МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2010
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2010
Proceedings of the Thirty Ninth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians
Albena, April 6–10, 2010

МЕЖДУНАРОДНО ОТБОРНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ "ГАЛИЛЕЙ"

Владимир Георгиев*, **Донка Даракчиева**, **Стоян Капралов**

Представен е форматът на Международното отборно математическо състезание "Галилей" и решенията на четири от задачите, давани на състезанието през 2009 г.

1. Въведение. 2009 година беше обявена от Международния астрономически съюз и ЮНЕСКО за Международна година на астрономията [5] в чест на 400-годишнината от първите астрономически наблюдения с телескоп, направени от Галилео Галилей. Университетът в Пиза, където Галилей е бил професор преди 400 години, организира през 2009 г. за втори път Международното отборно математическо състезание "Галилей" [6].

Целта на състезанието е не да се търсят големи научни резултати или да се издирват млади математически "звезди", а учениците да бъдат въвлечени в създаването и решаването на разнообразни задачи и да усетят вълнението при откриването на непознати математически факти.

Състезанието се провежда в три кръга, като отборите се състоят от 5 до 7 ученици от гимназиална степен.

През 2009 г. в състезанието участваха отбори от България, Италия, Русия и Япония.

Първият кръг се проведе през месец април 2009 г. Отборите трябваше да решават 8 задачи за две седмици и да изпратят решенията по електронната поща на журито. Вторият кръг се проведе на 19 май 2009 г. В рамките на 5 часа учениците решаваха 8 задачи, като този път се изпращаха само отговорите.

Отборите, класирани на първите две места (от Габрово и Ливорно) бяха поканени за участие във финалния трети кръг, който се проведе на 21 октомври 2009 г. в гр. Пиза, Италия. Окончателен победител в състезанието за 2009 г. стана отборът на Националната Априловска гимназия, Габрово с ръководител Донка Даракчиева.

2. Задачи от първи кръг.

Задача 1. *Ученик на бележития Галилео Галилей открил нова планета, която се движи по елиптична орбита с полуоси a и b. Да предположим, че един наблюдател се намира в точка от равнината на елипсата, от която елипсата се вижда*

*Работата на първия автор е частично подкрепена от Европейската комисия по Програма Коменски "Учене през целия живот", Проект 141876-LLP-I-2008-I-ATCOMENIUS-CMP, "От математиката към Земята" (Math2Earth).

под прав ъгъл. Намерете разстоянието от центъра на елипсата до точката на наблюдение.

Решение. Разглеждаме допирателните към елипсата през точката $M(x_0, y_0)$.

Системата $\left| \begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ y=y_0+k(x-x_0) \end{array} \right.$ трябва да има единствено решение.

Условието за това е $(x_0^2-a^2)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-b^2=0$.

Ако ъгловите коефициенти на двете перпендикулярни допирателни са k_1 и k_2, то $k_1k_2=-1$, откъдето $\dfrac{y_0^2-b^2}{x_0^2-a^2}=-1$ или $x_0^2+y_0^2=a^2+b^2$.

Следователно търсеното разстояние е $\sqrt{a^2+b^2}$.

Задача 2. *Дадени са 12 монети, една от които е фалшива и се различава по тегло от останалите. Васил написал алгоритъм за определяне на фалшивата монета, съставен от n теглления на везни без теглилки. Той изпратил своя алгоритъм на Николай. Николай избира и прави три от предложените тегления и изпраща обратно резултатите. Намерете максималното n, такова че Васил да може да определи фалшивата монета и дали тя е по-лека или по-тежка от останалите, независимо от това, кои три от тегленията е избрал Николай.*

Решение. Да номерираме монетите с целите числа от 1 до 12 и да разгледаме четирите тегления, представени в Таблица 1.

