МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2010
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2010
Proceedings of the Thirty Ninth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Albena, April 6–10, 2010

ЕДНО ОБОБЩЕНИЕ НА НАПОЛЕОНОВИТЕ ТРИЪГЪЛНИЦИ

Димитър Белев, Василка Игнатова-Белева

Представяме едно обобщение на Наполеоновите триъгълници и изследваме някои техни свойства.

1. Наполеонови триъгълници. Външно за ΔABC, върху страните му са построени равностранни триъгълници. Ако N_1, N_2 и N_3 са центровете на тези равностранни триъгълници, то $\Delta N_1N_2N_3$ наричаме първи (външен) Наполеонов триъгълник. Аналогично $\Delta P_1P_2P_3$, където P_1, P_2 и P_3 са центровете на равностранните триъгълници, построени вътрешно за ΔABC, наричаме втори (вътрешен) Наполеонов триъгълник (фиг. 1).

Теорема 1. *Нека $N_1N_2N_3$ и $P_1P_2P_3$ са Наполеоновите триъгълници на ΔABC. Тогава**:

а) *Наполеоновите триъгълници са равнострани.*

б) *Ако ориентираните лица на $\Delta N_1N_2N_3$ и $\Delta P_1P_2P_3$ са S_N и S_P, то $S_N + S_P = S_{ABC}$.*

в) *Триъгълникът ABC и Наполеоновите триъгълници имат общ медицентър – G.*

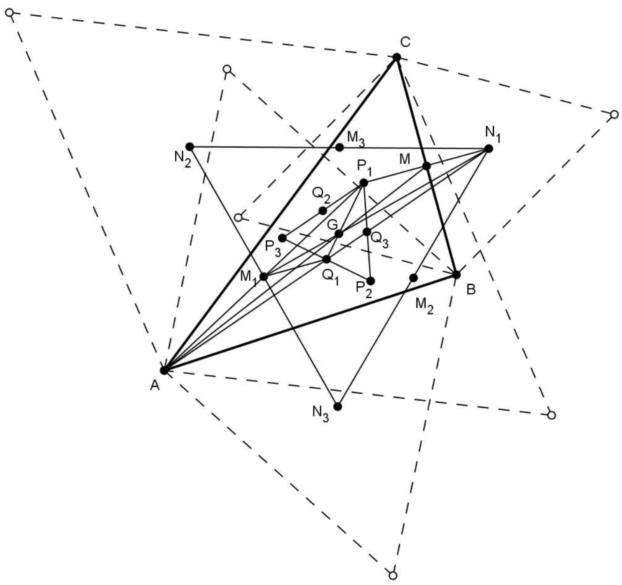
2. Обобщение на Наполеоновите триъгълници. Първо, да покажем едно свойство на класическите Наполеонови триъгълници.

Твърдение 1. *Нека $N_1N_2N_3$ и $P_1P_2P_3$ са Наполеоновите триъгълници на ΔABC и точките M_1, M_2, M_3 и Q_1, Q_2, Q_3 са средите на страните им (фиг. 1). Тогава: Q_1 и M_1 са среди на AN_1 и AP_1; Q_2 и M_2 са среди на BN_2 и BP_2; Q_3 и M_3 са среди на CN_3 и CP_3.*

Доказателство. Нека точка $X = N_1Q_1 \cap P_1M_1$. Тъй като G е медицентър на $\Delta N_1N_2N_3$ и $\Delta P_1P_2P_3$, то $\dfrac{P_1G}{GQ_1} = \dfrac{N_1G}{GM_1} = \dfrac{2}{1}$. Следователно G е медицентър на ΔN_1P_1X (Q_1 и M_1 са среди на XN_1 и XP_1) и тогава $\dfrac{XG}{GM} = \dfrac{AG}{GM} = \dfrac{2}{1}$, т.е. $A \equiv X$.

Построение. Нека положително ориентираният $\Delta N_1N_2N_3$ и отрицателно ориентираният $\Delta P_1P_2P_3$ имат общ медицентър G (фиг. 2). Точките M_1, M_2, M_3 и Q_1, Q_2, Q_3 са среди на страните им. Построяваме точките: $A_1 = N_1Q_1 \cap P_1M_1$, $B_1 = N_2Q_2 \cap P_2M_2$, $C_1 = N_3Q_3 \cap P_3M_3$, $A_2 = N_2Q_3 \cap P_3M_2$, $B_2 = N_3Q_1 \cap P_1M_3$,

*Доказателство може да бъде намерено в [1].



