ОБОБЩЕНИЕ НА ЕДНА ТЕОРЕМА ЗА СХОДИМОСТ НА МЕРСЕР

от Любомир Чакалов

С помощта на числената редица $x_1, x_2, x_3, \ldots$ да си образуваме двете нови редици с n-ти членове

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \quad z_n = x_n + \lambda y_n,$$

където λ е някоя (реална или комплексна) константа. Известно е, че от $\lim x_n = x$ следва $\lim y_n = x$ и $\lim z_n = (1+\lambda)x$ и че от $\lim y_n = y$ не винаги следва съществуването на $\lim x_n$. Според една теорема на Мерсер [1], ако λ е реално число, по-голямо от -1, то от $\lim z_n = z$ следва $\lim x_n = \lim y_n = \frac{z}{1+\lambda}\cdot$ Поради важното приложение, което намери тази обратна теорема при доказателството на еквивалентността на Чезаровата и Хьолдеровата сумационни методи, съществуват няколко доказателства на теоремата на Мерсер и на някои нейни обобщения [2], [3], [4]. Обобщението, което имаме предвид в настоящата работа, се състои в следното: 1) предполагаме, че константата λ може да бъде и комплексна, стига реалната ѝ част да е по-голяма от -1; 2) общия член на редицата $\{y_n\}$ заменяме с

$$y_n = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n},$$

където числата $p_1, p_2, p_3, \cdots$ са положителни и подчинени на единственото условие $\sum_1^\infty p_n = +\infty$. При тези по-общи предположения заключителната част на теоремата си остава същата, както и при теоремата на Мерсер: от $\lim z_n = z$ следва $\lim x_n = \lim y_n = \frac{z}{1+\lambda}\cdot$

При доказателството, което дава И. Шур [2] за случая $p_n = 1$, той установява също, че условието $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$ е и необходимо, за да бъде вярно твърдението в теоремата на Мерсер. Ние си поставяме също за задача да изследваме, доколко последното условие е необходимо и в по-общия случай, който разглеждаме.

Теорема. Нека е дадена безкрайната редица $\{p_n\}_1^\infty$ от положителни числа, подчинени на единственото условие $\lim P_n=\infty$, където сме положили за краткост

(1) $$P_n=p_1+p_2+\cdots+p_n;$$

да означим с λ някоя комплексна константа с реална част по-голяма от -1. На произволна числена редица $\{x_n\}_1^\infty$ да съпоставим редиците $\{y_n\}_1^\infty$ и $\{z_n\}_1^\infty$ с n-ти членове

(2) $$y_n=\frac{p_1x_1+p_2x_2+\quad+p_nx_n}{P_n}, \quad z_n=x_n+\lambda y_n.$$

При тези предположения сходимостта на редицата $\{z_n\}$ има винаги за следствие сходимостта на редицата $\{x_n\}$.

Доказателство. Достатъчно е да докажем, че от сходимостта на $\{z_n\}$ следва сходимостта на $\{y_n\}$, защото в такъв случай и $x_n=z_n-\lambda y_n$ клони към определена граница. Освен това при доказателството можем да предполагаме, без да се ограничава с това общността, че $\lim z_n=0$. И наистина, ако сме доказали теоремата при това предположение и ако $z_n\to z\neq 0$, то като положим $z'_n=z_n-z$, $x'_n=x_n-\frac{z}{1+\lambda}$, $y'_n=y_n-\frac{z}{1+\lambda}$, убеждаваме се лесно, че

$$y'_n=\frac{p_1x'_1+p_2x'_2+\cdots+p_nx'_n}{P_n}, \quad z'_n=x'_n+\lambda y'_n,$$

тъй че от $z'_n\to 0$ следва $y'_n\to 0$, $x'_n\to 0$, т. е. от $z_n\to z$ следва $x_n\to\frac{z}{1+\lambda}$.

a) Да допуснем най-напред, че $\operatorname{Re}\lambda=a\geqq 0$. Ще докажем, че в такъв случай

(3) $$|y_n|\leqq\frac{p_1|z_1|+p_2|z_2|+\quad+p_n|z_n|}{P_n}.$$

От (2) имаме:

$$y_1=x_1=\frac{|z_1|}{|1+\lambda|}\leqq|z_1|,$$

т. е. (3) е в сила за $n=1$. Да допуснем, че сме доказали неравенството

(4) $$|y_{n-1}|\leqq\frac{p_1|z_1|+p_2|z_2|+\cdots+p_{n-1}|z_{n-1}|}{P_{n-1}}$$

за някое $n\geqq 2$. Съгласно с (2)

$$p_nx_n=P_ny_n-P_{n-1}y_{n-1},$$

$$p_nz_n=(P_n+\lambda p_n)y_n-P_{n-1}y_{n-1}.$$

$$(5)\qquad (P_n+\lambda p_n)y_n=p_n z_n+P_{n-1}y_{n-1},$$

$$P_n|y_n|\leqq|P_n+\lambda p_n|\cdot|y_n|\leqq p_n|z_n|+P_{n-1}|y_{n-1}|$$

или, като имаме предвид (4),

$$P_n|y_n|\leqq p_1|z_1|+p_2|z_2|+\cdots+p_n|z_n|.$$

Следователно, (3) е в сила за всяко $n\geqq 1$. От същото неравенство следва непосредствено, че $\lim y_n=0$, ако $\lim z_n=0$, т. е. че теоремата е вярна при $\mathrm{Re}\,\lambda\geqq 0$.

