МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2011
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2011
Proceedings of the Fortieth Jubilee Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 5–9, 2011

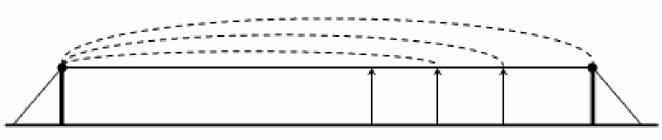
МАТЕМАТИКА И МУЗИКА (ОТ ПИТАГОР ДО БАХ И ДО НАШИ ДНИ)

Георги Димков

Наблюдавайки изпълнението на цигулар, човек забелязва, че от четирите струни с определена височина на тона се извличат още много други, различни по височина тонове. Общо взето става ясно, че изпълнителят притиска струната на определени места и това променя височината на тона. Как се определят тези места? Този въпрос съществува от хилядолетия и практиката е дала решения, основани на опита на музикантите. Съвсем друг е въпросът: **"Защо местата са точно тези?"**. Общоприето е схващането, че първите систематични изследвания в търсене на отговора на този въпрос са направени от дрвногръцкия учен Питагор.

Питагор от Самос е живял приблизително в периода 570-495 г. пр. Хр. Въпреки че са известни имената на майка му и баща му, няма никакви точни сведения за годините на раждането и на смъртта му. Питагор не е оставил никакво писмено творчество и всички факти, свързани с името му, са се предавали като разкази и легенди от учениците и съвремениците му и препредавали през поколения и векове.

Легендата твърди, че веднъж, минавайки прокрай ковачницата, Питагор забелязал, че чуковете, удряйки по наковалнята, произвеждат различни по височина тонове. Първоначално той смятал, че това се дължи на силата на удара, постепенно установил, че височината на тона е свързана с големината на чука. Какви точно опити е правил с различни звучащи предмети, не е известно. До нас обаче е останала системата от тонове, която се получава в резултат на последователни опити със струна. За своите изследвания Питагор е използвал *монохорд* – струна, закрепена в двата си края, без промяна на силата на опъване в течение на една поредица от опити. Приведена в трептене, струната произвежда тон с точно определена височина – да го наречем *основен тон на струната.* При намаляване на дължината на трептящата част се появяват и чуват нови тонове, различни по височина от основния тон.



Опитите на Питагор имали за цел да установят връзката между "новата" дължина на струната и отношението на "новия" тон към основния тон.

В музиката, когато по някакъв повод говорим за два тона, казваме, че разглеждаме интервал. Нека направим едно сравнение. В математиката обикновено под интервал разбираме множеството от всички реални числа, които се намират между две дадени числа, наречени краища или крайни точки на интервала. Абсолютната стойност на разликата от двата края задава дължината на интервала. При музикалния интервал също имаме две "крайни точки". Това са двата тона, които разглеждаме. Тук обаче не се изисква непременно между тях да има и други тонове. При музикалния интервал вместо за дължина говорим за големина. Тази големина може да бъде изразена с използване на различни начини за измерване или характеризиране. За разлика от математиката, където не се разглеждат нулеви интервали, музикалният интервал в определени случаи може да е съставен от два еднакви по височина тона.

В нашия и следващите подобни случаи големината на интервала ще бъде характеризирана с отношение между дължини на струни. Да поясним с един пример. Имаме струна с дължина 100 см и съответстващия ѝ основен тон. Да оставим сега да звучат 70 см от струната. Получаваме нов тон. Големината на интервала, образуван от тези два тона, се характеризира с отношението между дължините на двете струни. За определеност на действията нека приемем винаги да разглеждаме отношението на по-малката дължина към по-голямата. В наши случай полученият интервал има характеристика $\dfrac{70}{100} = \dfrac{7}{10}$.

