ВЪРХУ НЯКОИ ТЕОРЕМИ ЗА СУМИРАНЕТО НА РАЗХОДЯЩИТЕ РЕДОВЕ

от Никола Обрешков

Нека е даден редът

$$a_0+a_1+a_2+\dots \tag{1}$$

с произволни реални или комплексни членове. Да означим с

$$S_n=a_0+a_1+\dots+a_n$$

парциалната $(n+1)$-ва сума и да образуваме последователно сумите

$$S_n^{(0)}=S_n,\ S_n^1,\ S_n^2,$$

получени по следния начин:

$$S_n^k=S_0^{k-1}+S_1^{k-1}+\dots+S_n^{k-1}. \tag{2}$$

Редът (1) се нарича сумируем с метода на Чезаро от ред k, накъсо (C, k)-сумируем, с сума S, ако редицата

$$s_n^{(k)}=\frac{S_n^k}{\binom{n+k}{k}}$$

клони към граница s, когато n расте неограничено. Употребява се и означението $(C, k)\text{-}\lim S_n=s$.

Да образуваме сега последователно редиците

$$h_n^{(0)}=S_n,\ h_n^{(1)},\ h_n^{(2)},\dots$$

дефинирани с

$$h_n^{(k)}=\frac{h_0^{(k-1)}+h_1^{(k-1)}+\dots+h_n^{(k-1)}}{n+1}.$$

Редът (1) се нарича сумируем от ред k по метода на Хьолдер, накъсо (H, k)-сумируем, с сума s, ако редицата $h_n^{(k)}$ е сходяща с граница S. Пише се и така: (H, k) — $\lim S_n=s$.

По една теорема на Knopp и Schnee, двете горни сумирания от един и същи ред са еквиваленти в смисъл, че ако редът (1) е (C, k)-сумируем с сума s, то той е и (H, k)-сумируем с същата сума и обратно. Тези сумирания се обобщават и за не цял ред. Именно редът (1) се нарича (C, k) сумируем с сума S, гдето k е произволно реално число по-голямо от -1, ако редицата

$$\sigma_n^k = \frac{S_n^{(k)}}{A_n^k}, \qquad S_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^k a_\nu, \quad A_n^k = \binom{n+k}{n},$$

е сходяща с граница s. Ако k е цяло число, то горните числа $S_n^{(k)}$ съвпадат с дефинираните с (2). Това обобщение е дадено от Knopp и Schapmann. Съответното обобщение на сумирането на Хьолдер е дадено от Hausdorff.

Редът (1) се нарича сумируем с метода на Poisson и Abel, или накъсо A — сумируем с сума s, ако редът

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

е сходящ за $0<x<1$ и сумата му клони към s, когато x клони към 1 растейки.

В 1896 г, Tauber открива следната теорема: ако редът (1) е A-сумируем и $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то той е сходящ. Тази теорема бе начало на редица изследвания за обръщане на сумируемостта, т. е. от сумируемостта на един ред по един метод при допълнителни условия да можем да съдим за неговата сходимост, които въпроси носят сега названието Тауберови проблеми. Относно сумирането на Чезаро Hardy доказва, че ако един ред е (C, k)-сумируем за някое k и $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, то той е сходящ. Условието $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ бе обобщено при реални редове от Landau с едностранното условие $a_n > -\frac{M}{n}$, $M>0$. Условията при Тауберовите проблеми са въобще от горния характер. В една работа А. Колмогоров установи следната теорема за редовете на Фурие: Ако

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

е реда на Фурие на интегруемата функция $f(x)$, който притежава празнини с условието $a_n = 0$, $n \neq \lambda_i$, $\lambda_1 < \lambda_2 \ldots$, $\lambda_n \to \infty$, $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > q > 1$, то той е почти навсякъде сходящ. В една работа в 1930 г. аз доказах, че тази теорема е следствие от нов вид теореми за обръщане на сумируемостта при предположение на съществуване на празнини. Именно с прости средства установих следната теорема. Ако редът с празнини

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \; a_n = 0, \; n \neq \lambda_i, \; i = 1, 2, 3, \ldots, \; \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots, \lambda_n \to \infty, \; \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > q > 1,$$

е (C, k)-сумируем за някое k, то той е сходящ. Нека отбележа, че по-рано Hardy и Littlewood са установили следната теорема: Нека $\{\lambda_n\}_1^{\infty}$ е редица с свойството

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > q > 1, \ \lambda_n \to \infty$$

и редът $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ да е сходящ за $s > 0$. Тогава от $\lim_{s \to 0} f(s) = A$ следва и $\sum_1^{\infty} a_n$ е сходящ с сума A. Скоро след моята работа се появиха аналогични изследвания на Zygmund за сумирането на Borel и на Okada за сумирането на Euler. По-късно в този ред на изследвания W. Meyer-König (1939) доказа с доста комплициран начин следната теорема: Нека $\{\lambda_i\}$, $\{\lambda'_i\}$ са две редици от индекси

$$\lambda_i < \lambda'_i \leqq \lambda_{i+1}, \ \frac{\lambda'_i}{\lambda_i} > q > 1$$

и за един ред $\sum_0^{\infty} a_n$ и едно $M > 0$ да имаме, $n > N$,

$$a_n > -\frac{M}{n}$$

ако $\lambda_i < n \leqq \lambda'_i$. Освен това за $S_n = \sum_0^n a_i$ да имаме

$$S_n = O(1), \ \lambda'_i < n \leqq \lambda_{i+1}.$$

Тогава от $\lim_{n \to \infty} s_n^{(k)} = s$, $\lambda_i < n \leqq \lambda'_i$ (k цяло положително) следва

$$\lim_{n \to \infty} S_n = s,$$

гдето n преминава в натурален ред интервалите $[\lambda_i(1+\varepsilon), \lambda'_i(1-\varepsilon)]$, т. е. взема стойностите $\lambda_i(1+\varepsilon) \leqq n \leqq \lambda'_i(1-\varepsilon)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, $\varepsilon > 0$. За сумирането на Hausdorff този автор успява да получи точна теорема,

В настоящата си работа доказвам общи теореми за обръщане съдържащи в частност получените по-рано от други автори резултати, като въвеждам и нов вид условия. При нашите теореми са използувани функции $\varphi(x)$, положителни за $x > a$ и удовлетворящи на условието (за всяко $\lambda > 0$),

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(\lambda x)}{\varphi(x)} = \lambda^m, \tag{3}$$

гдето m е едно произволно реално число, както и редици от положителни числа p_n, удовлетворяващи на подобното условие

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_{[\lambda n]}}{p_n} = \lambda^m. \tag{4}$$

Главните, получени от мен резултати, са следните:

1. Нека $f(x)$ е реална функция, дефинирана за $x > a$ и нека $\{n_k\}_1^{\infty}$, и $\{n'_k\}_1^{\infty}$ са с две редици от неограничено растящи числа, като

$$n_k < n'_k \leqq n_{k+1}, \quad \frac{n'_k}{n_k} > 1+\delta, \quad k=1, 2, \ldots,$$