б) По-общо, ако $\lambda=-1+a+ib$, $a>0$, ще установим при $n\geqq 1$ верността на неравенството

$$(6)\qquad a|y_n|\leqq\frac{q_1|z_1|+q_2|z_2|+\cdots+q_n|z_n|}{Q_n},\ \text{където}$$

$$q_1=Q_1=1,\quad Q_\nu=\prod_{k=2}^{\nu}\left(1+a\frac{p_k}{P_{k-1}}\right)\ \text{и}\ q_\nu=Q_\nu-Q_{\nu-1}\ \text{за}\ \nu>1.$$

Очевидно всички q_ν са положителни и $q_1+q_2+\cdots+q_n=Q_n$. Неравенството (6) се обръща при $n=1$ в $a|y_1|\leqq|z_1|$ и се проверява непосредствено като вземем предвид, че $z_1=y_1(1+\lambda)$ и че $|1+\lambda|\geqq a$. Да допуснем, че сме доказали неравенството

$$a|y_{n-1}|\leqq\frac{q_1|z_1|+q_2|z_2|+\cdots+q_{n-1}|z_{n-1}|}{Q_{n-1}}\ \text{за някое}\ n>1.$$

От неравенството

$$|P_n+\lambda p_n|=|P_{n-1}+(\lambda+1)p_n|\geqq P_{n-1}+a p_n$$

и от (5) заключаваме, че

$$(P_{n-1}+ap_n)|y_n|\leqq|P_n+\lambda p_n|\;|y_n|\leqq p_n|z_n|+P_{n-1}|y_{n-1}|,$$

$$\left(1+a\frac{p_n}{P_{n-1}}\right)|y_n|\leqq\frac{p_n}{P_{n-1}}|z_n|+|y_{n-1}|$$

или, като умножим двете страни с $a\,Q_{n-1}$ и вземем предвид, че

$$a\frac{p_n}{P_{n-1}}Q_{n-1}=Q_n-Q_{n-1}=q_n,$$

получаваме:

$$a\,Q_n|y_n|\leqq q_n|z_n|+a\,Q_{n-1}|y_{n-1}|\leqq q_1|z_1|+q_2|z_2|+\cdots+q_n|z_n|.$$

Така чрез метода на пълната индукция доказахме, че (6) е в сила за всяко $n>0$.

Остава да докажем, че $Q_n\to\infty$. Достатъчно е за тази цел да установим, че редът $\sum_2^\infty a\frac{p_k}{P_{k-1}}$ или все едно $\sum_2^\infty\frac{p_k}{P_{k-1}}$ е разходящ. Това следва обаче направо от факта, че безкрайното произведение

$\prod_{\lambda}^{\infty}\left(1+\frac{p_k}{P_{k-1}}\right)$ дивергира към $+\infty$, защото произведението от първите му n множителя е равно на $\frac{P_{n+1}}{P_1}$. От $Q_n \to \infty$ и от (6) заключаваме по-нататък, че $y_n \to 0$. С това теоремата е доказана напълно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mercer J. On the limits of real variants. Proceedings of the London Mathematical Society (2) 5 (1906), 206—224.
2. Schur I. Über die Äquivalenz der Cesároschen und Hölderschen Mittelwerte. Mathematische Annalen, 74 (1913), 447—458.
3. Knopp K. Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit des Herrn I. Schur. Mathematische Annalen, 74 (1913), 459—461.
4. Hardy G. H. Divergent series, Oxford, 1949.

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ МЕРСЕРА

Л. Н. Чакалов

РЕЗЮМЕ

Цель автора доказать следующее обобщение теоремы Мерсера [1] о сходимости последовательностей:

Обозначим через $\{p_n\}_1^\infty$ бесконечную последовательност положительных чисел, подчиненных условию

$$\lim (p_1+p_2+\cdots+p_n)=\infty$$

и через λ комплексное число, вещественная часть которого больше -1. Далее положим

$$y_n=\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}, \quad z_n=x_n+\lambda y_n,$$

где $\{x_n\}_1^\infty$ любая бесконечная последовательност чисел. В таком случае если последовательност $\{z_n\}_1^\infty$ сходится, то сходится и последовательност $\{x_n\}_1^\infty$.