.

Информация об авторах

***Федор Гаращенко** – Профессор, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, заведующий кафедрой моделирования сложных систем, Киев, Украина, e-mail: garash@unicyb.kiev.ua*

***Игорь Харченко** – Доцент, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, кафедра моделирования сложных систем, Киев, Украина, e-mail: ihar@unicyb.kiev.ua*