ИЗСЛЕДВАНИЯ В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА ЧРЕЗ СИМУЛИРАНЕ С ДИНАМИЧЕН СОФТУЕР

ст.н.с. д-р Тони Чехларова

1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев" блок 8
Институт по математика и информатика при БАН
tchehlarova@mail.bg

Абстракт: *Представен е вариант за използване на динамичен софтуер в обучението по математика. Свързан е със симулиране за достигане до идея за решаване на задача. Насочен е към усвояване на елементи на изследователския процес.*

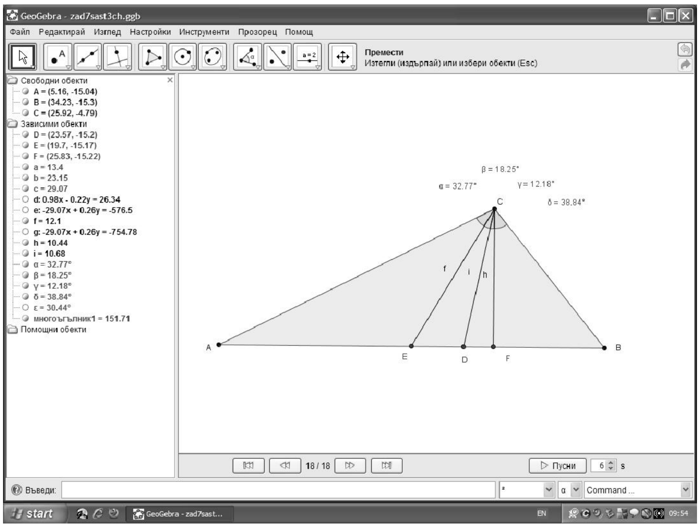
Ключови думи: динамичен софтуер, изследователски подход

Разработването и внедряването на иновативни дидактически концепции и педагогически стратегии, основаващи се на използване на технологиите, е условие за подобряване на учебния процес по математика. Очакванията са те да осигурят мост за преминаване на обучението от училище – извън него. Една от целите на редица европейски проекти е да се създадат учебни среди с динамична математика, които да играят ролята на своеобразен катализатор на иновативните концепции [3], [4], [7]. Една възможност за използване на динамичен софтуер е за достигане до идея за решение на задача чрез симулиране. Това е особено необходимо, когато няма изходно начало за решаване на задачата, както и когато е трудно използване на статична схема на обекта.

Да разгледаме как протича изследването с използване на динамичен софтуер при решаване на задачата: „Височината, ъглополовящата и медианата през един от върховете на триъгълник ABC разделят ъгъла на триъгълника на четири равни части. Намерете градусната мярка на най-малкия ъгъл на триъгълника."

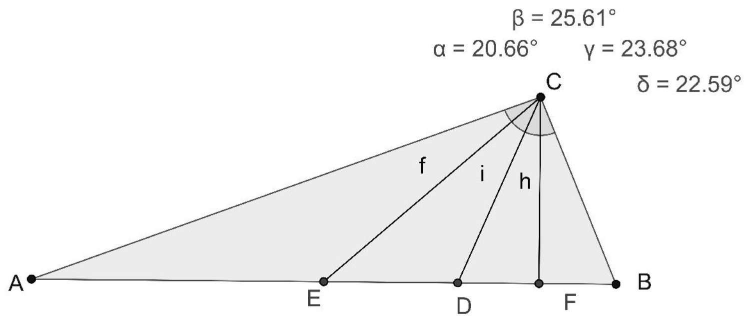
Обикновено при решаване на задачи като тази се скицира фигурата и се търсят връзки между ъгли, отсечки, триъгълници и др. Известно е, че когато направената скица не отговаря на условието, не дава възможност за намиране на такива връзки, дори може да доведе до някои заблуждения. Типичен пример за това е използване на остроъгълен триъгълник, когато всъщност триъгълникът е тъпоъгълен. И при тази задача не е лесно да се построи триъгълник, доближаващ се до искания. В такъв случай е подходящо използване на динамичен софтуер като GeoNext, GeoGebra, The Geometer's Sketchpad и др.

Понякога е лесно да се съобрази каква динамична конструкция е достатъчна, за да подпомогне решаването на задачата. Обикновено има няколко възможности за създаване на подходящ динамичен обект, в зависимост от избора на постоянните и променящите се елементи в него. В случая може да се построи триъгълник ABC и височината, ъглополовящата и медианата през един от върховете му, например връх C. За да можем да организираме експеримент, трябва да наблюдаваме стойностите на четирите получени ъгъла при върха C - $\angle ACE$, $\angle ECD$, $\angle DCF$, $\angle FCB$. На фиг.1 е показана реализация на конструкцията с GeoGebra [8].



