ИЗСЛЕДВАНЕ НА ВЕКТОРИ, КОИТО СА НЕРАЗЛОЖИМИ ОТНОСНО НЯКОИ КОНУСИ

от Я. Тагамлицки

I. Нека S_n е съвокупността от всичките вектори $a=(a_0, a_1,\dots a_n)$ в едно Евклидово пространство с $n+1$ измерения, които удовлетворяват неравенствата

$$a_0\alpha_0+a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n\geqslant 0$$

всеки път, когато

$$\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\cdots+\alpha_n t^n\geqslant 0$$

при $t\geqslant 0$. Ние в бъдеще ще наричаме съвокупността S_n конус, тъй като при $a\varepsilon S_n$ и $\lambda\geqslant 0$ винаги имаме $\lambda a\varepsilon S_n$.

Нека $a\varepsilon S_n$. Ние ще казваме, че векторът a е неразложим (или прост) относно конуса S_n, когато той е различен от нула и не може да се разлижи на сума от два неколинеарни помежду си принадлежащи на S_n вектори[1]. Първата задача, която ние си поставяме в тази работа е да намерим всичките неразложими вектори относно конуса S_n. При това ние няма да се ползуване от известното интегрално представяне[2] на векторите от S_n. По такъвъ начин ние ще получим ново доказателство на теоремата на Стилтйес за моментите.

Нека

$$a=(a_0,\ a_1,\ a_2,\dots a_n)$$

е произволен вектор от S_n. Ние ще намериме $n+2$ числа

$$b_0,\ b_1,\ b_2,\dots b_n,\ b_{n+1}$$

по такъв начин, че да имаме

$$a_k=b_k+b_{k+1},\quad k=0,\ 1,\dots n \tag{1}$$

$$(b_0,\ b_1,\dots b_n)\varepsilon S_n \tag{2}$$

$$(b_1,\ b_2,\dots b_{n+1})\varepsilon S_n. \tag{3}$$

За тази цел нека отбележим първо, че от (1) имаме

---

[1] Вж. Я. Тагамлицки. Върху геометрията на конусите в Хилбертовите пространства. Годишник на Софийския Университет. Том XLVII, чтст 2, стр. 85—107.

[2] Вж. М. Г. Крейн. Идеи П. Л. Чебышева и А. А. Маркова в теории предельных величин интегралов и их дальнейшее развитие. Успехи математических наук. Т. VI, выпуск 4 (44), 1951, стр. 88.

$$(4)\qquad b_{k+1}=a_k-a_{k-1}+\cdots+(-1)^k a_0+(-1)^{k+1}b_0$$

при $k=0, 1, 2,\ldots n$. Ние ще изберeме b_0 по такъв начин, че да имаме винаги

$$(5)\qquad a_0b_0+a_1b_1+\cdots+a_nb_n+a_{n+1}b_{n+1}\geqslant 0$$

стига да имаме $\sum_{\nu=0}^{n+1}a_\nu t^\nu\geqslant 0$ при $t\geqslant 0$. В такъв случай ще бъде изпълнено както условието (2) (за да се убедим в това, достатъчно е да вземем $a_{n+1}=0$), така и условието (3) (за целта е достатъчно да изберем $a_0=0$). Колкото се отнася до условието (1), достатъчно е да отбележим, че то следва от равенствата (4).

Очевидно, ние можем да напишем неравенството (5) във вида

$$(6)\qquad \sum_{\nu=1}^{n+1}a_\nu(a_{\nu-1}-a_{\nu-2}+\cdots+(-1)^{\nu-1}a_0)+b_0\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu a_\nu\geqslant 0.$$