Таблица 1: Решение с четири тегления

Теглене	Блюдо 1				Блюдо 2			
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	2	3	5	4	9	10	11
3	1	4	6	9	2	7	10	12
4	1	5	7	11	2	8	9	12

Има 24 варианта за фалшивата монета. За всеки от тях проследяваме какво би било положението на везните за всяко от четирите тегления. Попълваме в Таблица 2 резултатите, като за всяко теглене и всеки вариант за фалшивата монета вписваме номера на по-лекото блюдо (1 или 2) или 0 в случай на равновесие, като с $m-$ сме означили случая, когато монета m е по-лека, а с $m+$, когато монетата е по-тежка.

Всеки две стълбчета в таблицата се различават поне в две позиции. Следователно, ако задраскаме кой да е ред, стълбчетата ще се различават поне в една позиция. По такъв начин, от което и теглене да се откажем, с останалите три тегления ще можем еднозначно да определим коя е фалшивата монета и дали е по-лека или по-тежка.

Конструкцията показва, че $n \geq 4$.

Ще докажем, че случаят $n=5$ е невъзможен. Наистина, ако съществуваха 5 тегления, такива, че от кои да са три от тях да можем да определим монетата, то бихме имали таблица с 5 реда и 24 стълба с елементи 0, 1, 2 и свойството, че всеки два стълба се различават в поне 3 позиции. Това би означавало съществуването на

Таблица 2: Изходи от четирите тегления

Теглене	1−	1+	2−	2+	3−	3+	4−	4+	5−	5+	6−	6+
1	1	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1
2	1	2	1	2	1	2	2	1	1	2	0	0
3	1	2	2	1	0	0	1	2	0	0	1	2
4	1	2	2	1	0	0	0	0	1	2	0	0

Теглене	7−	7+	8−	8+	9−	9+	10−	10+	11−	11+	12−	12+
1	2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	2	1	2	1	2	1	0	0
3	2	1	0	0	1	2	2	1	0	0	2	1
4	0	0	1	2	2	1	2	1	0	0	1	2

троичен $(n = 5, M = 24, d = 3)$ код, което противоречи на границата на Хеминг. За троичен код с дължина n и минимално разстояние $d = 3$, неравенството е следното: $M \leq \dfrac{3^n}{1+2n}$, откъдето за броят на кодовите думи следва $M \leq 22$ – противоречие.

За използваните понятия от теория на кодирането, както и за границата на Хеминг вж. [1], [4], [8].

3. Задача от втори кръг.

Задача 3. *Един директор дава на секретарката си писма, които тя трябва да набира на компютър. Директорът поставя писмата едно върху друго по ред* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, *а секретарката, когато се окаже свободна от останалите си задължения, взема най-горното писмо и го обработва.*

Ето две примерни възможности за реда на обработване на писмата:

1, 2, 5, 4, 3, 7, 6, 3, 2, 5, 4, 6, 7, 1,

докато редицата 4, 6, 5, 7, 2, 3, 1 *е невъзможна.*

Намерете броя на всички различни възможности за реда на обработка на писмата.

Решение. Целият процес може да се представи като последователност от 7 включвания в стек и 7 изключвания от стека. Ограничението е, че във всеки един момент броят на изключванията не може да бъде по-голям от броя на включванията. Ако тръгнем от точката (0,0) и при всяко включване се придвижваме до съседната целочислена точка надясно, а при изключване от стека – до съседната точка нагоре, ще получим път до точката (7,7), като сме минавали само през точки с целочислени координати (x, y), за които $0 \leq y \leq x \leq 7$. Нека $P(x, y)$ е броят на различните пътища с начало (0,0) и край (x, y), които са получени чрез последователниост от стъпка надясно и стъпка нагоре и не минават над ъглополовящата на първи квадрант. Ако в дадена точка може да се дойде както отляво, така и отдолу, то $P(x, y) = P(x - 1, y) + P(x, y - 1)$. Ако няма съсед отляво или съсед отдолу, едното от събираемите отпада. Последователно намираме $P(x, y)$ за $y = 0,\ 1,\ 2, \ldots, 7,\quad x = y, y+1, y+2, \ldots, 7$. Оказва се, че по правата $y = x$ последователно са разположени числата на Каталан 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429 [7]. Отговорът на задачата е 429.