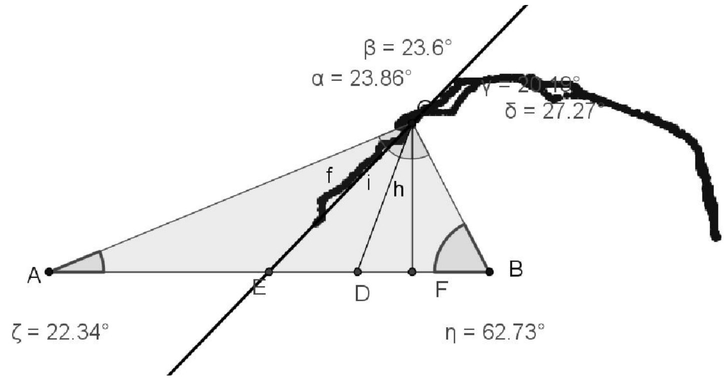
Фиг. 1

Движейки точка C в равнината, търсим триъгълник, за който е изпълнено условието за равенство на четирите посочени ъгла. На практика обаче се оказва трудно постигането на равенство едновременно на четирите ъгла (фиг.2). Учениците установяват, че е лесно да се получи равенство на два от ъглите, но са необходими допълнителни съображения, за да не е хаотично, трудно и бавно достигането до търсения триъгълник.



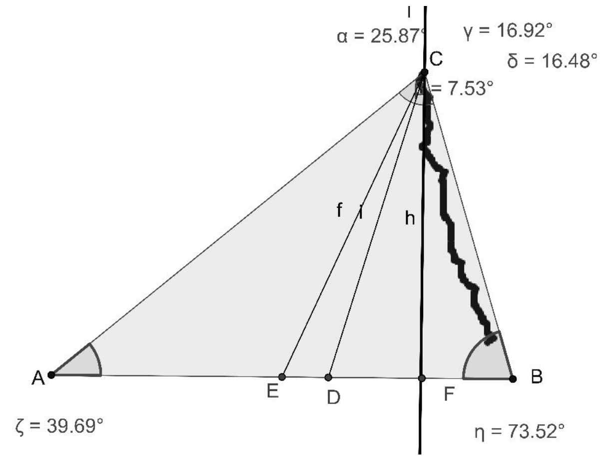
Фиг. 2

Удобно е да се поддържа равенство на два от ъглите и по-точно - при запазване на това равенство, да се търси равенство с трети от ъглите. За целта построяваме ъглополовяща на ъгъл $\angle ACD$ и движим точка C така, че CE да съвпада с тази ъглополовяща. (фиг. 3). Ако поставим точката C в режим следа, ще се изобрази (с някаква точност, според степента на доближаване на CE до ъглополовящата) геометричното място на точките C, за които $\angle ACE = \angle ECD$. При това движение на точката C наблюдаваме кога и някой от другите два ъгъла е равен на $\angle ACE$.



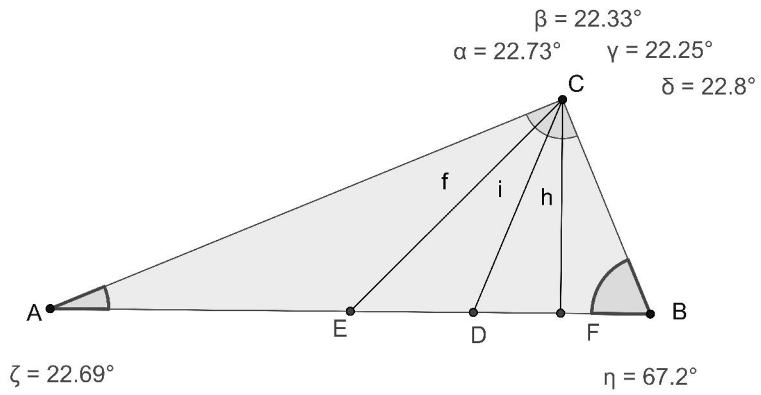
Фиг. 3

Аналогични ще са действията и при използване на ъглополовящата на $\angle DCB$ (Фиг. 4). Сега, за да се поддържа равенство на ъглите γ и δ, трябва да движим точка C по ъглополовящата на $\angle DCB$, до получаване на равенство с друг от двата ъгъла α и β.



