МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ, МУЗИКАЛНА ГРАМОТНОСТ И ПРЕНОСЪТ ИМ В ИЗУЧАВАНЕ НА ИЗОБРАЗИТЕЛНО ИЗКУСТВО

Мария Асенова Караиванова

Академия за музикално танцово и изобразително изкуство, Пловдив
mariakaraivanova@abv.bg

Резюме: *Предмет на разработката са музикалната грамотност като една от образователните потребности на съвременния човек и математическото моделиране като средство за нейното придобиване.*

С елементарни математически средства са изведени основните категории: тонова височина, музикален интервал, консонантност, музикален строй, ладова интервална структура. Математическите зависимости в музиката са представени като свързващо звено с изобразителното изкуство при изучаване на линейни орнаменти и овали.

Ключови думи: *правилна дроб, оператор за умножение, математическо моделиране, музикален строй, ладова структура, линеен орнамент, овал.*

Въведение.

Както е известно древните гърци изучават съзвучието между музикалните тонове, стремейки се да изведат законите на всемирната хармония. В такъв план Питагор (VI в.пр.н.е.) изследва всевъзможни съчетания от двойки тонове. За целта той измерва две дължини – на цяла струна L (основен тон) и на избрана нейна част (производен тон), определя отношението на получените числа и го съпоставя на усещането за съзвучие. Питагор установява еднозначно-обратимото съответствие: „*тонова височина – дължина на отсечка* (струна)". Въз основа на това съответствие той изгражда *три типа модели* в музиката: *сетивен*, съответстващ на усещанията за комбинациите от тонове; *физически*, постиган с размерите на звучащите дължини от струна и *математически*, който задава с числови отношения естетически категории и зависимости. На еквивалентността между трите модела се опира развитието на теоретичната мисъл в областта на музиката.

Мелодията като последователно прозвучаващи тонови височини се явява основно изразно средство и играе първостепенна роля в музиката. Но не всяка последователност от тонове е мелодия. Мелодичната линия се получава, при определени съотношения на тоновите височини и организацията им във времето. Основните градивни елементи в мелодията (височинни скокове, движения) се моделират с музикални интервали, които могат да се изучават с математически средства.

1. Основни математически модели в музиката.

Музикален интервал се образува от звученето на два тона. При последователно прозвучаване на тоновете интервалът е *мелодичен*, а при едновременно звучене – *хармоничен*. Съзвучността на тоновете в двата случая не се променя, но с последователността, в която прозвучават, може да се постигне различно усещане за движение. В тази връзка, ако първо прозвучи по-ниският от два тона, образуваният мелодичен интервал се определя като *възходящ* и обратно. Интервалът е *низходящ*, ако започва с по-високия си тон.

Музикален интервал може да се моделира с дължините L_m и L_n на звучащи части от струна, които възпроизвеждат съответните два тона. Наредената двойка числа (L_m; L_n) определя интервала като възходящ или низходящ, а отношението L_n/L_m, задава неговата съзвучност (Караиванова 2009: 105,106). В музикалната практика интервалите се изучават във възходящия си вариант.

Дължините L_m и L_n ($L_n \leq L_m$), определят еднозначно интервала (фиг. 1).

$$(L_m \ ; L_n) = \ L_n / L_m$$

Фиг. 1. Математически модел на музикален интервал.

Отношението L_n/L_m се нарича *акустична стойност* и е основна характеристика на интервала. Акустичната стойност е безмерна величина, която дава възможност за сравнение на интервалите и за класифициране на тяхната съзвучност.

От два интервала по-голям (по-широк) е този, който има по-малка акустична стойност (Быстрый 2001:256).

Два интервала с равни акустични стойности са тъждествени, т. е. имат една и съща съзвучност, независимо от тоновете, които ги образуват. Исторически утвърдените представи за консонантност се моделират с отношения от типа $\frac{n}{n+1}$. Най-високата степен на съзвучност между тоновете се постига при n=1. С увеличаване на числото n, акустичната стойност расте, а разликата между двете тонови височини и степента на тяхната съзвучност намаляват.

При въвеждане на тоновите височини числовите отношения се използват в две качества:

- *оператори за умножение*, с които се отделят части от дължината на струна и с тях се въвеждат нови тонови височини;

- *акустични стойности*, определящи по степен на консонантност образуваните с тоновете интервали (Караиванова 2013: №3 57) .

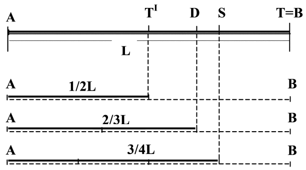
Двете функции на числовите отношения се сливат при решаване на основната задача в музиката – построяване на конкретен музикален интервал от даден тон.