След тези уточнения да дадем следното определение: интервал между два тона, който се харакгеризира с отношение 1:2, се нарича *октава.*

За тона, който произвежда половината струна, казваме, че е с една октава по-висок от основния. И като общо правило за сравнение по височина на два тона, получени от две различни по дължина части на една и съща струна по-висок от двата е онзи, който се получава от по-късата част.

Лесно е да си представим как звучи интервалът една октава. Всекиму се е случвало да си тананика някаква мелодия. В случай, че мелодията слиза ниско и нашият глас не може повече да я следва, ние я продължаваме със скок до един точно определен по-висок тон. Този нов тон е с една октава по-висок от тона, който не сме успели да изпеем.

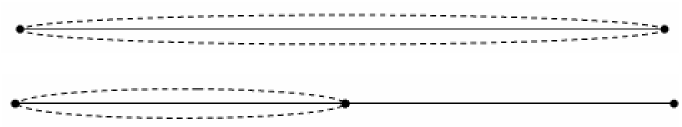
Горният примерът показва още, че между споменатите два тона се вместват и други тонове. **Колко и какви са те?** Развитието на музикалната култура е довело до създаването на характерни за различните региони от света музикално-звукови системи. Отговор на поставения въпрос дава понятието *темперация.*

Темперация е точното определяне на броя и съотношението на височините на тоновете, влизащи в състава на дадена, исторически установила се, музикално-звукова система.

В резултат от изследванията на Питагор е получена една темперация, чието изграждане е проследено по-нататък.

Носещите се през столетията сведения за философията и възгледите на Питагор твърдят, че той е смятал числата (по-точно рационалните числа) за основа, върху която се гради светът. Оттук е идеята в опитите си с монохорда той да започне с отношения на първите естествени числа – 1, 2, 3, 4.

И така, имаме струна, закрепена в двата си края. За простота на пресмятанията, да приемем, че дължината на струната е 1. Силата на опъване не се променя. Възможно е обаче да намаляваме дължината на трептящата част от струната. Вземайки първите две естествени числа, Питагор оставя да трепти $1/2$ от струната. С други думи имаме струна с дължина $1/2$. В резултат се получава тон, който се използва в музикалната практика. Следователно, опитът трябва да бъде запомнен. Новият тон и основният образуват интервал с характеристика $1/2$.



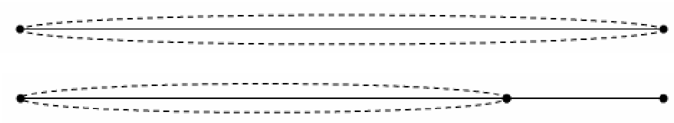
Сега имаме два тона. Според правилото за сравняване, вторият е по-висок от първия. За да опростим изразите, да наречем височината на основния тон на струната "до". Това наименование е условно и няма нищо общо с установените в практиката имена на тоновете. Тогава, според някои съвременни практики за слогово означаване на височините на тоновете, височината на новия тон да наречем "до^1".

Ако представим резултата таблично, той ще изглежда така.

Дължина на струната	$\frac{1}{2}$	1
Височина на тона	до^1	до

Тази таблица изглежда малко странно. Тя обаче съответства на традицията от времето на Питагор – тоновете се нареждат по низходящия ред на техните височини.

При втория опит участва отношението на следващата двойка естествени числа и сега трепти само $2/3$ от струната.



Отново се получава тон, който по съотношението си към основния съществува в музикалната практика. Височината на този тон да наречем "сол" и получаваме един нов интервал с характеристика $2/3$. Тъй като $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1$, таблицата се разширява по следния начин.

Дължина на струната	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
Височина на тона	до^1	сол	до

Следващата стъпка логично ни води към ограничаване на струната до $3/4$ от нейната дължина. Резултатът е аналогичен на предните два и имаме ново разширение на таблицата и нов интервал с характеристика $3/4$. Тъй като $\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < 1$, по височина този тон се намира между “сол” и “до”. Неговата височина да наречем “фа”:

Дължина на струната	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1
Височина на тона	до^1	сол	фа	до

Така получихме една редица от тонове, от които най-ниският е основният тон на експерименталната струна, а останалита се получават със съкращаване на дължината на трептящата, т.е. звучащата ѝ част, по определено правило. Легендата гласи, че по този начин е била настроена лирата на Орфей.

