Serdica

Mathematical Journal

Сердика

Математическо списание

Serdica Math. J. **35** (2009), 117–128

Serdica
Mathematical Journal

Bulgarian Academy of Sciences
Institute of Mathematics and Informatics

ON QUASI-NORMALITY OF TWO-SIDED MULTIPLICATION

M. Amouch

Communicated by S. L. Troyanski

Dedicated to Hasna

Abstract. In this note, we characterize quasi-normality of two-sided multiplication, restricted to a norm ideal and we extend this result, to an important class which contains all quasi-normal operators. Also we give some applications of this result.

1. Introduction. Soit $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornées sur un espace de Hilbert H. Si $A \equiv (A_1, \dots, A_n)$ et $B \equiv (B_1, \dots, B_n)$ sont deux n-uplets d'éléments de $\mathcal{L}(H)$, alors l'opérateur élémentaire associé à A et B, noté $R_{A,B}$ est défini par

$$R_{A,B}(X) = \sum_{i=1}^{n} A_i X B_i \qquad (X \in \mathcal{L}(H)).$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 47B47, 47B10, 47A30.
Key words: Bi-Multiplication, quasi-normalité, spectraloide.

Pour $A_i, B_i \in \mathcal{L}(H)$, on pose $L_{A_i}(X) = A_iX$ et $R_{B_i}(X) = XB_i$ $(X \in \mathcal{L}(H))$. Alors L_{A_i} et R_{A_i} sont deux opérateurs de $\mathcal{L}(H)$ qui commutent et on a

$$R_{A,B} = \sum_{i=1}^{n} L_{A_i} R_{B_i}.$$

Parmi les opérateurs élémentaires qui ont suscité beaucoup d'intérêt on cite :

i) $\delta_{A,B}$ la dérivation généralisée associée à A et B, définie par

$$\delta_{A,B}(X) = AX - XB, \quad (A, B, X \in \mathcal{L}(H)).$$

ii) $M_{A,B}$ la bi-multiplication associée à A et B, définie par

$$M_{A,B}(X) = AXB, \quad (A, B, X \in \mathcal{L}(H)).$$

Soit J un idéal bilatère de $\mathcal{L}(H)$. On appelle norme symétrique sur J toute norme $\|\cdot\|_J$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\|AXB\|_J \leq \|A\|\|X\|_J\|B\|$ pour tout $X \in J$ et A, $B \in \mathcal{L}(H)$;

(ii) $\|X\|_J = \|X\|$ pour tout opérateur X de rang 1.

Un idéal normé de $\mathcal{L}(H)$ (voir [11]), est un idéal J muni d'une norme symétrique $\|\cdot\|_J$ et qui en fait un espace de Banach. On le note $(J, \|\cdot\|_J)$. En particulier, la classe de Hilbert-Schmidt, notée $\mathcal{C}_2(H)$ est un idéal normé. On rappelle ici que

$$\mathcal{C}_2(H) = \{T \in \mathcal{L}(H);\ \mathbf{tr}(T^*T) < \infty\},$$

où **tr** désigne la fonctionnelle trace. De plus, $\mathcal{C}_2(H)$ muni du produit scalaire trace est un espace de Hilbert. Dans toute la suite $(J, \|\cdot\|_J)$ désigne un idéal normé de $\mathcal{L}(H)$.

Si $X \in J$, alors $\|R_{A,B}(X)\|_J \leq \sum_{i=1}^{n} \|A_i\|\|B_i\|\|X\|_J$. Ainsi, la restriction de $R_{A,B}$ à J, qu'on notera $R_{J,A,B}$, est un opérateur linéaire continu sur $(J, \|\cdot\|_J)$. La restriction de $M_{A,B}$ à J sera notée par $M_{J,A,B}$. En particulier si $J = \mathcal{C}_2(H)$, alors on pose $M_{J,A,B} = M_{2,A,B}$.

Suivant la référence [6], l'adjoint généralisé de $R_{J,A,B}$ noté $R^*_{J,A,B}$, est défini par

$$R^*_{J,A,B}(X) = \sum_{i=1}^{n} A_i^* X B_i^*.$$

L'opérateur $R_{J,A,B}$ est normal si

$$R_{J,A,B} R_{J,A^*,B^*} = R_{J,A^*,B^*} R_{J,A,B},$$

où $A^* = (A_1^*, \ldots, A_n^*)$ et $B^* = (B_1^*, \ldots, B_n^*)$ (voir [6]).

