

РАЗПОЛОЖЕНИЕ НА ЕДНА СИСТЕМА ОТ ТРИ ПОСЛЕДОВАТЕЛНО СВЪРЗАНИ МАТЕМАТИЧНИ МАХАЛА В ЕДНА РАВНИНА ПРИ ПЕРИОДИЧНИТЕ Ў ДВИЖЕНИЯ ОКОЛО СТАБИЛНОТО РАВНОВЕСНО ПОЛОЖЕНИЕ

от Г. Брадистилев

§ 1. Въведение

В една по-раншна работа¹ разгледах една система от n последователно свързани физични махала, които се въртят около успоредни оси и доказах съществуването на n фамилии (мрежи) периодични движения на тази система около стабилното ѝ равновесно положение. В тази работа ще разгледам в частност следния въпрос, който може би ще представлява интерес за приложенията: Какво е разположението след началния момент на една система от три последователно свързани математични махала при периодичните ѝ движения около стабилното ѝ равновесие?

От цитираната работа (формула (1)) получаваме веднага, че декартовите координати на краищата на махалата и техните производни спрямо времето t са съответно:

$$(1) \quad \begin{cases} x_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} a_k \sin \varphi_k, \\ y_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} a_k \cos \varphi_k, \end{cases} \quad \begin{cases} x'_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} a_k \cos \varphi_k \cdot \varphi'_k, \\ y'_\nu = - \sum_{k=1}^{\nu} a_k \sin \varphi_k \cdot \varphi'_k, \end{cases}$$

($\nu = 1, 2, 3$)

където a_1, a_2, a_3 са дължините на махалата, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — ъглите, които те сключват с ординатната ос, насочена надолу (стабилното

¹ Über periodische und asymptotische Lösungen beim n -fachen Pendel in der Ebene. Math. Annalen 116 (1938), s 181—203. Също: Съществуване и свойства на периодичните движения на n последователно свързани физични махала в една равнина, Годишник на Соф. университет, 1942, стр. 249—282.

равновесно положение). Също формулата (6b) дава непосредствено уравненията на движението на тази система от три махала:

$$(2) \quad M_\nu \sum_{k=1}^{\nu} a_k [\cos(\varphi_\nu - \varphi_k) \cdot \varphi_k'' + \sin(\varphi_\nu - \varphi_k) \cdot \varphi_k'^2] \\ + \sum_{k=\nu+1}^3 M_k a_k [\cos(\varphi_\nu - \varphi_k) \cdot \varphi_k'' + \sin(\varphi_\nu - \varphi_k) \cdot \varphi_k'^2] = -M_\nu g \sin \varphi_\nu$$

$$\text{където } M_\nu = \sum_{k=\nu}^3 m_k \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

Ако в (2) положим $\varphi = \lambda \psi$, добиваме

$$(3) \quad M_\nu \sum_{k=1}^{\nu} a_k [\cos \lambda (\psi_\nu - \psi_k) \cdot \psi_k'' + \sin \lambda (\psi_\nu - \psi_k) \cdot \psi_k'^2] \\ + \sum_{k=\nu+1}^3 M_k a_k [\cos \lambda (\psi_\nu - \psi_k) \cdot \psi_k'' + \sin \lambda (\psi_\nu - \psi_k) \cdot \psi_k'^2] = \\ = -g M_{\nu, \psi_\nu} + \lambda g M \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{2n-3}}{(2n-1)!} \psi_\nu^{2n-1}.$$

Тази система при $\lambda=0$ се обръща в линейна:

$$(4) \quad M_\nu \sum_{k=1}^{\nu} a_k \psi_k'' + \sum_{k=\nu+1}^3 M_k a_k \psi_k'' = -g M_{\nu, \psi_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3),$$

на която характеристичното уравнение е

$$(5) \quad \begin{vmatrix} M_1(\varrho^2 a_1 + g) & \varrho^2 M_2 a_2 & \varrho^2 M_3 a_3 \\ M_2 \varrho^2 a_1 & M_2(\varrho^2 a_2 + g) & \varrho^2 M_3 a_3 \\ M_3 \varrho^2 a_1 & M_3 \varrho^2 a_2 & M_3(\varrho^2 a_3 + g) \end{vmatrix} = 0.$$