2. Орфеев строй.

В духа на питагорейската традиция набор от тонови височини – *строй*, се въвежда с най-съзвучните интервали.

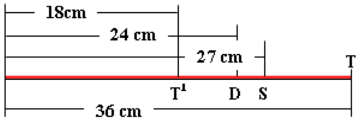
Според преданието най-благозвучни помежду си са четирите тона, с които е била настроена митичната орфеева лира. В резултат на многобройни опити Питагор утвърждава, че изключителният (божествен) *орфеев строй* се получават от цялата дължина L (*основен тон*) на струна и нейните части: 1/2L; 2/3L; 3/4L (*производни тонове*).

Приложени към конкретна дължина L на струна, операторите за умножение: ω = 1/2, φ = 2/3 и Ψ = 3/4 определят върху нея позициите на производните тонове. Наредени по височина заедно с основния тон, те са известни днес като *тоника* (T = L), *субдоминанта* (S = 3/4L), *доминанта* (D = 2/3L) и *тоника през октава* (T^{I} = 1/2L) (фиг. 2).



Фиг. 2. Модел на орфеев строй върху струна.

Тоновият състав на орфеевия строй зависи от основната тонова височина, издавана от L, която може да бъде различна при една и съща дължина. Например всяка от четирите цигулкови струни е с дължина 36 cm, но издава различен основен тон. Цигулковият строй включва от малка октава тона g (сол), от първа - тоновете d^1 (ре^1) и a^1 (ла^1) и от втора – тона e^2 (ми^2).



Фиг. 3. Орфеев строй върху цигулкова струна.

Върху всяка струните на цигулката операторите ω = 1/2, φ = 2/3 и Ψ = 3/4 определя части с дължини съответно 18 cm, 24 cm, 27 cm (фиг. 3). Но тонове, които издават равни части на различните струни, не съвпадат. Наредени по височина върху отделните струни, тоновете на орфеевия строй са съответно:

g: g (сол); c^1 (до^1); d^1 (ре^1); g^1(сол^1);

d^1: d^1(ре^1) ; g^1 (сол^1); a^1 (ла^1);d^2 (ре^2);

a^1: a^1(ла^1) ; d^2 (ре^2); e^2 (ми^2); a^2 (ла^2);

e^2: e^2 (ми^2); a^2 (ла^2); h^2 (си^2); e^3 (ми^3).

Въпреки различния си тонов състав възпроизведеният в четири варианта орфеев строй поражда едно и също усещане и то има обективна основа.

Всички интервали, които образуват помежду си орфеевите тонове, се определят с акустични стойности от типа $\frac{n}{n+1}$ (n = 1, 2, 3 и 8):

1/2 = (T; T^{I}) = (L ; 1/2 L);
2/3 = (T; D) = (S; T^{I}) = (L; 2/3L) = (3/4L; 1/2L);
3/4 = (T; S) = (D; T^{I}) = (L ; 3/4 L) = (2/3L; 1/2L);
8/9 = (S; D) = (3/4L; 2/3L).

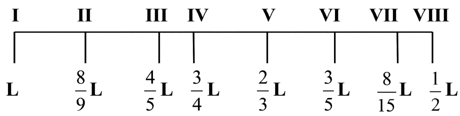
В продължение на столетия древните гърци използват числовите отношения, зададени с орфеевия строй, за да го обогатяват с допълнителни тонове, гарантирайки съзвучността им. Така се създава музикалната гама като последователност от осем тона, избрани по определени показатели (Караиванова 2009: 104).

Гамата и съзвучността на заложените в нея интервали между тоновете са в основа на пълноценната музикална грамотност. Математическата същност на интонационните зависимости в музиката прави възможно да се съчетава придобиването на такава грамотност с овладяването на стандартни учебни математически задачи.

3. Осемстепенна диатонична гама.

Тоновете в гамата са наредени по височина и поредните им номера се назовават *степени*. Когато сред тоновите височини на осемте степени няма повишени (с диез) или понижени (с бемол) тоновата редица определя *осемстепенна диатонична гама*.

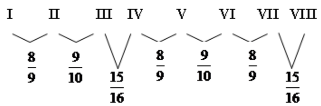
За изучаване на диатоничната гама са подходящи числовите отношения, с които се задават тоновете от натуралния музикален строй (Быстрый 2001:260). В качеството си на *оператори за умножение* тези отношения въвеждат осемстепенната диатонична гама като *последователност* от *тонови височини* и съответстващите им *степени* (фиг. 4).



Фиг. 4. Натурална диатонична гама, зададена с числови отношения.