гдето $\delta > 0$ е фиксирано число. Нека в интервалите (n_k, n'_k) функцията $f(x)$ да допуска n-та производна $f^{(n)}(x)$, удовлетваряваща за тези стойности на x на неравенствата

$$f^{(n)}(x) > -Mx^{-n}\varphi(x), \tag{5}$$

гдето $\varphi(x)$ е от горния тип, удовлетворяваща на (3) и освен това монотонна. Да предположим още, че за $f(x)$ имаме

$$f(x) \sim A\varphi(x),$$

когато x преминава интервалите (n_k, n'_k). Нека $\varepsilon > 0$ е произволно малко число. Тогава при $x \to \infty$, като това променливо взема стойностите от интервалите $n_k(1+\varepsilon) \leqq x \leqq (1-\varepsilon)n'_k$, ще имаме

$$f^{(i)}(x) \sim Am(m-1)(m-2)\ldots(m-i+1)x^{-i}\varphi(x), \quad 0 < i < n-1. \tag{6}$$

1'. Нека $f(x)$ удовлетворява на условията на предната теорема, като условието (5) е заместено с условието

$$|\, f^{(n)}(x) \,| < M'x^{-n}\varphi(x),$$

за $n_k \leq x \leq n'_k$, $k=1, 2, \ldots$, M' бидейки една константа. Тогава ще имаме равенствата (6), като x взема за стойности тези от интервалите

$$n_k \leqq x \leqq n'_k, \quad k=1, 2, 3, \ldots$$

2. Нека $f(x)$ е реална функция, дефинирана за $x > a$ и $\{n_k\}_1^\infty$, $\{n'_k\}_1^\infty$ да са две редици от реални числа, дефинирани в теорема 1. Нека $f(x)$ до допуска в интервалите $n_k \leqq x \leq n'_k$, $k=1, 2, 3, \ldots$, n-та производна, която е монотонна в тях в еднакъв смисъл във всички интервали и при $x \to \infty$, преминавайки предните интервали, да имаме

$$f(x) \sim A\varphi(x).$$

Тогава, когато x преминава интервалите $n_k(1+\varepsilon) \leqq x \leqq n'_k(1-\varepsilon)$, $k=1, 2, 3, \ldots$, $\varepsilon > 0$ бидейки произволно малко число, при $x \to \infty$ ще имаме

$$f^{(n)}(x) \sim Am(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{-n}\varphi(x).$$

За редиците от числа́ установявам аналогични теореми.

3. Нека $\{a_n\}_1^\infty$ е една произволна реална редица и $\{\lambda_i\}_1^\infty$, $\{\lambda'_i\}_1^\infty$ са две редици от цели числа

$$\lambda_i < \lambda'_i, \quad \frac{\lambda'_i}{\lambda_i} > q > 1, \quad i=1, 2, 3, \ldots,$$

и нека $\{p_n\}_1^\infty$ е една редица, удовлетворяваща на (4), която в интервалите $\lambda_i < n \leq \lambda'_i$, $i=1, 2, 3, \ldots$ е монотонна в еднакъв смисъл за всички от тях. Нека за едно k да имаме

$$\Delta^k a_n > -Mn^{-k}p_n, \quad M > 0,$$

за всички n от интервалите $\lambda_i < n \leq \lambda'_i$ и освен това

$$a_n \sim Ap_n,$$

когато n расте неограничено, вземайки стойности от интервалите $\lambda_i < n \leq \lambda'_i$, $i=1, 2, 3, \ldots$ Тогава за $n \to \infty$, преминавайки интервалите $\lambda_i(1+\varepsilon) \leq n \leq \lambda'_i(1-\varepsilon)$, $i=1, 2, 3, \ldots$ (ε бидейки произволно малко число) ще имаме също

$$\Delta^p a_n \sim Am(m-1)\ldots(m-p+1)n^{-p}p_n, \quad 1 \leq i \leq k-1.$$

4. Нека $\{a_n\}_1^\infty$ е реална редица, като в интервалите (λ_i, λ'_i), които са дефинирани в предната теорема, имаме (при $n \to \infty$)

$$a_n \sim Ap_n, \quad \lambda_i < n \leq \lambda'_i, \quad i=1, 2, 3, \ldots$$

Нека освен това редицата $\{p_n\}$ е монотонна в горните интервали в еднакъв смисъл в всичките. Тогава, когато n клони към ∞, преминавайки интервалите $\lambda_i(1+\varepsilon) \leq n \leq \lambda'_i(1-\varepsilon)$, $i=1, 2, 3, \ldots$, гдето $\varepsilon > 0$ е произволно малко число, ще имаме

$$\Delta^k a_n \sim Am(m-1)\ldots(m-k+1)n^{-k}p_n.$$

Като вземем под внимание, че

$$\Delta S_n^k = S_n^k - S_{n-1}^k = S_n^{k-1}, \ \Delta^2 S_n^k = S_n^{k-2}, \ldots$$

изложените теореми за редиците се свеждат за теореми за средните на Чезаро. В частни случаи получаваме теореми от тауберов характер, но отнасящи се за редове с условия с празнини.[1]

В втората част от работата се занимавам с едно прецизиране на една класична теорема на С. Бернщейн, отнасяща се за средните на Чезаро от първи ред на редовете на Фурие. Именно, нека $f(x)$ реална периодична функция с период 2π, интегруема, на която редът на Фурие е

$$f(x) \backsim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

В случай, че $f(x)$ удовлетворява на условието на Липшиц

$$|f(x+h)-f(x)| < M|h|^\alpha, \ 0 < \alpha \leq 1,$$

за всяко x, то по Бернщейн за средните $\sigma_n(x)$

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}(S_0+S_1+\ldots+S_n), S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x,$$

за всяко x имаме

$$|\sigma_n(x)-f(x)| < \frac{M}{n^\alpha} \text{ при } 0 < \alpha < 1,$$

$$|\sigma_n(x)-f(x)| < M\frac{\log n}{n} \text{ при } \alpha = 1,$$

[1] Част от настоящата работа е докладвана в конгреса на унгарските математици в Будапеща в 1950 г., който доклад ще излезе в изданията на конгреса.

като M е константа, независяща от n. Тук установявам при $\alpha<\frac{1}{2}$ по-точното неравенство:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}(S_\nu-f(x))^2<M_1 n^{-2\alpha},$$

гдето M_1 е константа, независяща от n. Това неравенство не е въобще в сила при $\alpha\geqq\frac{1}{2}$.