Ако

$$\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu a_\nu=0$$

то неравенството (6) е изпълнено при всички стойности на b_0, тъй като при $t\geqslant 0$ имаме

$$\sum_{\nu=1}^{n+1}a_\nu(t^{\nu-1}-t^{\nu-2}+\cdots+(-1)^\nu)=\sum_{\nu=0}^{n+1}a_\nu\frac{t^\nu-(-1)^\nu}{t+1}=$$

$$=\frac{\sum_{\nu=0}^{n+1}a_\nu t^\nu}{t+1}-\frac{1}{t+1}\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu a_\nu=\frac{1}{t+1}\sum_{\nu=0}^{n+1}a_\nu t^\nu\geqslant 0$$

и, следователно,

$$\sum_{\nu=1}^{n+1}a_\nu(a_{\nu-1}-a_{\nu-2}+\cdots+(-1)^{\nu-1}a_0)\geqslant 0.$$

Остава да се разгледа случаят, когато $\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu a_\nu\neq 0$.

Нека

$$(7)\qquad \sum_{\nu=0}^{n+1}\lambda_\nu t^\nu\geqslant 0 \text{ при } t\geqslant 0 \text{ и } \sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu\lambda_\nu>0$$

$$(8)\qquad \sum_{\nu=0}^{n+1}\mu_\nu t^\nu\geqslant 0 \text{ при } t\geqslant 0 \text{ и } \sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu\mu_\nu<0.$$

Не е трудно да се покаже, че двете условия (7) и (8) са наистина осъществими. Така, например, (7) е изпълнено при

$$\lambda_0>1,\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_{n+1}=0$$

а (8) е изпълнено при

$$0<\mu_0<1,\ \mu_1=1,\ \mu_2=\mu_3=\cdots=\mu_{n+1}=0.$$

Очевидно условието (6) ще бъде изпълнено, ако

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n+1}\lambda_\nu(a_{\nu-1}-a_{\nu-2}+\cdots+(-1)^{\nu-1}a_0)}{-\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu\lambda_\nu}\leqslant b_0\leqslant \tag{9}$$

$$\leqslant\frac{\sum_{\nu=1}^{n+1}\mu_\nu(a_{\nu-1}-a_{\nu-2}+\cdots+(-1)^{\nu-1}a_0)}{-\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu\mu_\nu}$$

От друга страна не е трудно да се установи неравенството

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n+1}\lambda_\nu(t^{\nu-1}-t^{\nu-2}+\cdots+(-1)^{\nu-1})}{-\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu\lambda_\nu}\leqslant\frac{\sum_{\nu=1}^{n+1}\mu_\nu(t^{\nu-1}-t^{\nu-2}+\cdots+(-1)^{\nu-1})}{-\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu\mu_\nu}$$

при $t\geqslant 0$. За тази цел е достатъчно да го представим във вида

$$-\frac{\sum_{\nu=0}^{n+1}\lambda_\nu t^\nu}{(t+1)\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu\lambda_\nu}+\frac{1}{1+t}\leqslant-\frac{\sum_{\nu=0}^{n+1}\mu_\nu t^\nu}{(t+1)\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu\mu^\nu}+\frac{1}{1+t}$$

и да се възползуваме от условията (7) и (8). Въз основа на това получаваме

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n+1}\lambda_\nu'(a_{\nu-1}-a_{\nu-2}+\cdots+(-1)^\nu a_0)}{-\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu\lambda_\nu}\leqslant\frac{\sum_{\nu=1}^{n+1}\mu_\nu(a_{\nu-1}-a_{\nu-2}+\cdots+(-1)^\nu a_0)}{-\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu\mu_\nu}$$

тъй като $a\varepsilon S_n$.

След всичко извършено означаваме с b_0 точната горна граница на израза

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n+1}\lambda_\nu(a_{\nu-1}-a_{\nu-2}+\cdots+(-1)^\nu a_0)}{-\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu\lambda_\nu},$$

където числата $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{n-1}$ се изменят, като изпълняват условията (7). Така дефинираното число b_0 очевидно удовлетворява неравенствата (9), а следователно и (6). По такъв начин ние установихме съществуването на числата $b_0, b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}$, които удовлетворяват условията (1), (2) и (3).