Dans l'article [7], l'auteur a montré que l'opérateur $R_{A,B}$ est normal au sens de la définition précédente si et seulement si les coefficients A_i, $1 \leq i \leq n$ et les coefficients B_i, $1 \leq i \leq n$ sont normaux et commutent deux à deux.

L'étude des propriétés structurelles d'une bi-multiplication, en fonction de celles de ces coefficients a suscité l'intérêt de nombreux auteurs, on cite ici Magajna dans [9].

Rappelons qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est quasi-normal [5] si

$$TT^*T = T^*TT.$$

Dans l'article [3] (voir aussi [2]), Campbell et Gellar ont introduit et étudié la classe $\Theta(H)$ des opérateurs T qui vérifie l'égalité

$$(T + T^*)T^* = T^*(T + T^*).$$

Il est clair que tout opérateur quasi-normal est dans $\Theta(H)$.

En utilisant l'adjoint généralisé, on dira que $M_{J,A,B}$ est quasi-normal si

$$M_{J,A,B}M_{J,A^*,B^*}M_{J,A,B} = M_{J,A^*,B^*}M_{J,A,B}M_{J,A,B},$$

et que $M_{J,A,B}$ est dans $\Theta(J)$ si

$$(M_{J,A,B} + M_{J,A^*,B^*})M_{J,A^*,B^*}M_{J,A,B} = M_{J,A^*,B^*}M_{J,A,B}(M_{J,A,B} + M_{J,A^*,B^*}).$$

Dans la deuxième partie de ce travail, nous étudions la quasi-normalité de $M_{J,A,B}$ lorsque J est un idéal normé quelconque (Théorème 2.2) et dans la troisième partie, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes sur les opérateurs A et B de $\mathcal{L}(H)$ pour que $M_{J,A,B}$ soit dans $\Theta(J)$ (Théorème 3.7). Rappelons qu'un opérateur linéaire borné T défini sur un espace de Banach X est dit *spectraloide* si $r(T) = \|T\|$, où $r(T)$ est le rayon spectral de T. La dernière partie, est consacré à l'application des résultats que nous avons établis, nous donnons des conditions sur A et B pourque la bi-multiplication $M_{J,A,B}$ de $\Theta(H)$ soit spectraloide (Théorème 4.2).

2. Quasi-normalité. Dans la proposition suivante nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'égalité de deux bi-multiplications.

Proposition 2.1. *Si A, B, C et D sont des opérateurs non nuls de $\mathcal{L}(H)$, alors $M_{J,A,B} = M_{J,C,D}$ si et seulement si il existe un scalaire α non nul tel que $A = \alpha C$ et $B = \dfrac{1}{\alpha}D$.*

P r e u v e. Supposons que $M_{J,A,B} = M_{J,C,D}$. Alors $M_{J,A,B}(X) = M_{J,C,D}(X)$ pour tout $X \in J$. En particulier, pour $X = x \otimes y$, où $x, y \in H$, on a

$$Ax \otimes B^*y = Cx \otimes D^*y.$$

Puisque A, B, C et D sont non nuls, alors

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} C \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} B^* = \operatorname{Ker} D^*.$$

Maintenent, si $x \in \operatorname{Ker} A^{\perp}$ et $y \in \operatorname{Ker} B^{*\perp}$, alors il existe un scalaire α non nul tel que $Ax = \alpha Cx$ et $B^*y = \frac{1}{\overline{\alpha}} D^*y$. Puisque α ne dépend pas du choix de x et y, on déduit que $A = \alpha C$ et $B^* = \frac{1}{\overline{\alpha}} D^*$. D'où le résultat en passant à l'adjoint.

Réciproquement, si $A = \alpha C$ et $B = \frac{1}{\alpha} D$, alors

$$M_{J,A,B} = M_{J,\alpha C, \frac{1}{\alpha} D} = M_{J,C,D}. \qquad \square$$

Dans le théorème suivant nous caractérisons la quasi-normalité d'une bimultiplication.