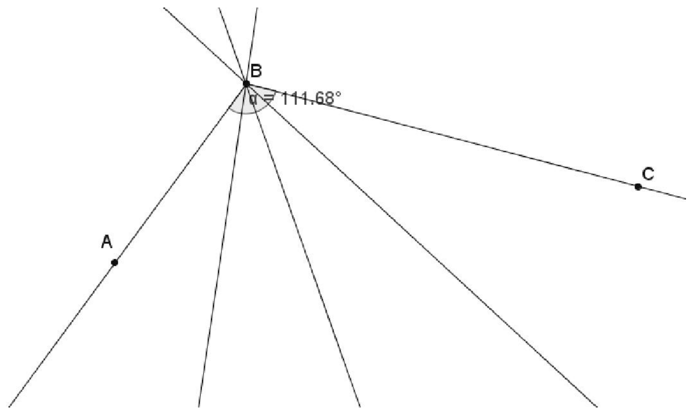
Фиг. 4

Достига се до правоъгълен триъгълник с остър ъгъл $22,5°$. Получават се редица зависимости, които осигуряват идея за решаване на задачата (фиг.5).



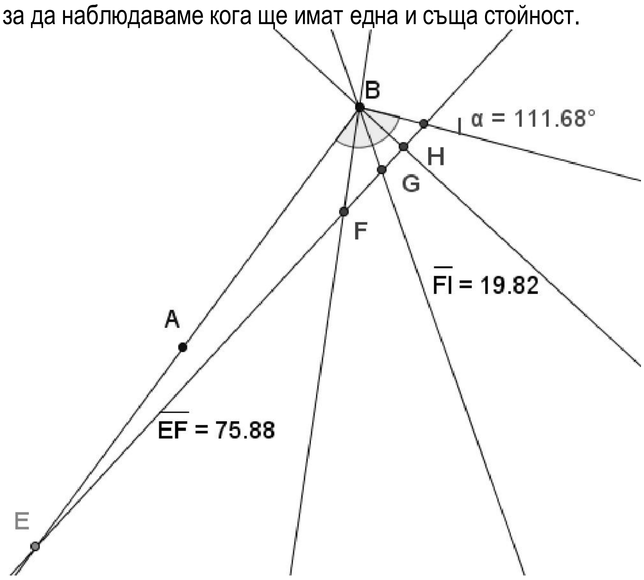
Фиг. 5

За симулиране на фигурата от задачата може да се тръгне и от равенството на четирите ъгъла. Построяваме $\angle ABC$, ъглополовящата му и ъглополовящите на новополучените два ъгъла (фиг. 6).



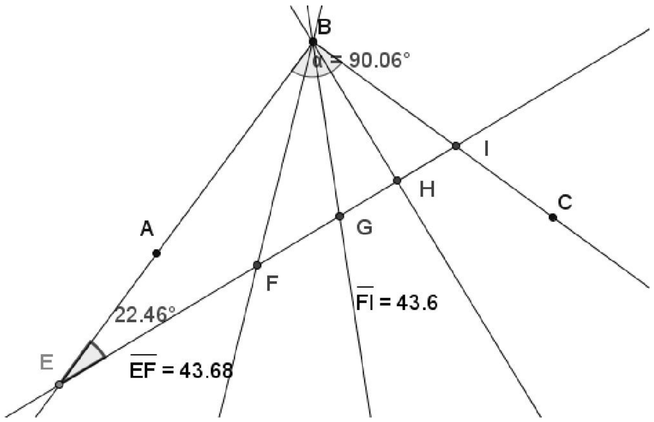
Фиг. 6

Построяваме права, перпендикулярна на една от последно построените две прави (Фиг.7). Пресечните точки на тази права с AB и AC ще са върхове на търсения триъгълник. При означенията на фиг. 7, динамичният триъгълник е EIB, BH е височина, BG е ъглополовяща. Остава да движим един от върховете на триъгълника така, че BF да бъде медиана. За целта извеждаме на екрана дължините на отсечките EF и FI, за да наблюдаваме кога ще имат една и съща стойност.



Фиг. 7

Разбира се, може да се построи средата на отсечката EI и се търси кога тя съвпада с точката F .

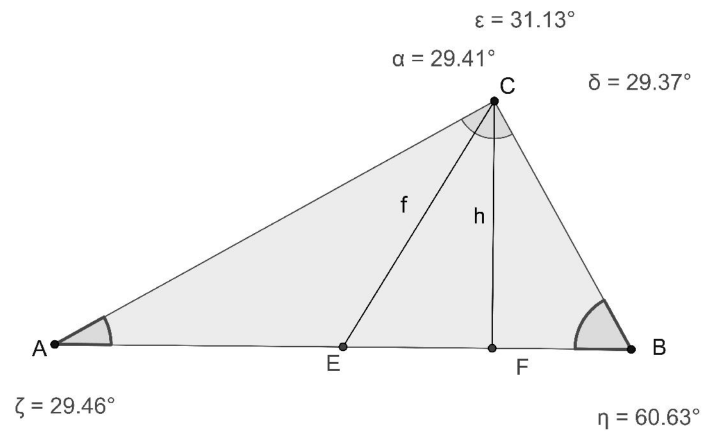


Фиг. 8

Естествено е при наличие на конструкция да продължат „игрите” с нея. Ето някои възможни въпроси и проверки.