Сега ние вече сме готови да намерим неразложимите вектори на S_n. Наистина, ако допуснем, че векторът a е неразложим, ще получим

$$\lambda b_k=\mu b_{k+1},\ k=0,\ 1,\ldots n,$$

където поне едното от двете числа λ и μ е различно от нула. При $\mu=0$ и $\lambda \neq 0$ ние ще получим

$$b_0=b_1=\cdots=b_n=0$$

и, следователно,

$$a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=0,\ a_n>0.$$

При $\mu \neq 0$ ще получим

$$b_k=q^k b_0,\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots n,\ n+1,$$

къдто $q=\frac{\lambda}{\mu}>0$ и, следователно,

$$a_k=q^k a_0,\quad k=0,\ 1,\ldots n$$

Сега ние ще покажем, че намерените вектори са наистина неразложими относно S_n. Ще разгледаме първо по-простия случай, когато

$$a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=0,\quad a_n>0.$$

В такъв случай от

$$a_k=b_k+c_k,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots n$$

$$b=(b_0,\ b_1,\ldots b_n)\varepsilon S_n$$

$$c=(c_0,\ c_1,\ldots c_n)\varepsilon S_n$$

получаваме $b_k\geqslant 0$, $c_k\geqslant 0$, а от тук

$$b_0=b_1=\cdots=b_{n-1}=0$$

$$c_0=c_1=\cdots=c_{n-1}=0$$

и, следователно, $b_n c=c_n b$. С това неразложимостта на вектора $a=(a_0,\ a_1,\ldots a_n)$ е установена.

Преминаваме към случая, когато

$$a_k=Aq^k,\ A>0,\ q>0,\ k=0,\ 1,\ldots n.$$

Нека

$$a_k = b_k + c_k,\ k=0,\ 1,\ 2, \ldots n$$

$$(b_0,\ b_1, \ldots b_n) \varepsilon S_n$$

$$(c_0,\ c_1, \ldots c_n) \varepsilon S_n.$$

Като вземем под внимание неравенствата

$$t^k(q^2 - 2qt + t^2) \geqslant 0$$

при $t \geqslant 0$, ще получим

$$q^2 b_k - 2q b_{k+1} + b_{k+2} \geqslant 0, \quad k=0,\ 1, \ldots n-2$$

$$q^2 c_k - 2q c_{k+1} + c_{k+2} \geqslant 0, \quad k=0,\ 1, \ldots n-2.$$

От друга страна

$$(q^2 b_k - 2q b_{k+1} + b_{k+2}) + (q^2 c_k - 2q c_{k+1} + c_{k+2}) = q^2 a_k - 2q a_{k+1} + a_{k+2} = 0$$

и, следователно,

$$q^2 b_k - 2q b_{k+1} + b_{k+2} = 0,\ k=0,\ 1, \ldots n+2$$

т. е.

$$b_k = (B + B_1 k) q^k, \quad k=0,\ 1, \ldots n.$$

Като вземем под внимание още, че при $t \geqslant 0$ имаме

$$t^2 b_k - 2t b_{k+1} + b_{k+2} \geqslant 0,$$

намираме

$$(B + kB_1) q^k (t-q)^2 + 2B_1 q^{k+1} (q-t) \geqslant 0,$$

което е възможно само при $B_1 = 0$. По такъв начин добиваме окончателно $b_k = Bq^k$. От тук получаваме $c_n = (A-B)q^k$, с което е установена неразложимостта на вектора $(a_0,\ a_1, \ldots a_n)$.