Фиг. 1

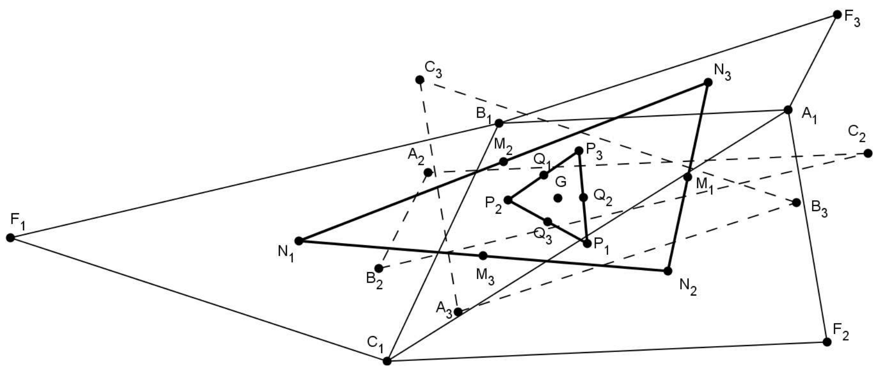
$C_2 = N_1Q_2 \cap P_2M_1$, $A_3 = N_3Q_2 \cap P_2M_3$, $B_3 = N_1Q_3 \cap P_3M_1$, $C_3 = N_2Q_1 \cap P_1M_2$. Построяваме още точки F_1, F_2 и F_3 така, че N_1, N_2 и N_3 да са медицентрове съответно на триъгълници $B_1C_1F_1$, $A_1C_1F_2$ и $A_1B_1F_3$.

Твърдение 2. *Ако при направените построения (фиг. 2) с S_N, S_P, S_1, S_2 и S_3 означим ориентираните лица сътоветно на $\Delta N_1N_2N_3$, $\Delta P_1P_2P_3$, $\Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_2B_2C_2$ и $\Delta A_3B_3C_3$ то:*

а) *Тригъгълници $N_1N_2N_3$, $P_1P_2P_3$, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ имат общ медицентър G.*

б) $3.(S_N + S_P) = S_1 + S_2 + S_3$.

в) *Сумата от периметрите на тригъгълниците $B_1C_1F_1$, $A_1C_1F_2$ и $A_1B_1F_3$ е*



Фиг. 2

равна на сумата от периметрите на триъгълниците $\Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_2B_2C_2$ *и* $\Delta A_3B_3C_3$.

Доказателство. а) Тъй като Q_1 е среда на P_2P_3 и A_1N_1 (доказателството е като на Твърдение 1), то $\overrightarrow{GQ_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GP_2} + \overrightarrow{GP_3}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GN_1} + \overrightarrow{GA_1})$, от където

$$\begin{gathered}\overrightarrow{GA_1} = \overrightarrow{GP_2} + \overrightarrow{GP_3} - \overrightarrow{GN_1},\ \overrightarrow{GB_1} = \overrightarrow{GP_1} + \overrightarrow{GP_3} - \overrightarrow{GN_2},\\ \overrightarrow{GC_1} = \overrightarrow{GP_1} + \overrightarrow{GP_2} - \overrightarrow{GN_3} \quad \text{(аналогично).}\end{gathered} \tag{1}$$

Като съберем равенства (1) и отчетем, че G е медицентър на $\Delta N_1N_2N_3$ и $\Delta P_1P_2P_3$, то $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1} = 2(\overrightarrow{GP_1} + \overrightarrow{GP_2} + \overrightarrow{GP_3}) - (\overrightarrow{GN_1} + \overrightarrow{GN_2} + \overrightarrow{GN_3}) = 0$, от където следва, че G е медицентър и на $\Delta A_1B_1C_1$ (аналогично и на $\Delta A_2B_2C_2$ и $\Delta A_3B_3C_3$).