Théorème 2.2. *Soient A, $B \in \mathcal{L}(H)$. Alors $M_{J,A,B}$ est quasi-normal si et seulement si A et B^* sont quasi-normaux.*

P r e u v e. Un simple calcule montre que $M_{J,A,B}$ est quasi-normal si et seulement si

$$M_{J,AA^*A,BB^*B} = M_{J,A^*AA,BBB^*}.$$

Maintenant, si A et B^* sont quasi-normaux, alors $AA^*A = A^*AA$ et $B^*BB^* = BB^*B^*$. En passant à l'adjoint dans la dernière égalité, on obtient $BB^*B = BBB^*$. Donc d'après la proposition 2.1, on a

$$M_{J,AA^*A,BB^*B} = M_{J,A^*AA,BBB^*}.$$

D'où $M_{J,A,B}$ est quasi-normal.
Réciproquement, si $M_{J,A,B}$ est quasi-normal, alors

$$M_{J,AA^*A,BB^*B} = M_{J,A^*AA,BBB^*}.$$

Par la proposition 2.1 il existe un scalaire α non nul tel que

$$AA^*A = \alpha A^*AA \quad \text{et} \quad BB^*B = \frac{1}{\alpha} BBB^*.$$

En multipliant $AA^*A = \alpha A^*AA$ à gauche par A^* et $BB^*B = \dfrac{1}{\alpha}BBB^*$ à droite par B^*, on obtient

$$A^*AA^*A = \alpha A^*A^*AA \quad \text{et} \quad BB^*BB^* = \frac{1}{\alpha}BBB^*B^*.$$

Puisque A^*AA^*A et A^*A^*AA sont positifs, alors α est positif. En passant à la norme on obtient

$$\|A\|^4 = \alpha\|A^2\|^2 \leq \alpha\|A\|^4 \quad \text{et} \quad \|B\|^4 = \frac{1}{\alpha}\|B^2\|^2 \leq \frac{1}{\alpha}\|B\|^4.$$

En conséquence $\alpha = 1$, ce qui implique que

$$AA^*A = A^*AA \quad \text{et} \quad BB^*B = BBB^*.$$

Finalement A et B^* sont quasi-normaux. □

Dans le cas particulier $J = \mathcal{C}_2(H)$, on obtient le corollaire suivant qui figure dans [9].

Corollaire 2.3. *$M_{2,A,B}$ est quasi-normal si et seulement si A et B^* sont quasi-normaux.*

3. Appartenance à $\Theta(J)$.

Nous commencons cette partie par doneer un example d'opérateur qui est quasi-normal et qui n'est pas dans $\Theta(H)$.

Exemple 3.1. Soit S le shift unilateral défini par $Se_n = e_{n+1}$ où $\{e_n\}_n$ est une base orthonormée de H. Alors on a : $S^*SSe_n = SS^*Se_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc S est quasi-normal. Mais, $(S+S^*)S^*e_0 = 0 \neq S^*(S+S^*) = e_0$, donc $S \notin \Theta(H)$.

Les deux lemmes qui suivent nous serons utiles dans la suite de ce paragraphe.

Lemme 3.2. *Soient $R_{A,B} = \sum_{i=1}^n L_{A_i}R_{B_i}$, l'opérateur élémentaire associé aux suites $A = \{A_i\}_{i=1}^n$ et $B = \{B_i\}_{i=1}^n$ d'opérateurs de $\mathcal{L}(H)$. Alors $R_{A,B}$ est continu pour la topologie faible des opérateurs.*

P r e u v e. Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ les opérateurs L_A et R_B sont continus pour la topologie faible des opérateurs. Donc $\sum_{i=1}^n L_{A_i}R_{B_i}$, est aussi continu pour cette topologie. □

Le lemme suivant montre qu'un opérateur élémentaire est nul sur $\mathcal{L}(H)$ si et seulement si il est nul sur J.

Lemme 3.3. *Soit* $R_{A,B} = \sum_{i=1}^{n} L_{A_i} R_{B_i}$ *l'opérateur élémentaire associé aux suites* $A = \{A_i\}_{i=1}^{n}$ *et* $B = \{B_i\}_{i=1}^{n}$ *d'opérateurs de* $\mathcal{L}(H)$. *Alors* $R_{J,A,B} = 0$ *si et seulement si* $R_{A,B} = 0$.