Да съставим сега една таблица, в която да поместим известните ни вече характеристики на интервали и я допълним с характеристиките и другите възможни интервали от горната редица от тонове. Получаваме:

Висок тон		Нисък тон		Отношение
до^1	$\frac{1}{2}$	до	1	$\frac{1}{2} : 1 = \frac{1}{2}$
сол	$\frac{2}{3}$	до	1	$\frac{2}{3} : 1 = \frac{2}{3}$
фа	$\frac{3}{4}$	до	1	$\frac{3}{4} : 1 = \frac{3}{4}$
до^1	$\frac{1}{2}$	фа	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$
сол	$\frac{2}{3}$	фа	$\frac{3}{4}$	$\boxed{\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{8}{9}}$
до^1	$\frac{1}{2}$	сол	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$

Да разгледаме внимателно тази таблица. В нея се появи едно отношение, което не сме срещали досега. Това е характеристиката на интервала “фа-сол” – $8/9$.

Тук даваме едно ново определение. Интервал между два тона, който се характеризира с отношението 8:9 се нарича *цял тон*.

Характеристиката на интервала “фа-до” е $3/4$. Сравнението $\frac{3}{4} < \frac{8}{9} < 1$ показва, че ако имаме тон с характеристика $8/9$, той се намира между “фа” и “до”. Височината на този тон ще наречем “ре”. Между ‘фа” и “до” вмъкнахме един нов тон – “ре”:

Дължина на струната	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{8}{9}$	1
Височина на тона	до^1	сол	фа	ре	до

Ако формализираме нещата, при определянето на мястото върху струната, което дава тон с височина “ре”, ние на практика умножихме дължината на “до”, т.е. 1 с $8/9$.

Да умножим сега дължината на “ре” с 8/9. Струната отново е скъсена и сега има дължина $\frac{64}{81}$. Лесно се проверява, че $\frac{3}{4} < \frac{64}{81} < \frac{8}{9}$. Това означава, че между “фа” и “ре” можем да вмъкнем още един тон. Височината на този тон ще наречем “ми”:

Дължина на струната	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{8}{9}$	1
Височина на тона	до^1	сол	фа	ми	ре	до

Ако се опитаме да вмъкнем още един тон между “фа” и “ми”, трябва да извършим умножението $\frac{64}{81} \times \frac{8}{9} = \frac{512}{729}$. Но $\frac{512}{729} < \frac{3}{4}$ и това означава, че между “фа” и “ми” няма място за цял тон.

Да пресметнем характеристиката на интервала “фа-ми”.

$$\frac{3}{4} : \frac{64}{81} = \frac{243}{256}$$

Този резултат ни води до едно ново определение. Интервал между два тона, който се характеризира с отношението 243 : 256, се нарича *полутон*.

Да направим рекапитулация. В интервала “фа-до” с характеристика 3/4 вмъкнахме още два тона и получихме редицата “фа – ми – ре – до”, в която има следната последователност от интервали:

полутон – цял тон – цял тон.

В сборната таблица от интервали виждаме, че интервалът “до^1-сол” има характеристика 3/4, т.е. точно толкова, колкото е и характеристиката на интервала “фа-до”. В такъв случай ние можем да повторим действията, които извършихме в интервала “фа-до”. Разликата е, че вместо от 1 ще започнем от 2/3. Умножавайки два пъти последователно 2/3 с 8/9, получаваме дна нови тона. Техните височини да наречем съответно “ла” и “си”. По този начин октавата “до^1-до” е допълнена с четири нови тона и нейната крайна форма се дава в следната таблица:

Дължина на струната	$\frac{1}{2}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{8}{9}$	1
Височина на тона	до^1	си	ла	сол	фа	ми	ре	до

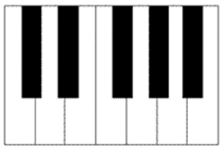
Получихме един нов обект. Това е октавата “до^1-до”, разделена на седем части чрез поредицата от интервали:

полутон – цял тон – цял тон – цял тон – полутон – цял тон – цял тон.