1. Гранични равенства за функции

Една положителна функция $\varphi(x)$, дефинирана за $x>a$, наричаме с правилна растимост, ако за всяко число $\lambda>0$ имаме

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(\lambda x)}{\varphi(x)}=\lambda^m, \tag{1}$$

гдето m е едно произволно реално число. Ще докажем сега следната теорема:

1. Нека $f(x)$ е реална функция, дефинирана за $x>a$ и нека $\{n_k\}_1^\infty$ и $\{n'_k\}_1^\infty$ са две редици от неограничено растящи реални числа като $(n_k<n'_k<n_{k+1}, \frac{n'_k}{n_k}>1+\delta$, гдето $\delta>0$ е фиксирано число. Нека в интервалите (n_k, n'_k), $k=1, 2,\ldots$ функцията $f(x)$ да допуска n-та производна, удовлетворяваща за тези стойности на x на неравенството

$$f^{(n)}(x)>-Mx^{-n}\varphi(x),\quad M>0, \tag{2}$$

гдето $\varphi(x)$ е функция с правилна растимост и монотонна и за $f(x)$ да имаме

$$f(x)\sim A\varphi(x), \tag{3}$$

при $x\to\infty$, x оставайки в интервалите (n_k, n'_k). Нека $\varepsilon>0$ е произволно малко число. Тогава при $x\to\infty$, като x взема стойности от интервалите $n_k(1+\varepsilon)\leqq x\leqq n'_k(1-\varepsilon)$, ще имаме

$$f^{(i)}(x)\sim Am(m-1)(m-2)\ldots(m-i+1)\,x^{-i}\varphi(x),\quad 0<i\leqq n-1. \tag{4}$$

Нека $a_1, a_2,\ldots,a_{n-1}$ са произволни реални числа, наредени по растяща стойност, като $a_{n-1}<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Да положим $x_i=x+a_i x$, предполагайки, че x лежи в един кой да е интервал (n_k, n'_k). Доказахме преди формулата

$$\omega(f;\, x,\, x_1,\, x_2,\ldots,x_{n-1})= \tag{5}$$

$$=\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}-(n-1)x}{n!}f^{(n)}(\zeta),$$

гдето $x<\zeta<x_{n-1}$. Нека $\varphi(x)$ е ненамаляваща функция. Имаме тогава

$$f^{(n)}(\zeta)>-M\zeta^{-n}\varphi(\zeta)>-Mx^{-n}\varphi(x+a_{n-1}x).$$

Понеже

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x+\lambda_{n-1}x)}{\varphi(x)}=(1+a_{n-1})^m,$$

то ще имаме

$$f^n(\zeta)>-M_1x^{-n}\varphi(x), \tag{6}$$

гдето M_1 е положителна константа. Подобно неравенство имаме и при $\varphi(x)$ нерастяща. От (5) получаваме тогава

$$\frac{x^{n-1}f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\,\varphi(x)}<\frac{x^{n-1}\omega(f;\ x,\ x_1,\ldots,x_{n-1})}{\varphi(x)}+M_1\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n!}. \tag{7}$$

Но имаме

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-1}\omega(f;\ x,\ x_1,\ldots,x_{n-1})}{\varphi(x)}=A\omega[(1+x)^m;\ 0,\ a_1,\ a_2,\ldots,a_{n-1}].$$

Следователно, от (7), при $x\to\infty$, получаваме

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\,\varphi(x)}\leq A\omega[(1+x)^m;\ 0,\ a_1,\ a_2,\ldots,a_{n-1}]$$
$$+M_1\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n!}.$$

Като поставим тук $a_i\to 0$, $1\leq i\leq n-1$, получаваме

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\ x^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(x)}{\varphi(x)}\leq Am(m-1)\ldots(m-n+2). \tag{8}$$

Нека сега $a_0, a_1, a_2,\ldots,a_{n-2}$ са отрицателни числа, наредени по растящи стойности, като $a_0>-\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ и $a_{n-1}=0$. Ако поставим $x_i=x+a_ix$ при $x>N$ ще имаме (5) и както по-горе се убеждаваме, че

$$f^{(n)}(\zeta)>-M_2x^{-n}\varphi(x), \tag{9}$$

като M_2 е положителна константа. От (5) и (9) ще имаме

$$\frac{x^{n-1}f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\,\varphi(x)}>\frac{x^{n-1}\omega(f;\ x_0,\ x_1,\ldots,x_{n-1})}{\varphi(x)}+\frac{M_2(a_0+a_1+\cdots+a_{n-2})}{n!},$$

отгдето, при $x\to\infty$, получаваме

$$\underline{\lim_{x\to\infty}}\ x^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\,\varphi(x)}\geq A\omega[(1+x)^m;\ a_0,\ a_1,\ldots,a_{n-1}]+$$
$$+M_2\frac{a_0+a_1+\cdots+a_{n-2}}{n!}.$$

Като поставим $a_i\to 0$, $0\leq i\leq n-2$, имаме

$$\lim_{\overline{x\to\infty}} x^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(x)}{\varphi(x)} \geq Am(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2). \tag{10}$$

От (8) и (10) следва, че ще имаме

$$\lim_{\overline{x\to\infty}} x^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(x)}{\varphi(x)} = Am(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2),$$

с което последното равенство от (4) е установено. Другите равенства от (4) следват непосредствено от тук.

2. **Нека функцията $f(x)$ удовлетворява на условията на предната теорема, като, обаче, условието (2) е заместено с условието**

$$|f^{(n)}(x)| < M' x^{-n}\varphi(x)$$

за $n_k \leq x \leq n'_k$, $k \geq 1$, M' **бидейки една константа. Тогава ще имаме равенствата (4) като x взема за стойности тези от интервалите** (n_k, n'_k), $k \geq 1$.

Нека, например, предположим, че $n_k \leq x \leq n'_k(1-\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ произволно малко число и да изберем положителните числа $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ както преди и да положим $x_i = x + a_i x$. Тогава имаме формулата (5), като лесно получаваме, че

$$|f^{(n)}(\zeta)| < M_3 \frac{\varphi(x)}{x^n},$$

гдето $M_3 > 0$ е константа. От (5) ще имаме тогава

$$\left| \frac{x^{n-1} f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\,\varphi(x)} - \frac{x^{n-1}\omega(f;\, x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}{\varphi(x)} \right| < M_3 \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n!},$$

т. е.

$$-M_3 \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n!} < \frac{x^{n-1} f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\,\varphi(x)} - \frac{x^{n-1}\omega(f;\, x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}{\varphi(x)}$$

$$< M_3 \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n!}.$$

Оттук както по-горе получаваме лесно, че

$$\lim_{x\to\infty} x^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(x)}{\varphi(x)} = Am(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2). \tag{11}$$

Ако имахме $n_k(1+\varepsilon) \leq x \leq n'_k$, то избираме числата $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ да са отрицателни, както преди, като най-малкото $a_0 > -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ и най-голямото a_{n-1} е равно на нула. Тогава, следвайки горния път, получаваме същото равенство (11). Но тогава за $f^{(n-1)}(x)$ ще имаме

$$|f^{(n-1)}(x)| < M_4 \frac{\varphi(x)}{x^{n-1}}$$

и, на основание на доказаното, ще имаме при $x\to\infty$, $n_k\leqq x\leqq n'_k$,

$$f^{(n-2)}(x)\sim Am(m-1)(m-2)\dots(m-n+3)x^{-n+2}\varphi(x)$$

и т. н.