Preuve. Si $R_{A,B}(X) = 0$ pour tout $X \in J$, alors $R_{A,B}(X) = 0$ pour tout X dans $\mathcal{F}(H)$. Puisque $\mathcal{F}(H)$ est dense pour la topologie faible des opérateurs, alors pour tout $X \in \mathcal{L}(H)$ il existe une suite généralisée $\{X_\alpha\}_\alpha$ d'opérateurs de $\mathcal{F}(H)$ telle que X_α converge pour la topologie faible des opérateurs vers X. Or d'après le lemme 3.2 $R_{A,B}(X)$ est continu pour la topologie faible, donc $R_{A,B}(X) = R_{A,B}(\lim_{wot} X_\alpha) = \lim_{wot} R_{A,B}(X_\alpha)$, où $\lim_{wot}$ désigne la limite faible. Par conséquent $R_{A,B}(X) = 0$ pour tout $X \in \mathcal{L}(H)$. $\square$

Dans la suite nous aurons aussi besoin des propositions suivantes.

Proposition 3.4. *Si* B^* *est un opérateur quasi-normal et s'il existe un scalaire* λ *non nul tel que* $\lambda B B^* B^* = B B B^*$, *alors* $B = \lambda B^*$.

Preuve. Supposons que B^* est quasi-normal et qu'il existe un scalaire λ non nul tel que $\lambda B B^* B^* = B B B^*$. Alors pour tout $x \in \operatorname{Ker} B$ on a

$$\begin{aligned} B^* B B^* x &= B B^* B^* x \\ &= \frac{1}{\lambda} B^2 B^* x \\ &= \frac{1}{\lambda} B B^* B x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ceci entraine que $B^* x \in \operatorname{Ker} B^* B = \operatorname{Ker} B$ pour tout $x \in \operatorname{Ker} B$. Donc $\operatorname{Ker} B$ est invariant par B^*. Par conséquent, $\operatorname{Ker} B$ est orthogonalement réduisant pour B. Suivant la décomposition $H = \operatorname{Ker} B \oplus \overline{R(B^*)}$ les opérateurs B et B^* s'écrivent sous la forme

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_4^* \end{pmatrix}$$

Maintenant, l'égalité $\lambda B B^* B^* = B B B^*$ implique que

$$\lambda \langle B^* B^* x, B^* x \rangle = \langle B B^* x, B^* x \rangle, \quad \text{pour tout } x \in H.$$

Donc B et λB^* coincident sur $R(B^*)$, par suite ils coincident sur $\overline{R(B^*)}$. D'où $\lambda B_4^* = B_4$. Finalement

$$B = \lambda B^*. \qquad \square$$

Remarque 3.5. La classe $\Theta(H)$ n'est pas stable par la multiplication des scalaires. En effet, d'après l'exemple 3.1, il existe un opérateur T de $\Theta(H)$ qui n'est pas quasi-normal. Supposons que ce T vérifie $iT \in \Theta(H)$. Alors $T^*T(T^* + T) = (T^* + T)T^*T$ et $T^*T(T - T^*) = (T - T^*)T^*T$, en faisant la somme des deux dernières égalités, on obtient

$$(T^*T)T = T(T^*T),$$

c'est-à-dire que T est quasi-normal, ce qui contredit le fait que T n'est pas quasi-normal. Donc iT n'est pas pas dans $\Theta(H)$.

Proposition 3.6. *Soient $A \in \mathcal{L}(H)$ et λ un scalaire de module* 1. *Alors $(1 + \lambda)A \in \Theta(H)$ si et seulement si $(A^* + \lambda A)A^*A = A^*A(A^* + \lambda A)$.*

Preuve. Supposons que $(1 + \lambda)A \in \Theta(H)$. Alors

$$[(\overline{\lambda} + 1)A^* + (\lambda + 1)A]A^*A = A^*A[(\overline{\lambda} + 1)A^* + (\lambda + 1)A].$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par un scalaire λ de module égal à 1, on obtient

$$[(1 + \lambda)A^* + (\lambda^2 + \lambda)A]A^*A = A^*A[(1 + \lambda)A^* + (\lambda^2 + \lambda)A],$$

donc

$$[(1 + \lambda)(A^* + \lambda A)]A^*A = A^*A[(1 + \lambda)(A^* + \lambda A)].$$

D'où

$$(A^* + \lambda A)A^*A = A^*A(A^* + \lambda A),$$

pour tout scalaire λ de module égal à 1.