б) Нека G е център на координатна система, в която точките N_1, N_2, N_3, P_1, P_2 и P_3 имат координати $N_1(x_1^N, y_1^N)$, $N_2(x_2^N, y_2^N)$, $N_3(x_3^N, y_3^N)$, $P_1(x_1^P, y_1^P)$, $P_2(x_2^P, y_2^P)$ и $P_3(x_3^P, y_3^P)$. Тогава от равенства (1) получаваме координатите на точките:

$$\begin{gathered}A_1(x_2^P + x_3^P - x_1^N, y_2^P + y_3^P - y_1^N),\\ B_1(x_1^P + x_3^P - x_2^N, y_1^P + y_3^P - y_2^N),\\ C_1(x_1^P + x_2^P - x_3^N, y_1^P + y_2^P - y_3^N),\\ A_2(x_1^P + x_2^P - x_2^N, y_1^P + y_2^P - y_2^N),\quad A_3(x_1^P + x_3^P - x_3^N, y_1^P + y_3^P - y_3^N),\\ B_2(x_2^P + x_3^P - x_3^N, y_2^P + y_3^P - y_3^N),\ B_3(x_1^P + x_2^P - x_1^N, y_1^P + y_2^P - y_1^N),\\ C_2(x_1^P + x_3^P - x_1^N, y_1^P + y_3^P - y_1^N),\quad C_3(x_2^P + x_3^P - x_2^N, y_2^P + y_3^P - y_2^N)\end{gathered} \tag{2}$$

Пресмятаме

$$3.(S_N + S_P) - (S_1 + S_2 + S_3) =$$

$$= 3.\left(\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1^N & y_1^N & 1\\ x_2^N & y_2^N & 1\\ x_3^N & y_3^N & 1\end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1^P & y_1^P & 1\\ x_2^P & y_2^P & 1\\ x_3^P & y_3^P & 1\end{vmatrix}\right) - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2^P + x_3^P - x_1^N & y_2^P + y_3^P - y_1^N & 1\\ x_1^P + x_3^P - x_2^N & y_1^P + y_3^P - y_2^N & 1\\ x_1^P + x_2^P - x_3^N & y_1^P + y_2^P - y_3^N & 1\end{vmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1^P + x_2^P - x_2^N & y_1^P + y_2^P - y_2^N & 1\\ x_2^P + x_3^P - x_3^N & y_2^P + y_3^P - y_3^N & 1\\ x_1^P + x_3^P - x_1^N & y_1^P + y_3^P - y_1^N & 1\end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1^P + x_3^P - x_3^N & y_1^P + y_3^P - y_3^N & 1\\ x_1^P + x_2^P - x_1^N & y_1^P + y_2^P - y_1^N & 1\\ x_2^P + x_3^P - x_2^N & y_2^P + y_3^P - y_2^N & 1\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}\{3[x_1^N(y_2^N - y_3^N) + x_2^N(y_3^N - y_1^N) + x_3^N(y_1^N - y_2^N)]\\ &+3[x_1^P(y_2^P - y_3^P) + x_2^P(y_3^P - y_1^P) + x_3^P(y_1^P - y_2^P)]\\ &-[x_1^N(y_2^N + y_2^P - y_3^N - y_3^P) + x_1^P(y_2^N + y_2^P - y_3^N - y_3^P) - x_2^N(y_1^N + y_1^P - y_3^N - y_3^P)\\ &-x_2^P(y_1^N + y_1^P - y_3^N - y_3^P) + x_3^N(y_1^N + y_1^P - y_2^N - y_2^P) + x_3^P(y_1^N + y_1^P - y_2^N - y_2^P)]\\ &-[-x_1^N(y_1^P - y_2^N + y_3^N - y_3^P) + x_1^P(y_1^N - y_2^N + y_2^P - y_3^P) - x_2^N(y_1^N - y_1^P + y_2^P - y_3^N)\\ &-x_2^P(y_1^P - y_2^N + y_3^N - y_3^P) + x_3^N(y_1^N - y_2^N + y_2^P - y_3^P) - x_3^P(y_1^N - y_1^P + y_2^P - y_3^N)]\\ &-[x_1^N(y_1^P + y_2^N - y_2^P - y_3^N) - x_1^P(y_1^N - y_2^P - y_3^N + y_3^P) - x_2^N(y_1^N - y_2^P - y_3^N + y_3^P)\\ &+x_2^P(y_1^N - y_1^P - y_2^N + y_3^P) + x_3^N(y_1^N - y_1^P - y_2^N + y_3^P) + x_3^P(y_1^P + y_2^N - y_2^P - y_3^N)]\} = 0.\end{aligned}$$