3. Нека $f(x)$ е реална функция, дефинирана за $x>a$ и $\{n_k\}_1^\infty$, $\{n'_k\}_1^\infty$ да са две редици от реални числа, дефинирани в теорема 1. Да предположим, че $f(x)$ допуска в интервалите $n_k<x\leqq n'_k$, $k\geqq 1$, n-та производна, която е монотонна в тях в еднакъв смисъл във всички интервали и при $x\to\infty$ преминавайки предните интервали да имаме

$$f(x)\sim A\varphi(x). \tag{12}$$

Тогава, когато x преминава интервалите

$$n_k(1+\varepsilon)<x\leqq n'_k(1-\varepsilon),\ \varepsilon>0,$$

бидейки произволно малко число, при $x\to\infty$ ще имаме

$$f^{(n)}(x)\sim Am(m-1)\dots(m-n+1)x^{-n}\varphi(x). \tag{13}$$

Нека $f^{(n)}(x)$ е ненамаляваща за $n_k<x<n'_k$, $k\geqq 1$. Нека a_0, $a_1,\dots,a_{n-1}$, a_n са $n+1$ произволни положителни числа, наредени по растящи стойности, $a_n<\frac{1}{1-\varepsilon}$. Като поставим $y_i=a_ix$, имаме познатата формула

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{f(y_i)}{F'(y_i)}=\frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!},\ x<\zeta<y_n,$$

отдето получаваме

$$\frac{x^nf^{(n)}(x)}{n!\,\varphi(x)}\leqq\sum_{i=0}^{n}\frac{x^nf(y_i)}{\varphi(x)F'(y_i)}.$$

За a_i, $1\leqq i\leqq n$, фиксирани, получаваме оттук

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{x^nf^{(n)}(x)}{\varphi(x)}\leqq\omega(x^m;\ a_0,\ a_1,\dots,a_n).$$

Като поставим тук $a_i\to 1$, $1\leqq i$ получаваме

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{x^nf^{(n)}(x)}{\varphi(x)}\leqq Am(m-1)\dots(m-n+1). \tag{14}$$

Нека сега числата a_0, $a_1,\dots,a_{n-1}=1$ да са растящи и избрани по начин, че

$$a_0>\frac{1}{1+\varepsilon}.$$

Ще имаме

$$\frac{x^n f^{(n)}(x)}{n!\,\varphi(x)} \geqq \sum_{i=0}^{n} \frac{x^n f(y_i)}{\varphi(x) F'(y_i)},$$

отгдето, при фиксирани a_i, получаваме

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{x^n f^{(n)}(x)}{\varphi(x)} \geqq A\omega(x^m;\ a_0,\ a_1, \ldots, a_n).$$

Поставяйки тук $a_i \to 1$, $0 \leqq i < n-1$, получаваме

$$\varliminf_{x\to+\infty} \frac{x^n f^{(n)}(x)}{\varphi(x)} \geqq Am(m-1)\ldots(m-n+1). \tag{15}$$

Равенството (13) следва от (14) и (15).

От теоремите 1. и 3. следват следните теореми:

Нека $f(x)$ е реална функция, която допуска за $x > a$ производна $f^{(n)}(x)$, която за тези стойности на x удовлетворява на неравенството

$$f^{(n)}(x) > -Mx^{-n}\varphi(x),$$

дето $\varphi(x)$ е една функция положителна и монотонна, с правилна растимост. Нека освен това за $x \to \infty$ да имаме

$$f(x) \sim A\varphi(x).$$

Тогава при $x \to \infty$ имаме

$$f^{(i)}(x) \sim Am(m-1)\ldots(m-i+1)x^{-i}\varphi(x),\quad 1 \leqq i \leqq n-1.$$

Нека $f(x)$ е реална функция, която допуска n-та производна за $x > a$, като $f^{(n)}(x)$ е монотонна за тези стойности на x. Нека за $x \to \infty$ да имаме

$$f(x) \sim A\varphi(x),$$

гдето $\varphi(x)$ е положителна с правилна растимост функция. Тогава за $x \to \infty$ имаме

$$f^{(n)}(x) \sim Am(m-1)\ldots(m-n+1)x^{-n}\varphi(x).$$

Тези теореми установих[1] по-рано в две публикации.

2. Гранични равенства за редици

Една редица от реални положителни числа $\{p_n\}_1^\infty$ ще наричаме с правилна растимост, ако за всяко $\lambda > 0$ имаме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{[\lambda n]}}{p_n} = \lambda^m, \tag{a}$$

гдето m е реално число. Ще установим сега аналогични теореми за реалните редици.

---

[1] Н. Обрешков 1. Годишник на Соф. университет. 45, 1948—49, стр. 39—61. 2. Доклады Академии наук СССР. 62, 1949, 225—228.

4. Нека $\{a_n\}_1^\infty$ е произволна реална редица и $\{\lambda_n\}_1^\infty$, $\{\lambda'_n\}_1^\infty$ са две редици от цели числа

$$\lambda_n < \lambda'_n, \quad \lambda'_n \leq \lambda_{n+1}, \quad \frac{\lambda'_n}{\lambda_n} \geq \delta > 1,$$

и нека $\{p_n\}_1^\infty$ е една редица с правилна растимост, която в интервалите $\lambda_i < n \leq \lambda'_i$, $i=1, 2, \ldots$ е и монотонна в еднакъв смисъл за всички от тях. Нека за едно k да имаме

$$\Delta^k a_n > -Mn^{-k}p_n, \quad \Delta^s a_n = \Delta^{s-1}a_n - \Delta^{s-1}a_{n-1}, \tag{1}$$

за всички n от интервалите $\lambda_i < n \leq \lambda'_i$ и освен това

$$a_n \sim Ap_n, \tag{2}$$

когато n расте неограничено, вземайки стойности от интервалите $\lambda_i < n \leq \lambda'_i$. Тогава за $n \to \infty$, преминавайки интервалите $\lambda_i(1+\varepsilon) \leq n \leq \lambda'_i(1-\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ бидейки произволно малко число, ще имаме също

$$\Delta^i a_n \sim Am(m-1)(m-2)\ldots(m-i+1)n^{-i}p_n, \quad 1 \leq i \leq k-1. \tag{3}$$

Доказателството е подобно на това на теорема 1. Нека

$$a_0 = 1, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1} \tag{4}$$

са произволни растящи положителни числа, като $a_{k-1} < \frac{1}{1-\varepsilon}$.