II. Очевидно, конусът S_n е компактен[1]. От друга страна съществува вектор, който сключва остри ъгли със всички различни от нула вектори от S_n. Такъв е, например, векторът $(1,\ 1, \ldots 1)$, както това следва от обстоятелството, че компонентите на векторите от S_n са неотрицателни. Тези обстоятелства ни позволяват да приложим към конуса S_n общите теореми, които ние установихме неотдавна за Хилбертови пространства[2].

$$k_\nu = cp_\nu + \int_0^\infty t^\nu d\alpha(t), \quad \nu=0,\ 1, \ldots n,$$

където $p_0 = p_1 = \cdots = p_{n-1} = 0,\ p_n = 1$, функцията $\alpha(t)$ монотонно расте и $c \geqslant 0$. Очевидно съвокупността K_n е един изпъкнал конус, т. е. ако

---

[1] В смисъл, че от всяка ограничена редица от вектори принадлежащи на S_n може да се избере сходяща подредица, като при това границата на тази подредица също принадлежи на S_n.

[2] Я. Тагамлицки. Върху геометрията на конусите в Хилбертовите пространства. Годишник на Софийския Университет. Т. XLVII, част 2, стр. 85—107.

$k \varepsilon K_n$, $l \varepsilon K_n$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, от $\alpha k + \beta l \varepsilon K_n$. От друга страна, както е известно, конусът K_n е затворен. Ние ще припомним доказателството.

Да означим със K_n съвокупността на векторите $(k_0, k_1, \ldots k_n)$, които могат да се представят във вида

$$k_\nu^{(s)} = c_s p_\nu + \int_0^\infty t^\nu d\alpha_s(t), \quad \nu = 0, 1, \ldots n,$$

където $c_s \geqslant 0$ и функциите $\alpha_s(t)$ монотонно растат, и нека

$$\lim_{s \to \infty} k_\nu^{(s)} = k_\nu, \quad \nu = 0, 1, \ldots n.$$

Без да ограничаваме общността можем да пишем $\alpha_s(0) = 0$. Очевидно

$$k_0^{(s)} = \alpha_s(\infty) \quad \text{и} \quad k_n^{(s)} \geqslant c_s.$$

Въз основа на теоремата на Хели ние можем да изберем сходяща подредица

$$\alpha_{s_1}(t), \alpha_{s_2}(t), \alpha_{s_3}(t), \ldots,$$

като при това можем да предполагаме също тъй, че съществува $\lim\limits_{n \to \infty} c_{s_n}$. Полагаме

$$\lim_{m \to \infty} \alpha_{s_m}(t) = \alpha(t)$$

$$\lim_{m \to \infty} c_{s_m} = c.$$

Ние ще покажем, че при $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ имаме

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^\infty t^\nu d\alpha_{s_m}(t) = \int_0^\infty t^\nu d\alpha(t). \tag{10}$$

Нека отбележим най-напред, че интегралите

$$\int_0^\infty t^\nu d\alpha(t), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots n$$

са сходящи и

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^\infty t^\nu d\alpha_{s_m}(t) \geqslant \int_0^\infty t^\nu d\alpha(t). \tag{11}$$

Това се вижда от неравенствата

$$\int_0^\infty t^\nu d\alpha_{s_m}(t) \geqslant \int_0^A t^\nu d\alpha_{s_m}(t),$$

от които следва

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^\infty t^\nu da_{s_m}(t)\geqslant\int_0^A t^\nu da(t).$$

Преминаваме към доказателството на равенствата (10). Нека $\varepsilon>0$. Избираме A достатъчно голямо за да имаме

$$\int_A^\infty t^\nu da_{s_m}(t)\leqslant\frac{1}{A^{n-\nu}}\int_A^\infty t^n da_{s_m}(t)\leqslant\frac{1}{A^{n-\nu}}\int_0^\infty t^n da_{s_m}(t)=\frac{k_n^{(s_m)}}{A^{n-\nu}}<\varepsilon.$$

В такъв случай увеличавайки A още повече, ако това е нуждно, добиваме

$$\left|\int_0^\infty t^\nu da_{s_m}(t)-\int_0^\infty t^\nu da(t)\right|\leqslant\left|\int_0^A t^\nu da_{s_m}(t)-\int_0^A t^\nu da(t)\right|+$$

$$+\int_A^\infty t^\nu da_{s_m}(t)+\int_A^\infty t^\nu da(t)\leqslant\left|\int_0^A t^\nu da_{s_m}(t)-\int_0^A t^\nu da(t)\right|+2\varepsilon,$$

от където следват равенствата (10).