Равенството е доказано.

c) Разглеждаме векторите $\overrightarrow{B_3C_3}$ и $\overrightarrow{C_1F_1}$. Като използваме (2) получаваме

$$\overrightarrow{B_3C_3} = \overrightarrow{GC_3} - \overrightarrow{GB_3} = \overrightarrow{GP_3} - \overrightarrow{GP_1} + \overrightarrow{GN_1} - \overrightarrow{GN_2} = \overrightarrow{P_1P_3} + \overrightarrow{N_2N_1}\,.$$

Като използваме, че $\overrightarrow{N_1F_1} + \overrightarrow{N_1C_1} + \overrightarrow{N_1B_1} = 0$, $\overrightarrow{GP_1} + \overrightarrow{GP_2} + \overrightarrow{GP_3} = 0$, $\overrightarrow{GN_1} + \overrightarrow{GN_2} + \overrightarrow{GN_3} = 0$ (N_1 и G са медицетрове на триъгълниците $B_1C_1F_1$, $P_1P_2P_3$ и $N_1N_2N_3$) и (2), пресмятаме

$$\overrightarrow{C_1F_1} = \overrightarrow{N_1F_1} - \overrightarrow{N_1C_1} = -\overrightarrow{N_1B_1} - 2\,\overrightarrow{N_1C_1} = \cdots = \overrightarrow{GP_3} - \overrightarrow{GP_1} + \overrightarrow{GN_1} - \overrightarrow{GN_2} = \overrightarrow{P_1P_3} + \overrightarrow{N_2N_1}.$$

Следователно $\overrightarrow{B_3C_3} = \overrightarrow{C_1F_1}$ или (останалите – по аналогичен начин):

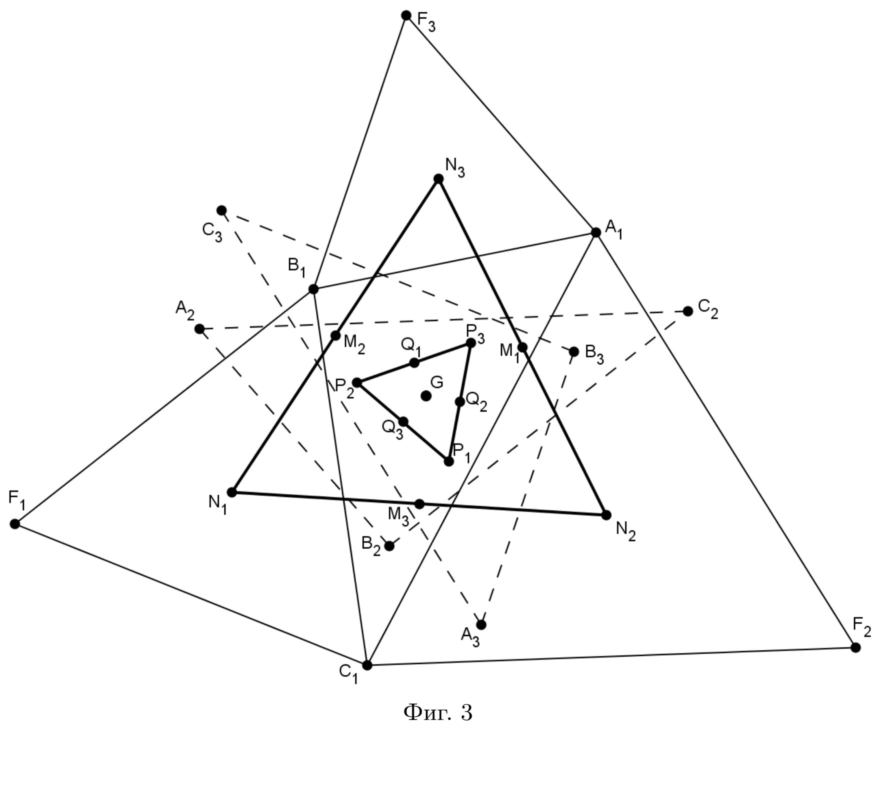
$$\begin{aligned}
&B_3C_3 = C_1F_1 \text{ и } B_3C_3 \parallel C_1F_1,\ B_2C_2 = B_1F_1 \text{ и } B_2C_2 \parallel B_1F_1 \text{ и } B_1C_1 \equiv B_1C_1;\\
&A_2C_2 = C_1F_2 \text{ и } A_2C_2 \parallel C_1F_2,\ A_3C_3 = A_1F_2 \text{ и } A_3C_3 \parallel A_1F_2 \text{ и } A_1C_1 \equiv A_1C_1;\\
&A_2B_2 = A_1F_3 \text{ и } A_2B_2 \parallel A_1F_3,\ A_3B_3 = B_1F_3 \text{ и } A_3B_3 \parallel B_1F_3 \text{ и } A_1B_1 \equiv A_1B_1.
\end{aligned} \tag{3}$$