Réciproquement, on suppose que

$$(*) \qquad (A^* + \lambda A)A^*A = A^*A(A^* + \lambda A).$$

En passant à l'adjoint, on obtient

$$(**) \qquad (A + \overline{\lambda}A^*)A^*A = A^*A(A + \overline{\lambda}A^*).$$

En faisant la somme de $(*)$ et $(**)$, il vient que

$$[(\overline{\lambda}+1)A^*+(\lambda+1)A]A^*A = A^*A[(\overline{\lambda}+1)A^*+(\lambda+1)A].$$

Donc

$$(1+\lambda)A \in \Theta(H), \quad \text{pour tout scalaire } \lambda. \qquad \square$$

Le résultat principal de ce paragraphe est le théorème suivant.

Théorème 3.7. *Soient A et B deux opérateurs non nuls de $\mathcal{L}(H)$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

i) *Si A et B^* sont quasi-normaux, alors $M_{J,A,B}$ est dans $\Theta(J)$.*

ii) *Si A n'est pas quasi-normal et B^* est quasi-normal, alors $M_{J,A,B} \in \Theta(J)$ si et seulement si il existe un scalaire λ tel que $B=\lambda B^*$ et $(1+\lambda)A \in \Theta(H)$.*

Preuve. Si A et B^* sont quasi-normaux, alors d'après le théorème 2.2 $M_{J,A,B}$ est quasi-normal. Donc $M_{J,A,B} \in \Theta(J)$.

Pour montrer (ii) posons

$$\begin{aligned} F(X) &= (M_{J,A^*,B^*}+M_{J,A,B})(M_{J,A^*,B^*}M_{J,A,B}) \\ &\quad -(M_{J,A^*,B^*}M_{J,A,B})(M_{J,A^*,B^*}+M_{J,A,B}). \end{aligned}$$

Alors $F=0$ si et seulement si $M_{J,A,B} \in \Theta(J)$.

Soit $X \in J$, alors

$$\begin{aligned} F(X) &= A^*A^*AXBB^*B^* + AA^*AXBB^*B \\ &\quad -A^*AA^*XB^*BB^* - A^*AAXBBB^* \\ &= (A^*+A)A^*AXBB^*B^* + AA^*AX(BB^*B-BB^*B^*) \\ &\quad -A^*A(A^*+A)XB^*BB^* - A^*AAX(BBB^*-B^*BB^*). \end{aligned}$$

Supposons que A n'est pas quasi-normal et que B^* est quasi-normal. Alors

$$\begin{aligned} F(X) &= ((A^*+A)A^*A - A^*A(A^*+A))XBB^*B^* \\ &\quad +(AA^*A-A^*AA)X(BB^*B-BB^*B^*). \end{aligned}$$

Supposons que $M_{J,A,B} \in \Theta(J)$. Donc $F(X)=0$ pour tout $X \in J$. Il vient alors du lemme 3.3 que $F(X)=0$ pour tout $X \in \mathcal{L}(H)$. Si la famille $\{BB^*B^*, BB^*B - BB^*B\}$ est linéairement indépendente, alors [4, Théorème 1] donne $AAA^* = A^*AA$ c'est-à-dire que A est quasi-normal, ce qui contredit le fait que A n'est pas quasi-normal. En conséquence la famille $\{BB^*B^*, BB^*B - BB^*B\}$ est linéairement dépendente. Donc il existe un scalaire α tel que

$$BB^*B - BB^*B^* = \alpha BB^*B^*,$$

ce qui implique

$$(\alpha+1)BB^*B^* = BB^*B = BBB^*.$$

D'après la proposition 3.4, on conclut que $B = (\alpha+1)B^*$.
D'autre part, si on pose $\lambda = \alpha + 1$, alors