Да поставим

$$n_i = [na_i], \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k-1.$$

Доказахме по-рано формулата

$$\omega(a; n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}) = \frac{\Delta^{k-1}a_n}{(k-1)!} + \left[n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1} - \right.$$
$$\left. -(k-1)n - \frac{k(k-1)}{2}\right]\frac{A'}{k!}, \tag{5}$$

гдето $\Delta^k a_n \leq A' \leq \Delta^k a_{n_{k-1}}$. На основание на (1), като преди установяваме, че (p_n, например, е предположена монотонно растяща),

$$A' > -M_1 n^{-k} p_n,$$

гдето M_1, е положителна константа. От (5) ще имаме

$$\frac{n^{k-1}\Delta^{k-1}a_n}{(k-1)!p_n} < \frac{n^{k-1}\omega(a; n_0, n_1, \ldots, n_{k-1})}{p_n} +$$
$$+ \left[n_1 + n_2 +, \ldots, n_{k-1} - (k-1)n - \frac{k(n-1)}{2}\right]\frac{M'}{nk!} \tag{6}$$

гдето M_1 е константа. От (6) имаме тогава

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^{k-1}\Delta^{k-1}a_n}{(k-1)!p_n} \leq A\omega(x^m;\ a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}) + \\ + \frac{M_1}{k!}(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}-k+1),$$

отгдето, както преди, получаваме

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^{k-1}\Delta^{k-1}a_n}{p_n} \leq Am(m-1)\ldots(m-k+2). \tag{7}$$

Нека сега (4) са положителни растящи числа, като $a_0 > \frac{1}{1-\varepsilon}, a_{k-1}=1$.

Ще имаме формулата (5) и доказваме по същия начин, че

$$A' > -M_2 n^{-k} p_n, \tag{8}$$

гдето M_2 е положителна константа. От (4) и (8) следва, че

$$\frac{n^{k-1}\Delta^{k-1}a_n}{(k-1)!p_n} > \frac{n^{k-1}}{p_n}\omega(a;\ n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}) + \\ + \left[n_0+n_1+ \qquad +n_{k-2}-(k-1)n - \frac{k(k-1)}{2}\right]\frac{M_2}{nk!},$$

отгдето, като преди, получаваме

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^{k-1}\Delta^{k-1}a_n}{(k-1)!p_n} \geq A\omega(x^m;\ a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}) + \\ + \frac{M_2}{k!}(a_0+a_1+\cdots+a_{k-2}-k+1).$$

Като поставим тук $a_i \to 1$, получаваме

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^{k-1}\Delta^{k-1}a_n}{p_n} \geq Am(m-1)\ldots(m-k+2). \tag{9}$$

От формулите (7) и (9) следва, че

$$\Delta^{k-1}a_n \sim Am(m-1)\ldots(m-k+2)n^{-k+1}p_n$$

и равенството (3) за $i=k-1$ е установено. Останалите от (3) следват непосредствено. Доказателството при p_n не растяща е също.

5. Нека $\{\lambda_i\}$, $\{\lambda'_i\}$ са две редици от цели положителни числа от типа, разглеждан в предната теорема е нека $\{a_n\}$ е една редица от реални числа, за които имаме

$$a \sim Ap_n,\ \lambda_i < n \leq \lambda'_i,\ i=1, 2, 3, \ldots,\ n\to\infty, \tag{10}$$

гдето p_n е положителна редица, удовлетворяваща на (a). Да предположим, че за едно k редицата $\Delta^k a_n$ е момотонна в еднакъв смисъл във всички интервали $\lambda_i < n \leq \lambda'_i$, $i=1, 2, 3, \ldots$ и нека $\varepsilon > 0$ е произволно малко число. Тогава за $\lambda_i(1+\varepsilon) \leq n \leq \lambda'_i(1-\varepsilon)$; $i=1, 2, 3,$ ще имаме

(11) $$\Delta^k a_n \sim Am(m-1)\dots(m-k+1)n^{-k}p.$$

Нека, например, p_n е ненамаляваща редица. Да означим с

(12) $$a_0,\ a_1, \dots,\ a_{k-1},\ a_k$$

$(k+1)$ — реални числа, наредени по растяща стойност, и такива, че $a_0=1$, $a_k<\frac{1}{1-\varepsilon}$.

Имаме по една по-рано от нас установена формула

(13) $$\sum_{i=0}^{k} \frac{a_{n_i}}{F'(n_i)} = \frac{A}{k!},\quad n_i=[na_i],$$

гдето

$\min(\Delta^k a_{n_0+k}, \Delta^k a_{n_0+k+1}, \dots, \Delta^k a_{n_k}) < A \leq \max(\Delta^k a_{n_0+k}, \qquad \Delta^k a_{n_k})$.

От (13) получаваме

$$\frac{n^k \Delta^k a_n}{k!\,p_n} < \sum_{i=0}^{k} \frac{n^k a_{n_i}}{p_n F'(n_i)},$$

отгдето, при фиксирани a_i, имаме

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{n^k \Delta^k a_n}{k!\,p_n} \leq A\omega(x^m; a_0, a_1, a \dots, a_k).$$

Като поставим тук $a_i \to 1$ получаваме

(14) $$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{n^k \Delta^k a_n}{p_n} \leq Am(m-1)\dots(m-k+1).$$

Ако изберем числата (12) по начин, че $a_0 > \frac{1}{1+\varepsilon}$, $a_k=1$ ще получим по същия начин

(15) $$\varliminf_{n\to\infty} \frac{n^k \Delta^k a_n}{p_n} \geq Am(m-1)\dots(m-k+1).$$

От (14) и от (15) следва веднага формулата (11).

В частност получаваме непосредствено следните по-раншни наши резултати:

Нека $\{a_n\}^\infty$ е реална редица, удовлетворяваща на условията

$$a_n \sim Ap_n(n\to\infty),\quad \Delta^k a_n > -Mn^{-k}p_n,$$

за едно цяло $n>0$ и $n>N$ като p_n е една редица от положителни числа, удовлетворяващи на (a) и освен това монотонна за $n>N$. Тогава имаме

$$\Delta^i a_n \sim Am(m-1)\dots(m-i+1)n^{-i}p_n,\quad 1\leq i<k-1.$$

Нека $\{a_n\}_1^\infty$ е реална редица, за която редицата $\Delta^k a_n$ е монотонна за едно цяло число $k>0$. Да допуснем, освен горното, че за $n\to\infty$ имаме

$$a_n \sim Ap_n,$$

гдето p_n е положителна редица, удовлетворяваща на (a). Тогава за $n \to \infty$ имаме

$$\Delta^k a_n \sim Am(m-1)\ldots(m-k+1)n^{-k}p_n.$$

3. Някои приложения

Да разгледаме сега приложения на предните ни теореми за сумирането на Чезаро. Редът

(1) $$a_0+a_1+a_2+\ldots$$

се нарича сумируем с аритметичните средни на Чезаро от ред $k>-1$, накъсо (C, k)-сумируем, с сума s, ако редицата s_n^k,

$$s_n^k=\frac{1}{A_n^k}\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^k a_\nu, A_n^k=\frac{\Gamma(n+k-1)}{n!\,\Gamma(k+1)}=\frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)}{n!},$$

е сходяща с граница s. Ако означим $S_n^{(k)}=s_n^k A_n^k$, то имаме

$$S_n^{(k)}=S_0^{(k-1)}+S_1^{(k-1)}+\ldots+S_n^{(k-1)},$$

отгдето следва, че $S_n^{(k-1)}=\Delta S_n^{(k)}$. Следователно, при k цяло, ще имаме

$$\Delta^k S_n^{(k)}=S_n=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu, \quad \Delta^{k+1}S_n^{(k)}=a_n.$$