По такъв начин преминавайки към границата получаваме

$$k_\nu=cp_\nu+\int_0^\infty t^\nu da(t)\quad\text{при}\quad\nu=0,\ 1,\ldots\ n-1$$

$$k_n\geqslant cp_n+\int_0^\infty t^n da(t).$$

и като замени c с по-голяма константа (ако това е нуждно), заключаваме, че $(k_0,\ k_1,\ldots k_n)\varepsilon K_n$. По такъв начин е показано, че конусът K_n е наистина затворен.

По-нататък нека отбележим, че $K_n\subset S_n$ и че всичките неразложими вектори на S_n влизат в конуса K_n. Въз основа на теоремата, за която ние говорихме по-горе[1], може да се твърди, че $K_n\equiv S_n$. По такъв начин ние получихме ново доказателство на известната теорема[2] за интегралното представяне на векторите от S_n, Като извършим граничния преход $n\to\infty$ ще получим, както е известно, теоремата на Стилтйес за моментите.

III. Да означим с H_{2n} конуса на векторите

$$a=(a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots a_{2n})$$

в едно $2n+1$ измеримо Евклидово пространство, които удовлетворяват неравенствата

$$\alpha_0 a_0+\alpha_1 a_1+\cdots+\alpha_{2n}a_{2n}\geqslant 0$$

всеки път, когато полиномът

[1] Я. Тагамлицки. Върху геометрията на конустите в Хилбертовите пространства. Годишник на Софийския Университет. Т. XLVII, част, стр. 85—107.

[2] М. Г. Крейн. Идеи П. Л. Чебышева и А. А. Маркова в теории предельных величин интегралов и их дальнейшее развитие. Успехи математических наук. Т. VI, выпуск 4 (44), 1951, стр. 88.

$$a_0+a_1t+\cdots+a_{2n}t^{2n}$$

приема само неотрицателни стойности (разбира се, при реални стойности на t). Ние ще покажем, че е възможно да се изберат $2n+3$ числа

$$b_0,\ b_1,\dots\ b_{2n},\ b_{2n+1},\ b_{2n+2},$$

които удовлетворяват условията

$$a_k=b_k+b_{k+2},\quad k=0,\ 1,\dots\ 2n. \tag{12}$$

$$(b_0,\ b_1,\dots\ b_{2n})\varepsilon H_{2n} \tag{13}$$

$$(b_2,\ b_3,\dots\ b_{2n+2})\varepsilon H_{2n}. \tag{14}$$

За тази цел нека първоначално отбележим, че

$$b_{2\nu}=a_{2\nu-2}-a_{2\nu-4}+\cdots+(-1)^{\nu-1}a_0+(-1)^{\nu}b_0,\quad \nu=1,\ 2,\dots n+1 \tag{15}$$

$$b_{2\nu+1}=a_{2\nu-1}-a_{2\nu-3}+\cdots+(-1)^{\nu-1}a_1+(-1)^{\nu}b_1,\quad \nu=1,\ 2,\dots\ n. \tag{16}$$

Ние ще изберем b_0 и b_1 по такъв начин, че да имаме

$$a_0b_0+a_1b_1+\cdots+a_{2n}b_{2n}+a_{2n+1}b_{2n+1}+a_{2n+2}b_{2n+2}\geqslant 0 \tag{17}$$