$$\begin{aligned} F(X) &= \lambda[(A^*+A)A^*A - A^*A(A^*+A)]XB^{*3} \\ &\quad +(\lambda^2-\lambda)(AA^*A - A^*AA)XB^{*3} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui entraine

$$[(A^*+A)A^*A - A^*A(A^*+A) + (\lambda-1)(AA^*A - A^*AA)]XB^{*3} = 0,$$

pour tout $X \in \mathcal{L}(H)$. Puisque B^* est un opérateur quasi-normal non nul, alors B^{*3} est aussi non nul et par [4, Théorème 1], on conclut que

$$(A^*+A)A^*A - A^*A(A^*+A) + (\lambda-1)(AA^*A - A^*AA) = 0.$$

Donc

$$(A^*+\lambda A)A^*A = A^*A(A^*+\lambda A).$$

Par la proposition 3.6, il vient que

$$(1+\lambda)A \in \Theta(H).$$

Réciproquement, on suppose $B = \lambda B^*$ et $(1+\lambda)A \in \Theta(H)$. Alors

$$\begin{aligned} F(X) &= \lambda A^*A^*AXB^{*3} \\ &\quad +\lambda^2 AA^*AXB^{*3} - \lambda A^*AA^*XB^{*3} - \lambda^2 A^*AAXB^{*3} \\ &= \lambda[(A^*+\lambda A)A^*A - A^*A(A^*+\lambda A)]XB^{*3}. \end{aligned}$$

Donc la proposition 3.6 permet de conclure que :

$$(A^*+\lambda A)A^*A - A^*A(A^*+\lambda A) = 0.$$

Par conséquent $F(X) = 0$, pour tout $X \in J$, donc $M_{J,A,B} \in \Theta(J)$, ce qui termine la preuve du théorème. $\square$

Remarque 3.8. Remarquons que dans la preuve du théorème précédent A et B^* jouent des rôles symétriques. Ainsi, si A est quasi-normal et B^* n'est pas quasi-normal, alors $M_{J,A,B} \in \Theta(J)$ si et seulement si il existe un scalaire λ tel que $A^* = \lambda A$ et $(1+\lambda)B^* \in \Theta(H)$.

Si $J = \mathcal{C}_2(H)$ dans le théorème précédent, alors on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.9. *Soient A et B deux opérateurs non nuls de $\mathcal{L}(H)$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

i) *Si A et B^* sont quasi-normaux, alors $M_{2,A,B} \in \Theta(\mathcal{C}_2(H))$.*

ii) *Si A n'est pas quasi-normal et B^* est quasi-normal, alors $M_{2,A,B} \in \Theta(\mathcal{C}_2(H))$ si et seulement si il existe un scalaire λ tel que $B = \lambda B^*$ et $(1+\lambda)A \in \Theta(H)$.*

4. Applications. Soit T un opérateur linéaire borné défini sur un espace de Banach X. Il est connu que $\|M_{J,A,B}\| = \|A\|\|B\|$ ([8]) et que $\sigma(M_{J,A,B}) = \sigma(A)\sigma(B)$ ([10]). En utilisant ces deux derniers résultats, on obtient la proposition suivante qui nous sera utile dans la suite.

Proposition 4.1. *Soient A et B deux opérateurs non nuls de $\mathcal{L}(H)$. Alors $M_{J,A,B}$ est spectraloide si et seulement si A et B sont spectraloides.*

P r e u v e. Supposons que $M_{J,A,B}$ est spectraloide. Puisque on a

$$\|M_{J,A,B}\| = \|A\|\|B\| \quad \text{et} \quad \sigma(M_{J,A,B}) = \sigma(A)\sigma(B).$$

Alors

$$\begin{aligned} \|M_{J,A,B}\| &= \|A\|\|B\| \\ &= r(M_{J,A,B}) \\ &= R(A)r(B) \\ &\leq \|A\|r(B). \end{aligned}$$

Donc $\|B\| \leq r(B)$ et par suite $\|B\| = r(B)$. De la même façon, on conclut que $r(A) = \|A\|$. Donc A et B sont spectraloides.