Този обект се нарича *диатонична гама*. Визуално диатоничната гама отговаря на белите клавиши на пианото от “до” до “до^1”, където последователността на тоновете е във възходящия ред на техните височини.

През вековете, последвали тази конструкция на Питагор, специалистите започнали да забелязват някои нейни особености. Да се занимаем с една от тях.

По-горе дефинирахме цял тон и полутон. Би трябвало два полутона да са равни на един цял тон. Да видим дали това е така.



От неравествата $\frac{8}{9} < \frac{243}{256} < 1$ следва, че между "ре" и "до" може да се вмести нов тон, който образува интервал полутон с "до". Да го ознзачим с "ро" и да пресметнем характеристиката на инервала "ре-ро". Тя е $\frac{8}{9} : \frac{243}{256} = \frac{2048}{2187} < \frac{243}{256}$. Това означава, че между "ре" и "ро" интервалът е по-голям от дефинирания по-рано полутон. В развитието на практическите и теоретическите идеи е имало период, когато се е работело с "малък полутон" с характеристика $\frac{243}{256}$ и "голям полутон" с характеристика $\frac{2048}{2187}$. **Каква е разликата межу тези два интервала?** Отговор на този въпрос дава Евклид в труда си "Делението на канона". (Тук думата "канон" е в старогръцкото си значение – пръчка или връв за измерване.) Резултатът е

$$\frac{2048}{2187} : \frac{243}{256} = \frac{524288}{531441} = \frac{2^{19}}{3^{12}}.$$

Тази коригираща величина се нарича *Питагорова кома.*

Развитието на интонационните идеи и създаването на инструменти с нови конструкции довежда до необходимостта от допълване на диатоничната гама. Става дума за вмъкването на допълнителни тонове в интервалите с размер цял тон. За да проследим развитието на тези идеи, да обърнем диатоничната гама, за да я виждаме така, както сме свикнали. Освен това там, където има интервал цял тон, вместваме междинни тонове, на които засега даваме условни имена.

до	*де*	ре	*ри*	ми	фа	*фо*	сол	*са*	ла	*ли*	си	до^1
1		$\frac{8}{9}$		$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{16}{27}$		$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

Да си припомним, че намаляването наполовина на звучащата част от струната произвежда тон, с една октава по-висок от първоначалния. Тогава, обратно, удвояването на звучащата част от струната произвежда тон, който е с една октава по-нисък от първоначалния. (Разбира се при условие, че звучащата част от струната е по къса от 1/2.) Казано накратко, в първия случай умножаваме с 1/2, а във втория – с 2.

Да видим какво се получава след извършване на следните действия. Вземаме цялата струна – тя звучи "до". Умножаваме дължината ѝ с2/3 и сега звучи "сол". Умножаваме новата дължина с 2/3. Повторно скъсената струна има дължина 4/9 <1/2. Последното неравенство показва, че излязохме извън рамките на октавата "до–до^1". За да се върнем в нея трябва да умножим 4/9 с 2. Резултатът – $4/9 \times 2 = 8/9$ ни довежда до тона "ре". Продължаваме по същия начин и получаваме:

$8/9 \times 2/3 = 16/27$– "ла", $16/27 \times 2/3 = 32/81 < 1/2 \ \rightarrow\ 32/81 \times 2 = 64/81$ – "ми".