4. Задача от трети кръг.

Задача 4. *По колко различни начина* 7 *докторанти могат да бъдат разпределени на трима професори, така че всеки професор да има поне един докторант.*

Решение 1. Разглеждаме функция, при която на всеки докторант от множеството $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ е съпоставен професор от множеството $\{X,\ Y,\ Z\}$. Всеки професор трябва да бъде съпоставен на поне един докторант, следователно функцията е сюрекция.

Ще преброим функциите, които не са сюрекции. Нека A, B, C са съответно множествата от функции, при които професор X, Y, Z няма докторанти. Прилагаме принципа за включване и изключване [2]:

$|A\bigcup B\bigcup C| = |A| + |B| + |C| - |A\bigcap B| - |A\bigcap C| - |B\bigcap C| + |A\bigcap B\bigcap C|$.

Тъй като $|A| = |B| = |C| = 2^7$, $|A\bigcap B| = |A\bigcap C| = |B\bigcap C| = 1$ и $|A\bigcap B\bigcap C| = 0$, получаваме $|A\bigcup B\bigcup C| = 381$. Тогава търсеният брой е $3^7 - 381 = 1806$.

Решение 2. Множеството на докторантите трябва да се разбие на три непресичащи се подмножества. Означаваме с $S(n,k)$ броя на разбиванията на n-елементно множество на k блока. Числата $S(n,k)$ се наричат числа на Стирлинг от втори род [9]. Очевидно $S(n,1) = 1$ и $S(n,n) = 1$. В сила е следната рекурентна формула $S(n,k) = S(n-1,k-1) + k.S(n-1,k)$ при $1 < k < n$ [3]. В задачата се интересуваме от стойността на $S(7,3)$. Попълваме последователно клетките на Таблица 3.

Таблица 3: Числа на Стирлинг от втори род

$n\backslash k$	1	2	3
1	1		
2	1	1	
3	1	3	1
4	1	7	6
5	1	15	25
6	1	31	90
7	1	63	301

Тъй като всяко разбиване води до 3! разпределения, получаваме $301 \times 6 = 1806$.

Благодарности. Авторите са благодарни на проф. Иван Ланджев и ст.н.с. Емил Колев за идеята да се използва границата на Хеминг в решението на Задача 2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ст. Додунеков, Й. Денев. Кодиране на информацията, Народна просвета, София, 1985.

[2] Ст. Додунеков, Г. Кожухарова, М. Христова, Д. Капралова, Св. Дойчев. Математика за 10. клас – профилирана подготовка, Регалия 6, София, 2002.

[3] В. Липский. Комбинаторика для программистов, Мир, Москва, 1980.
[4] Кр. Манев. Увод в дискретната математика, Трето издание, КЛМН, София, 2003.
[5] www.astronomy2009.org/
[6] www.dm.unipi.it/~eroe
[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number
[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Hamming_bound
[9] http://en.wikipedia.org/wiki/Stirling_numbers_of_the_second_kind

Владимир Георгиев
Dipartamento di Matematica
Università degli Studi di Pisa
Pisa, Italy
e-mail: georgiev@dm.unipi.it

Донка Даракчиева
Национална Априловска гимназия
ул. "Априловска" 15
5300 Габрово
e-mail: d.darakchieva@gmail.com

Стоян Капралов
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: s.kapralov@gmail.com

INTERNATIONAL MATHEMATICS TEAM COMPETITION "GALILEI"

Vladimir Georgiev, Donka Darakchieva, Stoyan Kapralov

The 2009 edition of the International Mathematics Team Competition "Galilei" is presented.