Като положим $\varrho^2 = \frac{g}{u}$ и развием детерминантата, характеристичното уравнение приема вида

$$(5a) \quad f(u) \equiv M_1 M_2 (a_1 + u)(a_2 + u)(a_3 + u) - M_1 M_3 a_2 a_3 (a_1 + u) \\ - M_2^2 a_1 a_2 (a_3 + u) - M_2 M_3 a_1 a_3 (a_2 + u) + 2M_2 M_3 a_1 a_2 a_3 = 0$$

или

$$(5b) \quad f(u) \equiv M_1 M_2 u^3 + M_1 M_2 (a_1 + a_2 + a_3) u^2 + [M_2 m_1 a_1 a_2 \\ + M_2 (m_1 + m_2) a_1 a_3 + M_1 m_2 a_2 a_3] u + m_1 m_2 a_1 a_2 a_3 = 0.$$

Това уравнение има всичките си корени u_k отрицателни. Оттук следва, че всички корени на (5) са имагинерни.

Общият интеграл на системата (4) е

$$(6) \quad \begin{cases} \psi_\nu = \sum_{k=1}^3 L_\nu (C_k \cos \varrho_k t + D_k \sin \varrho_k t) \\ \psi_\nu' = \sum_{k=1}^3 L_{\nu k} (-C_k \varrho_k \sin \varrho_k t + D_k \varrho_k \cos \varrho_k t) \end{cases} \quad (\nu = 1, 2, 3),$$

където $\varrho_k i$ ($k=1, 2, 3$) са корени на уравнението (5), които, както ще видим по-късно, са различни помежду си. $L_{\nu k}$ удовлетворява системата уравнения

$$(7) \quad \begin{cases} M_1(a_1 + u_k) L_{1k} + M_2 a_2 L_{2k} + M_3 a_3 L_{3k} = 0, \\ M_2 a_1 L_{1k} + M_2(a_2 + u_k) L_{2k} + M_3 a_3 L_{3k} = 0, \\ a_1 L_{1k} + a_2 L_{2k} + (a_3 + u_k) L_{3k} = 0, \end{cases}$$

за които детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix}$$

е отлична от нула

Съгласно цитираната работа в достатъчно близко съседство на стабилното равновесно положение, т. е. за достатъчно малко λ , на всеки корен на характеристичното уравнение (5), например $i\varrho_1$, и при начални условия

$$(8) \quad \begin{cases} \psi_\nu(0) = 0, \\ \psi_\nu'(0) = L_{\nu 1} \varrho_1 + \sum_{k=2}^3 L_{\nu k} \varrho_k \alpha_k \end{cases} \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

отговаря един интеграл на системата (3), който е периодична функция с период $\frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1}$, ако δ , α_2 и α_3 удовлетворяват системата уравнения

$$-L_{\nu 1} \delta + \sum_{k=1}^3 L_{\nu k} \alpha_k \sin \frac{\pi \varrho_k}{\varrho_1} + f_\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

Тук f_ν представлява степенно развитие спрямо λ , α_2 , α_3 и δ и ϱ_k ($k=2, 3$) не е кратно на ϱ_1 .

§ 2. Отделяне на корените на характеристичното уравнение

За целта на по-нататъшните изследвания необходимо е да се отделят корените на характеристичното уравнение (5а). Поради разнообразието на случаите, които се явяват в зависимост от масите и дължините на махалата, то за да фиксираме нашите мисли ще предположим, че дължините на махалата удовлетворяват неравенствата $a_1 > a_2 > a_3$. Аналогични изследвания ще имаме и при други съотношения на тези дължини.

От изразите

$$\begin{aligned} f(-a_1) &= -M_2^2 a_1 a_2 (a_3 - a_1) - M_2 M_3 a_1 a_3 (a_2 - a_1) + 2M_2 M_3 a_1 a_2 a_3, \\ f(-a_2) &= -M_1 M_3 a_2 a_3 (a_1 - a_2) - M_2^2 a_1 a_2 (a_3 - a_2) + 2M_2 M_3 a_1 a_2 a_3, \\ f(-a_3) &= -M_1 M_3 a_2 a_3 (a_1 - a_3) - M_2 M_3 (a_2 - a_3) a_1 a_3 + 2M_2 M_3 a_1 a_2 a_3 \end{aligned}$$

е ясно, че $f(-a_1) > 0$, а $f(-a_3) \geq 0$ в зависимост от подбора например на $M_1(m_1)$, т. е. $f(-a_2) < 0$ при достатъчно голямо m_1 , а $f(-a_2) > 0$ при достатъчно малко m_1 и при фиксирани m_2 и m_3 . $f(-a_3)$ е отрицателно, ако $f(-a_2) < 0$; обаче ако $f(-a_2) > 0$, $f(-a_3)$ може да бъде положително или отрицателно в зависимост от съотношението на трите маси.