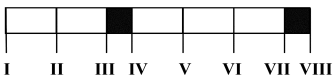
Прието е видовете интервали в гамата и техните акустични стойности да се въвеждат посредством наредените двойки, образувани от първа и някоя от останалите степени: *секунда* – (I;II) = 8/9; *терца* – (I;III) = 4/5; *кварта* – (I;IV) = 3/4; *квинта* – (I;V) = 2/3; *секста* – (I;VI) = 3/5; *септима* – (I;VII) = 8/15; *октава* – (I;VIII) = 1/2. По акустичната си стойност всеки от тези интервали може да се построи от произволен тон.

Числовите отношения, пораждащи тоновете, дават възможност да се определят с акустични стойности всички секунди в гамата, т. е. интервалите, образувани между съседни степени (фиг. 5).



Фиг. 5. Интервали между съседни диатонични степени.

Става ясно, че секундите имат две проявления: голяма (Г=8/9≈9/10) и малка (М=15/16). Установеното редуване на големи и малки секунди определя *линейна структура*, известна като мажорна и може да се представи схематично (фиг. 6). Мажорната структура е същностна характеристика на въведената диатонична гама. Всяка промяна в структурата изменя слуховото усещане за тоновата последователност. (Караиванова 2009: 101-109).



Фиг.6. Мажорна интервална структура.

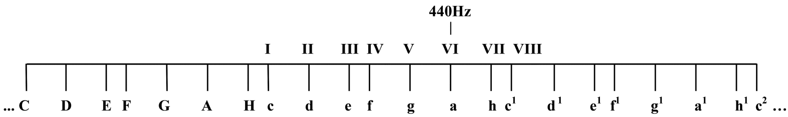
4. Редица на диатоничните тонове.

Конструкцията на диатоничната гама се разпростира в честотния обхват на човешкия слух с октавови ходове, т. е. последователно построяване на интервал октава. Това означава, че с последователно действие на операторите: $\omega = 1/2$ (*възходяща октава*) или $\omega^{-1} = 2$ (*низходяща октава)* върху всеки отделен тон на гамата (фиг.7), тя се пренася в две посоки като съвкупност от тонове и като мажорна интервалова структура.

$$\xleftarrow{\omega^{-3}} L_2 \xleftarrow{\omega^{-2}} L_1 \xleftarrow{\omega^{-1}} L \xrightarrow{\omega} L^1 \xrightarrow{\omega^{2}} L^2 \xrightarrow{\omega^{3}}$$

Фиг. 7. Последователни октавови ходове от тон L.

Пренесените тонове се въвеждат с нови числови отношения, като запазват изходните тонови названия и образуват *диатонична тонова редица*. (фиг. 8).



Фиг. 8. Тонови названия на диатоничните степени.

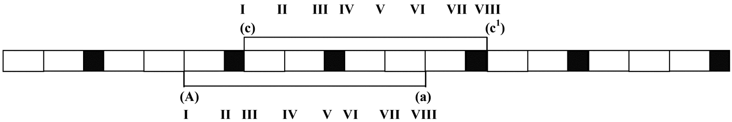
Честотният еталон за височина 440 Hz (ла от първа октава) фиксира звученето на елементите от цялата редица и установява базовото съответствие между съвременните тонови названия и диатоничните степени. В получената тонова редица се образува *верига от мажорни гами*, които започват от тона „c“ (до) и са подчинени на условията:

- Последният тон (VIII ст.) на едната е първи (Iст.) за следващата;
- На степени с един и същи пореден номер съответстват едноименни тонове, разположени през седем позиции.

С промяна в позицията на първата степен се образува отново верига от гами, но в нея големи и малки секунди се редуват по друг начин. Възможните различни позиции на първата степен определят с линейни структури от секунди седем *вериги от гами,* чието звучене възпроизвежда така наречените *стари ладове* (фиг. 9).

Фиг. 9. Диатонични структури на старите ладове.

В развитието на европейската музика се утвърждават две от тези структури – мажорна (I ст. = тон „с") и минорна (I ст.= тон „а") (Фиг. 10).



Фиг. 10. Интервални структури (мажорна и минорна) в тоновата редица.

Приложеният моделен подход установява количествени и наредбени закономерности в диатоничната тонова редица, които дават възможност да се въведат числови функции и с тях да се изучават основни категории в музиката – интервали, ладови структури, функции на диатоничните степени, квинтово-квартов кръг на тоналностите ... (Караиванова 2013 а: 95-104; 2013 б: 57).

5. Значение на симбиозата математика – музика.