Като приложим теорема 4. за случая $p_n=A_n^k\sim\frac{n^k}{\Gamma(k+1)}$, получаваме теоремата:

7. Нека $\{\lambda_i\}$, $\{\lambda'_i\}$ са две редици от цели положителни числа, неограничено растящи и такива, че

$$\lambda_i<\lambda'_i\leqq\lambda_{i+1}, \quad \frac{\lambda'_i}{\lambda_i}\geqq\theta>1$$

и да допуснем, че за едно цяло число k за редът (1) имаме $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^k=s$, когато n взема за стойности числата от интервали $\lambda_i<n\leqq\lambda'_i$ и че $a_n>-Mn^{-1}$ за всички тези стойности на n, гдето M е константа. Тогава парциалните суми S_n на реда (1) са сходящи към s за за всички n от интервала $\lambda_i(1+\varepsilon)\leqq n\leqq\lambda'_i(1-\varepsilon)$, $i=1, 2, 3,\ldots$, гдето $\varepsilon>0$ е произволно малко число. Същото е в сила и за средните $s_n^{(i)}$, $i=1, 2, 3,\ldots, k-1$.

Ако в предната теорема заместим условието $a>-Mn^{-1}$ с условието $a_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$, то средните $s_n^{(i)}$, $i=0, 1, 2, 3,\ldots, k-1$, клонят към s за всички $\lambda_i<n\leqq\lambda'_i$.

Теоремата 7. съдържа резултата на W. Mayer-König[1] който допуска допълнителното силно ограничение, че $S=O_n(1)$ при $\lambda'_i<n\leq\lambda_{i+1}$.

В частност от 7 се получава и теоремата ми за редове с празнини, които споменах в началото.

Нека $\{\lambda_i\}$, $\{\lambda'_i\}$ са две редици от разгледания вид и да предположим, че средните на Чезаро $S_n^{(k+m)}$ за едно цяло число $m>0$ са сходящи към s, когато n взема стойностите $i=1, 2, 3, \ldots$ $\lambda_i<n\lambda'_i$, и че $s_n^{(k)}$ за едно $k>-1$ са ограничени от едната страна, $s_n^{(k)}>-M$ за същите стойности на n. Тогава средните $s_n^{(i)}$, $i=k+1, k+2, \ldots, k+m-1$, са сходящи към границата s, когато n преминава интервалите

$$\lambda_i(1+\varepsilon)\leq n\leq\lambda'_i(1-\varepsilon),$$

гдето $\varepsilon>0$ е произволно малко число. Този резултат обобщава една известна теорема на Doetsch. За доказателството ѝ се прилага теорема 4. за $p_n=A_n^{k+m}$.

Изобщо, като вземем под внимание релацията $S_n^{(k-m)}=\Delta^m S_n^{(k)}$, виждаме, че теоремите от § 2 се отнасят в същност за средните на Чезаро.

Нека $f(x)$ е сумируема функция за $x\geqq a$ в всеки краен интервал и да разгледаме формално написания интеграл

$$\int_a^\infty f(x)dx. \tag{2}$$

Аналогичните средни на Чезаро за интеграла (2) от ред $k>0$ се дефинират с

$$\mu_k(x)=\Gamma(k+1)x^{-k}\sigma_k(x),\quad \sigma_k(x)=\frac{1}{\Gamma(k+1)}\int_a^x (x-t)^k f(t)dt,$$

Ако $\mu_k(x)$ клони към определена граница s, когато x расте неограничено, казваме, че интегралът (2) е сумируем от ред k със сума s или, накъсо, (C, k)-сумируем със сума s. Имаме равенствата

$$\sigma'_k(x)=\sigma_{k+1}(x),\quad \sigma''_k(x)=\sigma_{k-2}(x),\ldots$$

Оттук веднага се вижда, че теоремите от § 1 веднага се свеждат на теореми за средните на Чезаро на интегралите. За пример ще посочим следната теорема от Тауберов характер при празнини.

Нека $\{n_k\}$, $\{n'_k\}$ са две редици от реални числа, удовлетворяващи на условията

$$n_k<n'_k\leq n_{k+1},\quad \frac{n'_k}{n_k}>q>1.$$

---

[1] W. Mayer-König Mathematische Zeitschrift 45, 1939, 447—478.

[2] N. Obrechkof-Töhoku Math. Journal, 32, 1930, 231—233.

Нека $f(x)$ е реална функция, интегруема за $x \geq a$ в всеки краен интервал и за $x \to \infty$, $n_k \leq x \leq n'_k$, $k=1, 2, 3, \ldots$ да удовлетворява условието

$$f(x) > -\frac{M}{x}.$$

Да предположим, че средните $\mu_p(x)$ на интеграла от цял ред p да клонят към определена граница s, когато x растейки неограничено преминава интервалите $n_k \leq x \leq n'_k$. Тогава за $x \to \infty$ $n_k(1+\varepsilon) \leq x \leq n'_k(1-\varepsilon)$, гдето $\varepsilon > 0$ е произволно малко число, ще имаме

$$\lim \int_a^x f(t)dt = s. \tag{3}$$

Ако условието $f(x) > -\frac{M}{x}$ е заместено с условието $f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$, то граничното равенство е верно за всички x, $n_k \leq x \leq n'_k$, $k=1, 2, 3, \ldots$

4. Върху приближенията на функциите с парциалните суми на редовете им на Фурие

Нека $f(x)$ е една реална функция, периодична с период 2π и нека

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{1}$$

е съотвествуващият ѝ ред на Фурие. Съветският академик С. Бернщейн установява следната важна теорема:

Ако $f(x)$ удовлетворява за всяко x на условието на Липшиц

$$|f(x+h) - f(x)| < K|x|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

то за средните на Чезаро от ред 1 за всяко x

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}(S_0 + S_1 + \cdots + S_n), \quad S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x,$$

имаме

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < M\frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{при} \quad 0 < \alpha < 1$$

и

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < M\frac{\log n}{n}, \quad \alpha = 1,$$

като M е константа, независяща от n. Ще установим сега за случая $\alpha < \frac{1}{2}$ по прецизно неравенство. Именно за всяко x имаме

$$(2) \qquad \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}(S_\nu - f(x))^2 < M_1 \frac{1}{n^{2\alpha}}, \quad 0<\alpha<\frac{1}{2},$$

като M_1 е константа, независяща от n

По известна формула имаме за S_n

$$(3) \qquad S_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{x-\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}} f(x+2t)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt.$$

От (3) ще имаме

$$S_n - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{x-\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}} [f(x+2t)-f(x)]\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t)-f(x)]\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt,$$

отгдето получаваме

$$A_n = \sum_{\nu=0}^{n}(S_\nu - f(x))^2 = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[f(x+2t)-$$

$$-f(x)][f(x+2u)-f(x)]\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\sin(2\nu+1)t\sin(2\nu+1)u}{\sin t\sin u}\,dt\,du.$$