От друга страна от зависимостта

$$u_1 + u_2 + u_3 = -(a_1 + a_2 + a_3)$$

следва, че $f[-(a_1 + a_2 + a_3)] < 0$. Прочее при $f(-a_2) < 0$ корените на характеристичното уравнение се отделят, както следва

$$-(a_1 + a_2 + a_3) < u_3 < -a_1 < u_2 < -a_2 < -a_3 < u_1 < 0,$$

а при $f(-a_2) > 0$ имаме двата случая:

$$\begin{aligned} &-(a_1 + a_2 + a_3) < u_3 < -a_1 < -a_2 < u_2 < -a_3 < u_1 < 0, \\ &-(a_1 + a_2 + a_3) < u_3 < -a_1 < -a_2 < -a_3 < u_2 < u_1 < 0 \end{aligned}$$

в зависимост от това дали $f(-a_3)$ е по-малко или по-голямо от нула

Тук ще разгледаме случая, когато $f(-a_2) < 0$. Останалите два случая могат да се третираат аналогично.

§. 3. Разположение на трите махала след началния момент около стабилното равновесно положение

При периодичните движения вертикалните компоненти на началните скорости на отделните маси на махалата са нули, а хоризонталната компонента на ν -та маса е

$$(9) \quad \sum_{k=1}^{\nu} a_k \varphi_k'(0) = \lambda \sum_{k=1}^{\nu} a_k \psi_k'(0) \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

За да се види какво е разположението след началния момент на системата математични махала спрямо стабилното равновесно положение ще изследваме отношенията на хоризонталните компоненти и отношенията на ъгловите скорости $\varphi_1'(0)$, $\varphi_2'(0)$, $\varphi_3'(0)$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Съгласно (8), за да намерим началните ъглови скорости $\varphi_k'(0)$ необходимо е да определим коефициентите $L_{\mu k}$ на уравненията (7). За тези коефициенти получаваме пропорцията

$$L_{1k} : L_{2k} : L_{3k} = \begin{vmatrix} M_2 a_2 & M_3 a_3 \\ M_2 (a_2 + u_k) & M_3 a_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} M_3 a_3 & M_1 (a_1 + u_k) \\ M_3 a_3 & M_2 a_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} M_1 (a_1 + u_k) & M_2 a_2 \\ M_2 a_1 & M_2 (a_2 + u_k) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} M_2 a_2 & M_3 a_3 \\ a_2 & a_3 + u_k \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} M_3 a_3 & M_1(a_1 + u_k) \\ a_3 + u_k & a_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} M_1(a_1 + u_k) & M_2 a_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} M_2(a_2 + u_k) & M_3 a_3 \\ a_2 & a_3 + u_k \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} M_3 a_3 & M_2 a_1 \\ a_3 + u_k & a_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} M_2 a_1 & M_2(a_2 + u_k) \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Като вземем пред вид, че пропорционалният множител може накрая да се абсорбира в параметъра λ , то от третата пропорция добиваме

$$\begin{aligned}
L_{1k} &= M_2 u_k^2 + M_2(a_2 + a_3) u_k + m_2 a_2 a_3 = \tau(u_k), \\
L_{2k} &= -a_1(m_2 a_3 + M_2 u_k) = -a_1 \omega(u_k), \\
L_{3k} &= -M_2 a_1 u_k.
\end{aligned}$$

Понеже a_2 и a_3 клонят към нула заедно с λ , то началните скорости за корена ϱ_k са:

$$(10) \quad \begin{cases} \varphi_1'(0) = \lambda \psi_1'(0) = \lambda [M_2 u_k^2 + M_2(a_2 + a_3) u_k + m_2 a_2 a_3] \varrho_k + o(\lambda), \\ \varphi_2'(0) = \lambda \psi_2'(0) = -\lambda a_1 [m_2 a_3 + M_2 u_k] \varrho_k + o(\lambda), \\ \varphi_3'(0) = \lambda \psi_3'(0) = -\lambda M_2 a_1 u_k \varrho_k + o(\lambda) \end{cases}$$

гдето $\varrho_k = \sqrt{\frac{g}{-u_k}}$ ($k = 1, 2, 3$).