Тоест, сумите от периметрите на двете тройки триъгълници са равни.

Следствие. Ако при направените построения триъгълниците $N_1N_2N_3$ и $P_1P_2P_3$ са равностранни (фиг. 3), то:

а) Триъгълниците $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ са еднакви и имат общ медицентър G с триъгълниците $N_1N_2N_3$ и $P_1P_2P_3$.

б) Триъгълниците $B_1C_1F_1$, $A_1C_1F_2$ и $A_1B_1F_3$ са равностранни с дължини на страните равни на дължините на страните на триъгълниците $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$.



Фиг. 3

в) $S_N + S_P = S_1 = S_2 = S_3$ (при означенията от Твърдение 2).

Доказателство. а) Тъй като триъгълниците $N_1N_2N_3$ и $P_1P_2P_3$ са равностранни, точките N_1 и Q_1 се изобразяват в точките N_2 и Q_3 при ротация с център G ъгъл $120°$. Точките Q_1 и Q_3 са среди на отсечките N_1A_1 и N_2A_2 (вж. Твърдение 1) и следователно точка A_1 се изобразява в точка A_2 (ротацията е еднаквост). Аналогично – точките B_1 и C_1 се изобразяват в точките B_2 и C_2. Следователно $A_1B_1C_1 \cong A_2B_2C_2$. По същият начин – $A_2B_2C_2 \cong A_3B_3C_3$, като:

(4) $\quad B_1C_1 = B_2C_2 = B_3C_3 = a;\; A_1C_1 = A_2C_2 = A_3C_3 = b;\; A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = c.$

От Твърдение 2а) – G е медицентър на триъгълници $N_1N_2N_3$, $P_1P_2P_3$, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$.

б) От равенства (3) на Твърдение 2в и равенства (4) на Следствие а) получаваме, че триъгълниците $B_1C_1F_1$, $A_1C_1F_2$ и $A_1B_1F_3$ са равностранни с дължини на страните съответно a, b и c.

в) Равенствата $S_N + S_P = S_1 = S_2 = S_3$ следват веднага от еднаквостта на триъгълниците $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$.

Така доказахме, че класическите Наполеонови триъгълници и техните основни свойства (Теорема 1) са частен случай на построеното от нас обобщение и неговите свойства (Твърдение 2).

Нека отбележим още, че $\Delta A_1B_3C_2 \cong \Delta A_2B_1C_3 \cong \Delta A_3B_2C_1 \cong \Delta P_1P_2P_3$, тъй като са получени от $\Delta Q_1Q_2Q_3$ чрез хомотетии с коефициенти 2 и -2 и центрове N_1, N_2, N_3 и G (фиг. 2). Аналогично - $\Delta A_3B_1C_2 \cong \Delta A_1B_2C_3 \cong \Delta A_2B_3C_1 \cong \Delta N_1N_2N_3$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer. "Geometry Revisited". Toronto–New York, 1967.

Димитър Андонов Белев
Василка Петрова Игнатова-Белева
ж.к. "Овча Купел 2", бл.23 вх. В
1632 София
e-mail: dbelev@gbg.bg

ONE GENERALIZATION OF THE NAPOLEON TRIANGLES

Dimitar Belev, Vasilka Ignatova-Beleva

We present a generalization of the Napoleon triangles and investigate some of their properties.