За сумата

$$T = \sum_{\nu=0}^{n}\sin(2\nu+1)t\sin(2\nu+1)u$$

получаваме с лесни пресмятания

$$T=\frac{1}{4}\left[\frac{\sin(2n+2)(t-u)}{\sin(t-u)}-\frac{\sin(2n+2)(t+u)}{\sin(t+u)}\right]$$

и за A_n/n ще имаме

$$\frac{A_n}{n}=i_n+j_n,$$

$$i_n=\frac{1}{4\pi^2 n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[f(x+2t)-f(x)][f(x+2u)-$$

$$-f(x)]\frac{\sin(2n+2)(t-u)}{\sin t\sin u\sin(t-u)}\,dt\,du,$$

$$j_n=\frac{1}{4\pi^2 n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[f(x+2t)-f(x)][f(x+2u)-$$

$$-f(x)]\frac{\sin(2n+2)(t+u)}{\sin t\sin u\sin(t+u)}\,dt\,du.$$

Да разгледаме отначало интеграла i_n. Разделяме в i_n областта на интегриране на няколко подобласти. Да означим с Δ_n квадрата

$$\frac{1}{n}\leq t\leq\frac{1}{n},\quad -\frac{1}{n}\leq u\leq\frac{1}{n}.$$

Понеже

$$\left|\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right|\leq n,\quad |f(x+t)-f(x)|<K|t|^{\alpha},\quad \sin x>x\frac{2}{\pi},\quad 0<x\leq\frac{\pi}{2},$$

то за частта от интеграла по Δ_n ще имаме

$$|i_n'|=\left|\frac{1}{4\pi^2 n}\iint\limits_{\Delta_n}\right|<\frac{K_1}{\pi^2}\int_0^{\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}}t^{\alpha-1}u^{\alpha-1}\,dt\,du<K_2 n^{-2\alpha}.$$

Нека D_n е успоредника

$$\frac{1}{n}\leq t\leq\frac{\pi}{2},\quad t-\frac{1}{n}\leq u\leq t.$$

За интеграла i_n'' по него ще имаме

$$(4) \qquad |i_n''| < K_2 \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha-1} dt \int_{t-\frac{1}{n}}^{t} u^{\alpha-1} du.$$

Като вземем под внимание, че

$$\int_{t-\frac{1}{n}}^{t} u^{\alpha-1} du < \frac{1}{n}\left(t-\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}$$

от (4) ще имаме неравенството

$$|i_n'' < \frac{K_2}{n} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha-1}\left(t-\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} dt.$$

Със смяната $t=\frac{\tau}{n}$ получаваме

$$|i_n''| < K_2 \frac{1}{n^{2\alpha}} \int_{1}^{n\frac{\pi}{2}} \tau^{\alpha-1} \frac{d\tau}{(\tau-1)^{1-\alpha}},$$

отгдето следва, че

$$|i_n''| < K^2 \frac{1}{n^{2\alpha}} \int_{1}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}(\tau-1)^{1-\alpha}} < K_3 \frac{1}{n^{2\alpha}},$$

понеже интегралът в дясно е сходящ (по причина на условието $2\alpha < 1$).

За интеграла по триъгълника δ_n

$$\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq u \leq t-\frac{1}{n},$$

получаваме неравенството

$$|i_n'''| < K_3 \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha-1} dt \int_{0}^{t-\frac{1}{n}} u^{\alpha-2} \frac{du}{t-u}.$$

Със смяната на променливите $t=\frac{1}{n}T$, $u=\frac{1}{n}U$ това неравенство става

$$|i_n'''| < K_3 \frac{1}{n^{2\alpha}} \int_{1}^{n\frac{\pi}{2}} T^{\alpha-1} dT \int_{0}^{T-1} U^{\alpha-1} \frac{dU}{T-U} < K_3 \frac{1}{n^{2\alpha}} \int_{1}^{\infty} \frac{dT}{T^{1-\alpha}} \int_{0}^{T-2} \frac{dU}{U^{1-\alpha}(T-U)}.$$

За интегралите i_n^{IV} и i_n^{V} по успоредника $\frac{1}{n} < u \leq \frac{\pi}{2}$, $u - \frac{1}{n} \leq t < u$ и триъгълника $\frac{1}{n} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 < t < u - \frac{1}{n}$ подобно ще имаме

$$i_n^{\mathrm{IV}} = O(n^{-2\alpha}), \quad i_n^{\mathrm{V}} = O(n^{-2\alpha}),$$

като вземем под внимание, че тези интеграли преминават към разглежданите със смяна на променливите t и u по-между им. Интегралите взети по съответните успоредници и триъгълници в лежащи в квадрата $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq 0$, се третират аналогично, като вземем под внимание, че те преминават в подобни на първите със смяна на знака на u. Така за интеграла по триъгълника δ'_n, $\frac{1}{n} < t \leq \frac{\pi}{2}$, $-t + \frac{1}{n} \leq u \leq 0$ получаваме

$$|i_n^{\mathrm{VI}}| < K_4 \frac{1}{n} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha-1} dt \int\limits_{-t+\frac{1}{n}}^{0} |u|^{\alpha-1} \frac{du}{t-u} =$$

$$= K_4 \frac{1}{n} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha-1} dt \int\limits_{0}^{t-\frac{1}{n}} \frac{v^{\alpha-1} dv}{t+v}.$$

$$|i_n^{\mathrm{VI}}| < K_4 \frac{1}{n^{2\alpha}} \int\limits_{1}^{\infty} \int\limits_{0}^{T-1} \frac{dT\, dU}{T^{1-\alpha} U^{1-\alpha} (T+U)} < K'_4 \frac{1}{n^{2\alpha}}.$$

Интегралите по подобните области, лежащи на ляво от остта U в квадрата $-\frac{\pi}{2} \leq t$, $u \leq \frac{\pi}{2}$ с трансформацията $t = -t'$ се свеждат по форма на разглежданите и без изчисление се убеждаваме, че те са

$$O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right),$$

с което теоремата е установена.