Продължаваме по същия начин и получаваме "си". На следващата стъпка получаваме тон, който се намира между "фа" и "сол". Това е неизвестният досега тон "*фо*". Да продължим да попълваме таблицата, като числителите и знаменателите запишем като степени на числата 2 и 3.

до	*де*	ре	*ри*	ми	фа	*фо*	сол	*са*	ла	*ли*	си	до^1
1	$\frac{2^{11}}{3^7}$	$\frac{2^3}{3^2}$	$\frac{2^{14}}{3^9}$	$\frac{2^6}{3^4}$	$\frac{2^{17}}{3^{11}}$	$\frac{2^9}{3^6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2^{12}}{3^8}$	$\frac{2^4}{3^3}$	$\frac{2^{15}}{3^{10}}$	$\frac{2^7}{3^5}$	$\frac{2^{18}}{3^{12}}$

Новият обект, който получихме се нарича *хроматична гама.* В нея обаче има две отклонения от стойностите в диатоничната гама. Това са стойностите на "фа" и "до^1". Ако използваме новите им стойности, те биха звучали малко по-високо. Лесно се пресмята, че величината, с която те надхвърлят предишните стойности, е точно Питагоровата кома.

Сега да построим хроматичната гама, движейки се в обратна посока. Да започнем от "до^1". Дължината 1/2, която отговаря на "до^1", умножаваме с 3/2, а корекциите за връщане в изходната октава извършваме като делим на 2.

до	*де*	ре	*ри*	ми	фа	*фо*	сол	*са*	ла	*ли*	си	до^1
$\frac{3^{12}}{2^{19}}$	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{3^{10}}{2^{16}}$	$\frac{3^3}{2^5}$	$\frac{3^8}{2^{13}}$	$\frac{3}{2^2}$	$\frac{3^6}{2^{10}}$	$\frac{3^{11}}{2^{18}}$	$\frac{3^4}{2^7}$	$\frac{3^9}{2^{15}}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{3^7}{2^{12}}$	$\frac{1}{2}$

И тук имаме подобни разминавания в краищата на построението.

Да приемем, че сме съставили хроматичната гама, като за тоновете от диатоничната гама запазим питагоровите им отношения. За останалите пет тона имаме по две възможности. Да вземем само част от таблиците – от "до" до "ре". И за удобство на сравненията да запишем числата в тях като дестични дроби.

	до	*де*	ре
Първа таблица	1.0000	0.9364	0.8889
Втора таблица	1.0000	0.9492	0.8889

Вариантът за "де", на който отговаря дължина на струната 0.9364, да наречем "до♯" (до диез) – повишен тон "до". Вариантът с дължина 0.9492 да наречем "ре♭" (ре бемол) – понижен тон "ре".

При изпълнение на струнни инстументи от типа на цигулка, китара и други подобни, тези два тона звучат различно. При инструментите с фиксирана височина на тона тези два тона се заместват с един усреднен тон – например черните клавиши на пианото. В такъв случай "до♯" и "ре♭" звучат еднакво и се наричат *енхармонични тонове.*

Пианото и използваните и до днес клавесини, а така също и арфата не са най-лошият случай. Те все пак се поддават на пренастройване в някакви рамки. Но ние не можем да прненастроим един орган. Същото се отнася за ксилофона – набор от дървени плочки, за многобройните металофони, съставени от метални плочки, камбанки, тръби и други. При тях енхармонизмът е неизбежен.

Опитът да се замени $\frac{2^{18}}{3^{12}}$ с $\frac{1}{2}$, съответно $\frac{3^{12}}{2^{19}}$ с 1 създава големи интонационни и хармонични затруднения за музикантите – композитори и изпълнители. От средата на XVI до средата на XVIII в. са правени многобройни опити да се коригира тази таблица. Те се състоят в различни начини за разпределяне на този "излишък" между останалите интервали. Своя принос са дали както музиканти: Лодовико Фоляно, Пиетро Аарон, Франсиско Салинас, Джозефо Царлино, Винченцо Галилеи (бащата на Галилео), Чжу Цзай Юй, така и математици: Симон Стевин, Марен Мерсен, Кристиан Хюйгенс, Исак Нютон, Жан д'Аламбер, Леонард Ойлер и много други.