Достъпността на математическите средства за моделиране на закономерностите в музиката дава възможност за придобиване на пълноценна музикална грамотност независимо от качествата на слуха и за пренос на придобитите знания и умения в други познавателни области.

Един пример в това отношение е интеграцията между музика и изобразителни изкуства, постигната с вграждане на интегрирани модули в задължителната програма по математика на специализирано училище за художници (СХУИИ „Ц. Лавренов", гр. Пловдив).

Въпреки „хладното" си отношение към математиката, бъдещите художници не пестят сили, за да изучат абстрактни математически модели, с които да опознаят основополагащи закономерности в изобразителното изкуство или в музиката. Така музикалната грамотност се вплита по естествен начин в общата и професионалната подготовка на художника.

Още в седми клас учениците овладяват уравнения от типа:

$$\mathrm{F}\,(x;y) = \bigcup_{n\in Z}\left\{(x;y)\in R^2 / F(x-nT;y)=0; -|a| \le x-nT \le |b|\right\}.$$

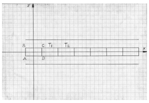
С усложняване на изучавания по програма математически апарат тези уравнения стават средство (Быстрый 2001:289-293) за решаване на изследователски и художествено-творчески задачи в специализираната подготовка.

В такъв план се реализира интегративно изучаване в различни аспекти (исторически, теологичен, технологичен) на линейни орнаменти. За целта изображенията от археологически находки се разглеждат в контекста на съответната историческата епоха. Пресъздаването на историческа рисунка (фиг. 11, а) се съчетава с изучаване на съответните културни пластове, които свързват характерните за времето ритуали с присъствието на линеен орнамент. Изследването на неговия образ се основава на математическо моделиране. Учениците съставят уравнение (фиг. 11, б), по него чертаят графика (фиг. 11, в) и рисуват линейния орнамент (фиг. 11, г), като моделират цветовите решения с функцията дробна част на число.

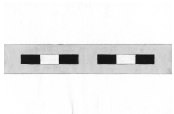
а)

$$\bigcup_{n\in Z}\left\{\left\{|y|\le 1; x-2n=-1\right\}\bigcup\left\{\left|x-2n\le 1;|x|\le 1\right|\right\}\right\}$$

б)



в)

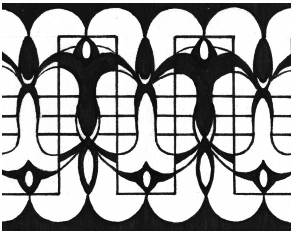
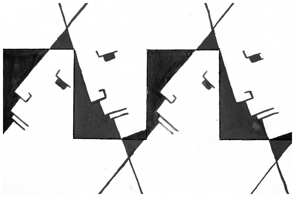


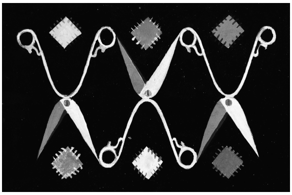
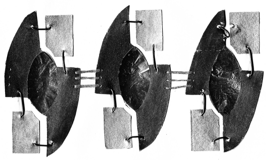
г)

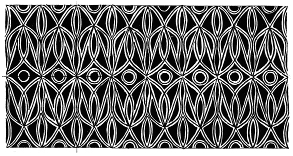
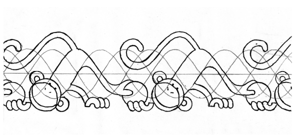
Фиг. 11. Етапи в интегративното изучаване на линеен орнамент.

В процеса на моделирането се разкриват непознати характеристики на орнаментите – числовите отношения в конструкцията им определят конкретни музикални интервали от натуралния строй. Преднамерено или не, включването на определени музикални интервали в древната ритуална образност буди стремеж към познание и задава модел за визуализация на съзвучността между тоновете посредством математически зависимости.

Подобна идея обогатява изразните средства на бъдещите художници и провокира фантазията им. Като използват „музикални“ отношения с различна степен на консонантност, те композират свои линейни орнаменти (фиг. 12) и ги моделират с изучаваните математически функции: у = ах+в (фиг.12, а); у = $ах^2$ (фиг.12,б); у = sin(х) (фиг.12, в).

а)  ;  ;

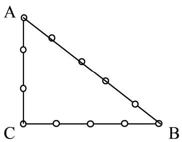
б)  ;  ;

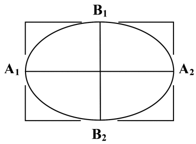
в)  ;  .

Фиг. 12. Линейни орнаменти на математическа основа, с вложени в нея музикални интервали.