Като вземем пред вид, че $|u_1| < |u_2| < |u_3|$, то $\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3$. Оттук следва, че ϱ_2 и ϱ_3 не могат да бъдат кратни на ϱ_1 , което показва съществуването на една фамилия периодични решения с приблизителен период $\frac{2\pi}{\varrho_1}$. Изобщо съществува втора фамилия периодични движения с приблизителен период $\frac{2\pi}{\varrho_2}$, която представлява по-бавно (средно) люление от първото. Само в изключителен случай, когато $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ е цяло число не можем да бъдем сигурни за съществуването им. Най-сетне изобщо съществува трета фамилия периодични решения с приблизителен период $\frac{2\pi}{\varrho_3}$, която представлява най-бавното люление на разгледаната система махала. Обаче в изключителния случай, когато $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ или $\frac{\varrho_2}{\varrho_3}$ е цяло, не можем да бъдем сигурни в съществуването на такова люление.

*а) Фамилия периодични движения, зависящи от u_1
(бързо люление)*

Като вземем пред вид формулите (10), отношенията на ъглите φ_1^0 , φ_2^0 и φ_3^0 , които трите махала, при $\lambda \rightarrow 0$ и след началния момент, образуват с положителната посока на оста y , са следните

$$\frac{\varphi_1^0}{\varphi_2^0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\varphi_1'(0)}{\varphi_2'(0)} = \frac{M_2 u_1^2 + M_2(a_2 + a_3)u_1 + m_2 a_2 a_3}{-a_1(m_2 a_3 + M_2 u_1)} = \frac{\tau(u_1)}{-a_1 \omega(u_1)},$$

$$(11) \quad \frac{\varphi_2^0}{\varphi_3^0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\varphi_2'(0)}{\varphi_3'(0)} = \frac{m_2 a_3 + M_2 u_1}{M_2 u_1} = \frac{\omega(u_1)}{M_2 u_1}.$$

За да намерим знаците на тези отношения, ще покажем, че

$$\begin{aligned} \tau(u_1) &= M_2 u_1^2 + M_2(a_2 + a_3)u_1 + m_2 a_2 a_3 \\ \omega(u_1) &= m_2 a_3 + M_2 u_1 \end{aligned}$$

са положителни. За тази цел ще докажем най-напред, че $-\frac{m_2}{M_2} a_3 < \alpha$, където α е по-големият корен на уравнението $\tau(u) = 0$, т. е.

$$\alpha = -\frac{a_2 + a_3}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_2 + a_3}{2}\right)^2 - \frac{m_2}{M_2} a_2 a_3}.$$

Наистина $\tau(u)$ при $u = -\frac{m_2}{M_2} a_3$ има отрицателна стойност,

$$\tau\left(-\frac{m_2}{M_2} a_3\right) = -\frac{m_2 m_3}{M_2} a_3^2,$$

което показва, че действително $-\frac{m_2}{M_2} a_3$ е по-малко от α .

За да докажем сега, че $\tau(u_1) > 0$ ще покажем, че коренът u_1 на характеристичното уравнение (5а) се намира между α и 0.

Наистина лявата страна на характеристичното уравнение (5а) при $u = \alpha$ е

$$f(\alpha) = -M_2 a_1 [a_2 a_3 m_2 + (M_2 a_2 + M_3 a_3) \alpha].$$

Като вземем пред вид тъждеството

$$M_2 \alpha^2 + M_2(a_2 + a_3)\alpha + m_2 a_2 a_3 \equiv 0,$$

последният израз добива вида

$$f(\alpha) = M_2 a_1 \alpha (M_2 \alpha + m_2 a_3).$$

Този израз е отрицателен,¹ тъй като вторият множител $M_2 \alpha + m_2 a_3$ въз основа на неравенството $-\frac{m_2}{M_2} a_3 < \alpha$ е положителен.

Това показва, че действително коренът u_1 се намира в интервала $(\alpha, 0)$, откъдето следва, че изразът $\tau(u_1) > 0$, понеже α е по-големият корен на $\tau(u) = 0$.

От друга страна от установените по-горе неравенства $u_1 > \alpha > -\frac{m_2}{M_2} a_3$ се вижда непосредствено, че и първият израз $\omega(u_1) = m_2 a_3 + M_2 u_1$ е положителен.