Тук специално място заема Йохан Себастиан Бах. Той настройва своите инструменти – клавесини – по слух, следвайки свое разбиране за съотношението между тоновете и акордите. Този начин на настройване носи името *добре темпериран строй.* Няма сведения да е използван от други негови съвременници или последователи – дори и от синовете му.

В края на XVIII и началото на XIX век специалистите се обединяват около използването на хроматична гама в *равомерно темпериран строй.* Това е хроматична гама, на която характеристиките на полутоновете образуват геометрична прогресия с частно $2^{-1/12} = 0.943874$.

Понякога погрешно се отъждествяват *добре темпериран* и *равномерно темпериран* строй. Това са две независими едно от друго решения на проблема. Едното е основано на естетически схващания, а другото – на чисто математически съображения.

Да се върнем във времето на древногръцките изследвания. Още тогава възниква проблемът с "големия" и "малкия" полутон. Къде е трудността и противоречието? За да намерим правилното място на полутона върху струната, трябва да знаем да построим отсечка, която е средногеометрична на две дадени отсечки. А тези две отсечки са с дължина 1 и 8/9. От друга страна във философията и учението на Питагор няма ирационални числа и за големината на това средно геометрично просто е "забранено" да се говори.

В по-късни времена една чисто техническа трудност е липсата на акустични прибори. Единствената възможност е геометричното построяване, което най-лесно става по начина на Питагор. Нека отбележим и това, че звукът на струната започва да се свързва, освен с дължината ѝ, още и с броя на трептенията много късно. Първите такива сурови предположения се появяват в един труд на холандския учен Исак Бекман (1588-1637).

Днес ние знаем, че дължината на струната е обратно пропорционална на броя на трептенията ѝ. Акустичните прибори отчитат броя на трептенията, а оттам и височината на съответния тон, както и необходимите корекции при настройката. По отношение на трептенията тоновете на хроматичната гама от равномерно темперирания строй образуват геометрична прогресия с частно $\sqrt[12]{2} = 1.059463$.

Музикантите не са доволни от звученето на равномерно темперирания строй и имат право. И тук е уместно перефразирането на една известна сентенция:

Равномерно темперираният строй е много лошо нещо,
но нищо по-добро не е измислено.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Boyd-Brent. Harmony and Proportion. http://www.aboutscotland.com/harmony/prop.html.
[2] K. Lang. Auf Wohlklangswellen durch der Töne Meer, Institut für Elektronische Musik, Graz, 1999.
[3] P. Bailhache. Cordes vibrantes chez Beeckman, Mersenne et Galilée, *Sciences et techniques en perspective*, No 23, Université de Nantes, "Musique et mathmatiques", 1993, p. 73–91.
[4] S. Göller. Introduction to Musical Scales, :athe;atics Institute, University of Warwicl, 2001.
[5] Л. Красинская, В. Уткин. Элементарная теория музыки, Москва, 1983.

Георги Димков
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София, България
e-mail: gdimkov@math.bas.bg

MATHEMATICS AND MUSIC (FROM PYTHAGORAS THROUGH BACH TILL THE PRESENT TIME)

Georgi Dimkov

Looking at the performance of a violonist we perceive that the four strings of the instrument produces tones different pitches. It is clear that the artist presses the strings on special places and that changes the pitch. These places are determined practically by the musicians. Is it possible to determine these places theoretically, from some abstract point of view? After the legend the first successive investigations in this field were done by Pythagoras. The development of the ideas for improvement and enlargement of the results of Pythagoras is the mane topic of the present paper.