Прилагано систематично, математическото моделиране на исторически образци показва, че акустичните стойности на октава, квинта, кварта, секунда... преобладават в ритуалните орнаменти на Месопотамия, Древен Египет, Древна Гърция. Но те са застъпени и в българската възрожденска архитектура.

Според възрожденския строителен канон релацията „перпендикулярност“ се конструира с „египетски триъгълник “ (рис. 13, а), т. е. триъгълник, чиито страни образуват натуралните интервали: кварта (AC/CB = 3/4), терца (CB/AB = 4/5) и секста (AC/AB = 3/5).

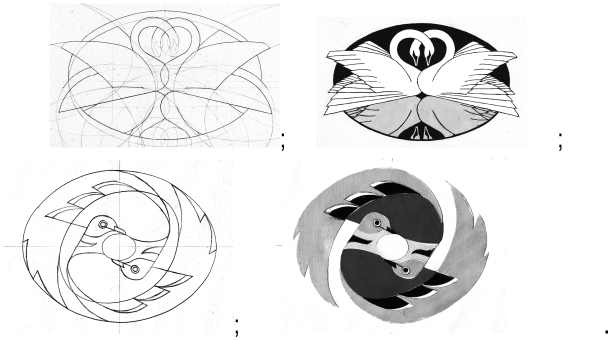




а) Египетски триъгълник; б) Овална форма, моделирана в квинтово отношение

Фиг. 13. „ Музикални“ отношения в геометрични форми.

Но акустични стойности от натуралния музикален строй се откриват и в различните архитектурни елементи, определящи облика на сградите. Сред многобройните примери за „музикалност“ на естетическото решение е резбованият овал върху тавана на централното помещение в етнографския музей – Пловдив. Избраната от възрожденския майстор форма на овала, съответства на „квинтово“ отношение между двете оси: B_1B_2 / A_1A_2 = 2/3 (рис. 13, б).



Фиг. 14. Художествени композиции от овали, моделирани с „музикални“ отношения.

С промяна в „съзвучността“ на осите се изменя формата на овала. Изразните възможности на тези връзки интригуват бъдещите художници и ги подтиква към естетически търсения. Учениците подбират подходящо „звучащи“ овали, с тях моделират художествени композиции (фиг. 14).

Представеното тук взаимно проникване на знания и умения в областите математика, музика и изобразително изкуство е елемент от по-широка интеграция, която включва и други учебни предмети (история, литература, технология на живописта...). Осъществяването на такава интеграция се отразява благотворно върху развитието на учениците. Мотивацията им за учебни дейности в интегрираните области, добива устойчивост, кръгът от интересите им се разширява, а постигнатите резултати надхвърлят нивата, заложени в учебните програми като образователни стандарти.

Математическият заряд на високоорганизираната музикална материя е в състояние да генерира нейни проекции във всяка познавателна област, боравеща с измерване на величини. Интегративен подход с подобни проекции дава възможност да се разпространи музикалната грамотност в обществото и да се повиши нивото на общата музикална култура.

Литература

1. Быстрый, Игорь. Моделирование музыкальных строев с помощью графов. – В Методология математического моделирования. София, 1990, 131-133; 289-293.

2. Быстрый, Игорь. Школа духовно развитого человека. София: Зора, 2001, 256 -260.
3. Караиванова, Мария. Математическото моделиране като средство за изучаване на музика. – В: Юбилеен годишник на АМТИИ. Пловдив, 2009, 101 - 109.
4. Караиванова 2013 а: Караиванова, Мария.Математическо моделиране на арматурна редица от диези или бемоли. – В: Пролетни научни четения АМТИИ Пловдив, 2013, 95-104
5. Караиванова 2013 б: Караиванова, Мария. Математическое моделирование мажорных тональностей в музыке. – В: Ученые записки Российской академии музыки им. Гнесиных. Москва, 2013, №3,с.57.
6. Караиванова 2013 в: Караиванова, Мария. Натурален ли е питагоровия строй. – В: Годишник на АМТИИ. Пловдив, 2013, 48 – 58.

MATHEMATICAL MODELING, MUSIC LITERACY AND THEIR TRANSMISSION IN FINE ARTS EDUCATION

Maria Assenova Karaivanova

Abstract: *The work is dedicated to music literacy as one of the educational needs of the modern man as well as mathematical modeling as a mean of music literacy procurement. With simple mathematical tools it displays basic categories in music - tone height, musical interval, consonant tones and intervals, music tune, modal interval structure. Mathematical relations in music are presented as a key link to fine arts in studying of linear ornaments and ovals.*

Keywords: *proper fraction, multiplication operator, mathematical modeling, musical tune, modal structure, linear ornament, oval.*