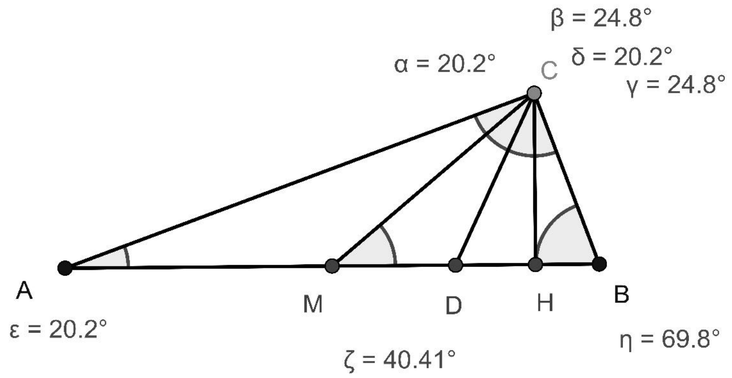
Дали е възможно медианата и височината да разделят ъгъла на три равни части? Можем да използваме създадената вече конструкция, като за удобство закриваме обектите, които не участват в новата задача (ъглополовящата) и извеждаме на екрана градусната мярка на $\angle ECF$ (фиг.9).

Експериментът показа, че натрупания опит от решената вече задача помага за бързо достигане до резултат. Нещо повече. Може да се съобрази, че т.к. точката E е среда на AB и е неподвижна, стремежът за съвпадане на височината CF с ъглополовящата на $\angle ECB$ ще ни доведе до симетралата на EB. Движейки точката C по симетралата на EB, ще достигнем до търсеното положение. Отново се получава правоъгълен триъгълник, този път с остри ъгли $30°$ и $60°$.



Фиг. 9

Дали има други особености в правоъгълния триъгълник, свързани с височина, медиана и ъглополовяща при правия ъгъл? Построяваме нова конструкция, като разглеждаме правоъгълен триъгълник с прав ъгъл при върха C. Наблюдението показва, че двойките ъгли, получени при разделяне на правия ъгъл на четири части от ъглополовяща, медиана и височина, са равни. Единият от ъглите на триъгълника е равен на едната двойка ъгли. До този факт ще се достига и през следващите години, например чрез използване на окръжност.



Фиг. 10

Всъщност, използване на построените динамични конструкции позволяват ефективно да се реализира последният етап на решаване на задача – поглед назад [5]. Реално е задържането на вниманието на учениците върху решената вече задача с оглед разкриване на нови връзки между елементите, а оттам и за съставяне на нови задачи. Не е случайно, че използването на софтуер е в основата на формулирането и доказването на редица нови математически твърдения [1], [2], [6]. Използването му в час позволява да се пренесе процесът на откриване от науката – в обучението, да се доближат учениците до същността на математиката като средство за описване и изследване.

[1] Гроздев, С., В. Ненков, Една крива от втора степен за две точки на Чева, Математика и математическо образование, Сборник доклади на 38 пролетна конференция на СМБ, Боровец, 1 – 5 април 2009.

[2] Гроздев, С., В. Ненков, Равнолицеви триъгълници, породени от конични сечения, Математика плюс, 4, 2007, 73 – 79.

[3] Гроздев, С., Т. Чехларова. Българо-руският проект по методика и информационни технологии в образованието. В: Интердисциплинарен форум “България и Русия – посоки на взаимност”, Русе, 14 – 17 декември 2008. с. 55- 64 ISBN 978-954-712-451-6

[4] Кендеров, П., Иновации в математическото образование: европейските проекти *InnoMathEd* и *Fibonacci.* Математика и математическо образование, Сборник доклади на 39 пролетна конференция на СМБ, 2010.

[5] Пойа, Д. Как да се решава задача. С., Народна просвета, 1972.

[6] Rahnev A., A. Golev, Some New Lower Bounds for the Number of Near-rings on Finite Cyclic Groups, Int. Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 59, No.1, 2010, ISSN 1311-8080, pp. 59-75.

[7] Bianco, T. *Quality Standards for Learning Environments – an Overview* http://www.imb-uni-augsburg.de/files/Arbeitsbericht_23.pdf

[8] GeoGebra, http://www.geogebra.org/cms/