Réciproquement, si A et B sont spectraloides, alors $r(A)r(B) = \|A\|\|B\|$, donc on a $r(M_{J,A,B}) = \|M_{J,A,B}\|$. $\square$

Dans [3] Campbell et Gellar ont montré que tout opérateur de $\Theta(H)$ est spectraloide. Une question se pose naturellement :

Est ce qu' une bi-multiplication $M_{J,A,B}$ de $\Theta(J)$ est spectraloide ?

Le théorème suivant donne une réponse partielle à cette question.

Théorème 4.2. *Soient A et B deux opérateurs non nuls de $\mathcal{L}(H)$. Alors on a les propriétés suivantes :*

i) *Si $M_{J,A,B}$ est quasi-normal, alors $M_{J,A,B}$ est spectraloide.*

ii) *Si $M_{J,A,B} \in \Theta(J)$ et A et B sont tels que A n'est pas quasi-normal et B^* est quasi-normal, alors $M_{J,A,B}$ est spectraloide.*

Preuve. Supposons que $M_{J,A,B}$ est quasi-normal, alors d'après le théorème 2.2 les opérateurs A et B sont quasi-normaux, donc A et B sont spectraloides et par la proposition 4.1, on conclut que $M_{J,A,B}$ est spectraloide. Ceci montre i). Pour ii) supposons que $M_{J,A,B} \in \Theta(J)$. Si A n'est pas quasi-normal et B^* est quasi-normal, alors d'après le théorème 3.7, il existe un scalaire λ tel que $B = \lambda B^*$ et $(1 + \lambda)A \in \Theta(H)$, d'où $r(A) = \|A\|$ et $r(B) = \|B\|$, c'est-à-dire que A et B sont spectraloides et par la proposition 4.1, il vient que $M_{J,A,B}$ est spectraloide. $\square$

Remarque 4.3. Si $M_{J,A,B} \in \Theta(J)$ et A et B sont tels que A est quasi-normal et B^* n'est pas quasi-normal, alors d'après la remarque 3.8 il existe un scalaire λ tel que $A^* = \lambda A$ et $(1 + \lambda)B^* \in \Theta(H)$ et par le même argument que dans la preuve du théorème 4.2, on conclut que $M_{J,A,B}$ est spectraloide.

Remerciements. Je tiens à remercier le référé qui a suggéré des améliorations à ce travail.

REFERENCES

[1] F. F. Bonsall, J. Duncan. Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and Elements of Normed Algebras. London Math. Soc. Lecture Note Series 2, Cambridge, 1973.

[2] S. L. Campbell. Linear operators for which T^*T and $T + T^*$ commute. *Pacific J. Math.* **76** (1978), 17–19.

[3] S. L. Campbell, R. Gellar. Linear operators for which T^*T and $T^* + T$ commute. *Proc. Amer. Math. Soc.* **60** (1976), 197–202.

[4] C. K. Fong, A. R. Sourour. On the operator identity $\sum A_k X B_k = 0$. *Canad. J. Math.* **31** (1979), 845–857.

[5] P. R. Halmos. A Hilbert Space Problem Book. Second edition, Springer-Verlag, New York, 1982.

[6] D. Kečkić. Orthogonality of the range and the kernel of some elementary operators. *Proc. Amer. Math. Soc.* **128**, *11* (2000), 3369–3377.

[7] L. Fangyan. Normality of elementary operators. *Acta Anal. Funct. Appl.* **4**, *2* (2002), 118–123.

[8] L. A. Fiaikow. Structural properties of elementary operators. Proc. Inter. Workshop, 1991.

[9] B. Magajna. On subnormality of generalized derivation and tensor products. *Bull. Austral. Math. Soc.* **31** (1985), 235–243.

[10] M. Mathieu. Spectral theory for multiplication operators on $\mathbb{C}^*$-algebras. *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A* **83** (1983), 231–249.

[11] I. C. Gohberg, M. G. Krein. Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators. Translations of Mathematical Monographs vol. **18**. Providence, RI, American Mathematical Society, 1969.

Département de mathématiques
Faculté des sciences Semlalia
40000 Marrakech, Morocco
e-mail : `m.amouch@ucam.ac.ma`

Received June 12, 2006
Revised May 19, 2008