Да разгледаме някои следствия. По неравенството на Буняковски — Коши получаваме от (2) следното неравенство:

$$\left(\sum_{\nu=0}^{n} |S_\nu - f(x)|\right)^2 \leq (n+1) \sum_{\nu=0}^{n} (S_\nu - f(x))^2 < M_1 \frac{(n+1)^2}{(n+1)^{2\alpha}}.$$

Имаме, следователно, предложението:

Ако реалната функция $f(x)$, периодична с период 2π, удовлетворява (равномерно) на условие на Липшиц от ред $\alpha<\frac{1}{2}$, то за парциалните суми S_n на реда на Фурие на $f(x)$ ще имаме

$$(5)\qquad \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}|S_\nu-f(x)|<M_2\frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

Като вземем под внимание, че средните на Чезаро $\sigma_n(x)$ са равни на

$$\frac{1}{n+1}(S_0+S_1+\cdots+S_n)$$

от неравенството (5) получаваме веднага неравенството на С. Бернщейн

$$|\sigma_n(x)-f(x)|=\left|\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n}(S_\nu-f(x))}{n+1}\right|<M_2\frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

Понеже

$$f(x)-S_n=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x),$$

то с интегриране на неравенството (2) в граници от 0 до 2π получаваме

$$(6)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}(a_\mu^2+b_\mu^2)<M_1(n+1)^{1-2\alpha}$$

или, със смяна на сумирането,

$$(7)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}\nu(a_\nu^2+b_\nu^2)+(n+1)\sum_{\nu=n+2}^{\infty}(a_\nu^2+b_\nu^2)<M_1(n+1)^{1-2\alpha}.$$

Оттук следва, че ще имаме неравенствата

$$(8)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}\nu(a_\nu^2+b_\nu^2)<M_1(n+1)^{1-2\alpha},$$

$$(9)\qquad \sum_{\nu=n+1}^{\infty}(a_\nu^2+b_\nu^2)<M_1n^{-2\alpha}.$$

При нашия начин на доказване на теорема 6, стана нужда да предположим, че $\alpha<\frac{1}{2}$. Явява се въпроса, дали това ограничение е следствие на начина на доказване. Лесно е, обаче да видим, че неравенството не остава в сила при $\alpha=1/2$. Действително, ако това неравенство беше верно и при $\alpha=1/2$, то би следвало от (8), че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2+b_n^2)$$

е сходящ и би трябвало тогава да имаме $n(a_n^2+b_n^2)\to 0$. Но известни са функции, удовлетворяващи на условието на Липшиц от ред $\alpha=\frac{1}{2}$, за които това не е верно. При $\alpha>\frac{1}{2}$ очевидно неравенството (2) не може да съществува.

ОТНОСИТЕЛЬНО НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ О РАЗХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ

Н. Обрешков

РЕЗЮМЕ

В этой работе мы устанавливаем некоторые теоремы об ассимптотических значениях производных функций и о разностех последовательностей. В частности получаем теорему Тауберова характера относительно функций и рядов, удовлетворяющих условиям с пустотами.

Пусть $\varphi(x)$ есть положительная функция для $x>a$, которая удовлетворяет условию

$$\lim \frac{\varphi(\lambda x)}{\varphi(x)} = \lambda^m, \tag{1}$$

для всякого $\lambda>0$, где m-реальное число. Доказываем следующие теоремы:

1. Пусть $\{x_i\}_1^\infty$, $\{x'_i\}_1^\infty$ будут две последовательности действительные чисел, возрастающих неограничено и при том таких, что

$$x_i<x'_i, \quad x'_i<x_{i+1}, \quad x'_i-x_i\geqq\theta x_i, \quad \theta>0.$$

Пусть $f(x)$ есть действительная функция, которая для $x_i<x<x'_i$ имеет производную $f^{(n)}(x)$ и предположим, что в этих интервалах$_i$ при $x\to\infty$, имеем

$$f(x)\sim A\varphi(x), \quad f^{(n)}(x)>-Mx^{-n}\varphi(x).$$

где $\varphi(x)$ есть функция удовлетворяющая (1) и постоянно не возрастающая или неубывающая в интервалах $x_i<x<x'_i$, $i=1, 2, 3,\ldots$ Тогда для всех x из интервалов $x_i(1+\varepsilon)\leqq x\leqq x'_i(1-\varepsilon)$, $i=1, 2, 3,\ldots$ где $\varepsilon>0$ произвольно малое число для $x\to\infty$ имеем

$$f^{(i)}(x)\sim Am(m-1)\ldots(m-i+1)x^{-i}\varphi(x), \quad 1\leqq i\leqq n-1.$$

2. Пусть $\{x'_i\}_1^\infty$, $\{x_i\}_1^\infty$ будут две последовательности типа, разсмотренных в теореме 1. и пусть $f(x)$ будет действительная функция, допускающая производную $f^{(n)}(x)$ для $x_i<x<x'_i$, $i=1, 2, 3,\ldots$, которой постоянно невозрастающая или неубывающая в этих интервалах. Предположим кроме, того, что $x_i<x<x'_i$, $i=1, 2, 3,\ldots$ при $x\to\infty$ имеем

$$f(x) \sim A\varphi(x).$$

Тогда для всех x из интервалов $x_i(1+\varepsilon) \leq x \leq x'_i(1-\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ есть произвольно малое число, для $x \to \infty$ будем иметь

$$f^{(n)}(x) \sim Am(m-1)\dots(m-n+1)x^{-n}\varphi(x).$$

Обозначим с p_n последовательность положительных чисел, которая удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{(\lambda n)}}{p_n} = \lambda^m \tag{2}$$

при всяком $\lambda > 0$, причем m есть реальное число. Относительно действительных последовательностей доказываем аналогичные теоремы.

3. Пусть $\{\lambda_n\}_1^\infty$, $\{\lambda'_n\}_1^\infty$ две последовательности целых положительных чисел, возрастающих неограниченно, будут такйм, что

$$\lambda_n < \lambda'_n, \ \lambda'_n < \lambda_{n+1}, \ \frac{\lambda'_n}{\lambda_n} \geq \delta > 1.$$

Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ будет последовательность действительных чисел, относительно которой имеем

$$\Delta^k a_n > -Mn^{-k}p_n, \quad M > 0, \quad a_n \sim Mp_n \,(n \to \infty),$$

для всех n из интервалов $\lambda'_i < n < \lambda'_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$ при чем p_n есть последовательность удовлетворяющая условию (2) и постоянно невозрастающая или неубывающая в интервалах $\lambda_i < n < \lambda'_i$, и$=1, 2, 3, \dots$ Тогда для всех n из интервалов $\lambda_i(1+\varepsilon) \leq n \leq \lambda'_i(1-\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ произвольно малое число, будем иметь $(n \to \infty)$.

$$\Delta^i a_n \sim Am(m-1)\dots(m-i+1)n^{-i}p_n, \quad 1 \leq i \leq k-1.$$

4. Пусть $\{\lambda_i\}_1^\infty$, $\{\lambda'_i\}_1^\infty$ будут две последовательности целых положительных чисел типа размотренным в теореме 3. и $\{a_n\}_1^\infty$ реальная последовательность, относительно которой имеем

$$a_n \sim Ap_n, \quad \lambda_i < n < \lambda'_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad n \to \infty,$$

где p_n есть последовательность, удовлетворяющая условию (2).

Предположим, что для $k = [k] > 0$ последовательность $\Delta^k a_n$ постоянно невозрастающая или неубывающая в интервалах $\lambda_i < n < \lambda'_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$ и пусть $\varepsilon > 0$ произвольно малое число. Тогда для $\lambda_i(1+\varepsilon) \leq n \leq \lambda'_i(1-\varepsilon)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ $n \to \infty$, будем иметь

$$\Delta^k a_n \sim Am(m-1)\dots(m-k+1)n^{-k}p_n.$$

—