всеки път, когато полиномът

$$a_0+a_1t+\cdots+a_{2n}t^{2n}+a_{2n+1}t^{2n+1}+a_{2n+2}t^{2n+2}$$

е неотрицателен. Ние ще напишем неравенствата (17) във вида

$$\sum_{\nu=1}^{n+1}a_{2\nu}(a_{2\nu-2}-a_{2\nu-4}+\cdots+(-1)^{\nu-1}a_0)+b_0\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^{\nu}a_{2\nu}+ \tag{18}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}a_{2\nu+1}(a_{2\nu-1}-a_{2\nu-3}+\cdots+(-1)^{\nu-1}a_1)+b_1\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu}a_{2\nu+1}\geqslant 0$$

и ще положим за краткост

$$\sum_{\nu=1}^{n+1}a_{2\nu}(a_{2\nu-2}-a_{2\nu-4}+\cdots+(-1)^{\nu-1}a_0)=A(a_\nu,\ a_\nu)$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}a_{2\nu+1}(a_{2\nu-1}-a_{2\nu-3}+\cdots+(-1)^{\nu-1}a_1)=B(a_\nu,\ a_\nu).$$

Нека числата

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\dots\ \lambda_{2n+2}$$

$$\mu_0,\ \mu_1,\dots\ \mu_{2n+2}$$

удовлетворяват неравенствата

$$\sum_{\nu=1}^{2n+2}\lambda_\nu t^\nu\geqslant 0 \text{ при всички реални } t \text{ и} \sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu\lambda_{2\nu}>0 \tag{19}$$

$$(20)\qquad \sum_{\nu=1}^{2n+2}\mu_\nu t^\nu \geqslant 0 \text{ при всички реални } t \text{ и} \sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu \mu_{2\nu} < 0.$$

Такива числа съществуват, както това може да се види с помощта на подходящи полиноми от четвърта степен.

От условието (18) получаваме

$$(21)\qquad \frac{A(\lambda_\nu,\ a_\nu)+B(\lambda_\nu,\ a_\nu)+b_1\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\lambda_{2\nu+1}}{-\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu\lambda_{2\nu}} \leqslant b_0 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A(\mu_\nu,\ a_\nu)+B(\mu_\nu,\ a_\nu)+b_1\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\mu_{2\nu+1}}{-\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu\mu_{2\nu}}$$

Ние ще покажем, че е възможно да се избере константата b_1 по такъв начин, че да имаме

$$(22)\qquad \frac{A(\lambda_\nu,\ a_\nu)+B(\lambda_\nu,\ a_\nu)+b_1\sum_{\nu=0}^{u}(-1)^\nu\lambda_{2\nu+1}}{-\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu\lambda_{2\nu}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A(\mu_\nu,\ a_\nu)+B(\mu_\nu,\ a_\nu)+b_1\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu\mu_{2\nu+1}}{-\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu\mu_{2\nu}}$$

За тази цел ще разгледаме числата

$$\lambda'_0,\ \lambda'_1, \ldots\ \lambda'_{2n+2}$$
$$\mu'_0,\ \mu'_1, \ldots\ \mu'_{2n+2}$$
$$\lambda''_0,\ \lambda''_1, \ldots\ \lambda''_{2n+2}$$
$$\mu''_0,\ \mu''_1, \ldots\ \mu''_{2n+2},$$

които удовлетворяват условията

$$\sum_{\nu=0}^{2n+2}\lambda'_\nu t^\nu \geqslant 0,\ \sum_{\nu=0}^{2n+2}\mu'_\nu t^\nu \geqslant 0,\ \sum_{\nu=0}^{2n+2}\lambda''_\nu t^\nu \geqslant 0,\ \sum_{\nu=0}^{2n+2}\mu''_\nu t^\nu \geqslant 0$$

при всички реални стойности на t и

$$\xi' = \sum_{\nu=0}^{n+} (-1)^\nu \lambda'_{2\nu} < 0 \qquad \eta' = \sum_{\nu=1}^{n+1} (-1)^\nu \mu'_\nu < 0$$

$$\xi'' = \sum_{\nu=1}^{n+1} (-1)^\nu \lambda''_{2\nu} > 0 \qquad \eta'' = \sum_{\nu=0}^{n+1} (-1)^\nu \mu''_{2\nu} < 0$$

$$\delta' = \left(\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \mu'_{2\nu+1} \right) \left(\sum_{\nu=0}^{n+1} (-1)^\nu \lambda'_{2\nu} \right) -$$

$$- \left(\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \lambda'_{2\nu+1} \right) \left(\sum_{\nu=0}^{n+1} (-1)^\nu \mu'_{2\nu} \right) > 0$$

$$\delta'' = \left(\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \mu''_{2\nu+1} \right) \left(\sum_{\nu=0}^{n+1} (-1)^\nu \lambda''_{2\nu} \right) -$$

$$- \left(\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \lambda''_{2\nu+1} \right) \left(\sum_{\nu=0}^{n+1} (-1)^\nu \mu''_{2\nu} \right) < 0.$$

Такива числа съществуват. В това ние можем да се убедим, като разглеждаме полиноми от вида $(\alpha+t)^2+t^2(\beta+t)^2$.

Условието (22) ни дава

$$\frac{[A(\lambda'_\nu, a_\nu)+B(\lambda'_\nu, a_\nu)]\,\eta' - [A(\mu'_\nu, a_\nu)+B(\mu'_\nu, a_\nu)]\,\xi'}{\delta'} \leqslant b_1 \leqslant \tag{23}$$

$$\leqslant \frac{[A(\lambda''_\nu, a_\nu)+B(\lambda''_\nu, a_\nu]\,\eta'' - [A(\mu''_\nu, a_\nu)+B(\mu''_\nu, a_\nu)]\,\xi''}{\delta''}$$

От друга страна не е трудно да се види, че при всички реални стойности на t имаме

$$\frac{[A(\lambda'_\nu, t^\nu)+B(\lambda'_\nu, t^\nu)]\,\eta' - [A(\mu'_\nu, t^\nu)+B(\mu'_\nu, t^\nu)]\,\xi'}{\delta'} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{[A(\lambda''_\nu, t^\nu)+B(\lambda''_\nu, t^\nu)]\,\eta'' - [A(\mu''_\nu, t^\nu)+B(\mu''_\nu, t^\nu)]\,\xi''}{\delta''}$$

и, следователно,

$$\frac{[A(\lambda'_\nu, a_\nu)+B(\lambda'_\nu, a_\nu)]\,\eta' - [A(\mu'_\nu, a_\nu)+B(\mu'_\nu, a_\nu)]\,\xi'}{\delta'} \leqslant \tag{24}$$

$$\leqslant \frac{[A(\lambda''_\nu, a_\nu)+B(\lambda''_\nu, a_\nu)]\,\eta'' - [A(\mu''_\nu, a_\nu)+B(\mu''_\nu, a_\nu)]\,\xi''}{\delta''}.$$

След като е установено неравенството (24), определяме b_1 като точната долна граница на израза

$$\frac{[A(\lambda''_\nu\ a_\nu)+B(\lambda''_\nu, a_\nu)]\,\eta'' - [A(\mu''_\nu, a_\nu)+B(\mu''_\nu, a_\nu)]\,\xi''}{\delta''}.$$

По такъв начин ние получаваме неравенството (23), а от тук и (22) във всички случаи, когато

$$(25)\qquad \left(\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\mu_{2\nu+1}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^{\nu}\lambda_{2\nu}\right)-$$
$$-\left(\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\lambda_{2\nu+1}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^{\nu}\mu_{2\nu}\right)\neq 0.$$

Извършвайки граничен преход, заключаваме, че неравенството (22) запазва своята валидност и тогава, когато изразът (25) е равен на нула. След като е установено неравенството (22), означаваме с b_0 точната долна граница на израза

$$\frac{A(\mu_\nu,\ a_\nu)+B(\mu_\nu,\ a_\nu)+b_1\sum\limits_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\mu_{2\nu+1}}{-\sum\limits_{\nu=0}^{n+1}(-1)^{\nu}\mu_{2\nu}}.$$

По такъв начин ще получим

$$(26)\qquad \sum_{\nu=0}^{2n+2}a_\nu b_\nu \geqslant 0$$

във всички случаи, когато $\sum\limits_{\nu=0}^{2n+2}a_\nu t^\nu \geqslant 0$ за всички реални t, но $\sum\limits_{\nu=0}^{n+1}(-1)^{\nu}a_{2\nu}\neq 0$. Извършвайки граничен преход заключаваме, че неравенството (26) е валидно и при $\sum\limits_{\nu=0}^{n+1}(-1)^{\nu}a_{2\nu}=0$. От условието (26) получаваме

$$(b_0,\ b_1,\ldots\ b_{2n})\varepsilon H_{2n}$$
$$(b_2,\ b_3,\ldots\ b_{2n+2})\varepsilon H_{2n}$$

Сега не е трудно да се намерят всичките неразложиме вектори на конуса H_{2n}. Наистина, ако векторът a е неразложим, то

$$\lambda b_k=\mu b_{k+2},\quad k=0,\ 1,\ldots\ n,$$

където поне едното от двете числа λ и μ е различно от нула. От тук заключаваме, че или

$$a_0=a_1=\cdots=a_{2n-1}=0,\quad a_{2n}>0,$$

или

$$a_k=a_0t^k,\ k=0,\ 1,\ldots\ 2n,\ a_0>0.$$

Като използуваме разсъжденията, които ние правихме по-горе, можем да покажем, че обратното е също вярно: така получените вектори са наистина неразложими.

IV. След като намерихме неразложимите вектори на H_{2n} ние можем без труд да дадем ново доказателство на известната теорема на Е. Fischer[1], според която всеки вектор $(a_0, a_1, \dots a_{2n})$ от H_{2n} може да се представи във вида

$$a_\nu = cp_\nu + \int_{-\infty}^{\infty} t^\nu d\alpha(t), \quad \nu = 0, 1, \dots 2n, \tag{27}$$

където функцията $\alpha(t)$ монотонно расте, $c \geqslant 0$ и

$$p_0 = p_1 = \dots = p_{2n-1} = 0, \quad p_{2n} = 1.$$

Това доказателство се основава пак върху теоремата ни, която ние цитирахме по-горе[2]. За целта е достатъчно да се отбележи, че

1. конусът H_{2n} е компактен и всичките му вектори, които са различни от нула, сключват остри ъгли, например, с вектора $(1, 0, 1, 0, \dots, 1)$

2. конусът K_{2n} на векторите, които могат да се представят във вида (27) е изпъкнал, затворен и се съдържа в конуса H_{2n};

3. конусът K_{2n} съдържа всички неразложими вектори на H_{2n}.

Ние няма да се спираме върху подробностите. В заключение ще споменем, че теоремата на Хамбургер за моментите се получава, както е известно, без труд от теоремата на Fischer с граничния преход $n \to \infty$.

Постъпила на 10. XI. 1952 г.

О НЕРАЗЛОЖИМОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕКОТОРЫХ КОНУСОВ

Я. Тагамлицкий

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматриваются неразложимые векторы относительно конусов позитивных векторов в интервалах $(0, \infty)$ и $(-\infty, \infty)$. Исследования проводятся без помощи теорем Стильтйеса и Гамбургера или их конечномерных аналогов. Таким образом установлен новый путь к доказательству теорем Стильтйеса и Гамбургера о моментах.

[1] E. Fischer. Über das Carathéodory'sche Problem, Potenzreihen mit positivem reellen Teil bettreffend. Rend.. Palermo 32 (1911), 240—256.

[2] Я. Тагамлицки. Върху геометрията на конусите в Хилбертовите пространства. Годишник на Софийския университет. Т. XLVII, част 2. стр. 85—107.