¹ $f(\alpha) < 0$ показва, че корените на характеристичното уравнение (5а) при каквото и да е съотношение на трите дължини a_1, a_2, a_3 са отделни, както следва: $-(a_1 + a_2 + a_3) < u_3 < -a < u_2 < \alpha < u_1 < 0$, където a е най-голямото между a_1, a_2, a_3 . От това отделяне на корените заключаваме, че всички корени на характеристичното уравнение на три последователно свързани математични махала са различни помежду си.

И тъй понеже $\tau(u_1)$ и $\omega(u_1)$ са положителни, от (11) вадим заключение, че

$$\frac{\varphi_1^0}{\varphi_2^0} < 0, \quad \frac{\varphi_2^0}{\varphi_3^0} < 0,$$

За да видим сега какво е разположението след началния момент на масите m_1 , m_2 и m_3 на трите махала спрямо стабилното равновесно положение, достатъчно е да изследваме отношенията на хоризонталните компоненти на началните скорости s_1^0 , s_2^0 и s_3^0 при $\lambda \rightarrow 0$

Според (9) тези отношения са:

$$\frac{s_1^0}{s_2^0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{a_1 \varphi_1'(0)}{a_1 \varphi_1'(0) + a_2 \varphi_2'(0)} = \frac{M_2 u_1^2 + M_2(a_2 + a_3)u_1 + m_2 a_2 a_3}{M_2 u_1(a_3 + u_1)} = \frac{\tau(u_1)}{M_2 u_1(a_3 + u_1)},$$

$$\frac{s_2^0}{s_3^0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{a_1 \varphi_1'(0) + a_2 \varphi_2'(0)}{a_1 \varphi_1'(0) + a_2 \varphi_2'(0) + a_3 \varphi_3'(0)} = \frac{a_3 + u_1}{u_1}.$$

Десните изрази показват, че и двете отношения $\frac{s_1^0}{s_2^0}$ и $\frac{s_2^0}{s_3^0}$ са отрицателни.

И тъй бързото периодично люлеене характеризира неравенствата

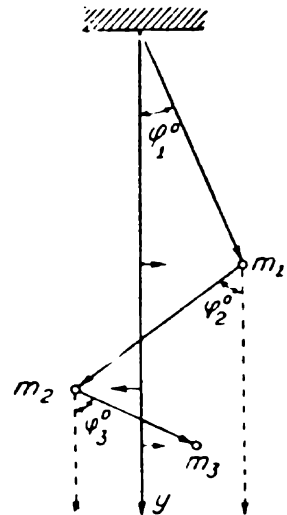
$$\omega(u_1) > 0, \quad \tau(u_1) > 0,$$

$$\frac{\varphi_1^0}{\varphi_2^0} < 0, \quad \frac{\varphi_2^0}{\varphi_3^0} < 0,$$

$$\frac{s_1^0}{s_2^0} < 0, \quad \frac{s_2^0}{s_3^0} < 0,$$

които определят разположението на трите махала след началния момент.

Оттук можем да направим следния интересен извод: при бързото периодично люлеене масите на махалата след началния момент не могат да бъдат разположени и трите от едната страна на стабилното равновесно положение. Масите на последните две махала се намират винаги от различни страни на равновесното положение.



Фиг. 1

б) Фамилия периодични движения, зависящи от u_2 (средно люлеене)

Тук за отношенията на ъглите φ_1^0 , φ_2^0 , φ_3^0 и за отношенията на началните скорости s_1^0 , s_2^0 , s_3^0 имаме следните изрази:

$$\frac{\varphi_1^0}{\varphi_2^0} = \frac{M_2 u_2^2 + M_2(a_2 + a_3)u_2 + m_2 a_2 a_3}{-a_1(m_2 a_3 + M_2 u_2)} = \frac{\tau(u_2)}{-a_1 \omega(u_2)},$$

$$\frac{\varphi_2^0}{\varphi_3^0} = \frac{m_3 a_3 + M_2 u_2}{M_2 u_2} = \frac{\omega(u_2)}{M_2 u_2},$$

$$\frac{s_1^0}{s_3^0} = \frac{M_2 u_2^2 + M_2(a_2 + a_3)u_2 + m_2 a_2 a_3}{M_2 u_2(a_3 + u_2)} = \frac{\tau(u_2)}{M_2 u_2(a_3 + u_2)},$$

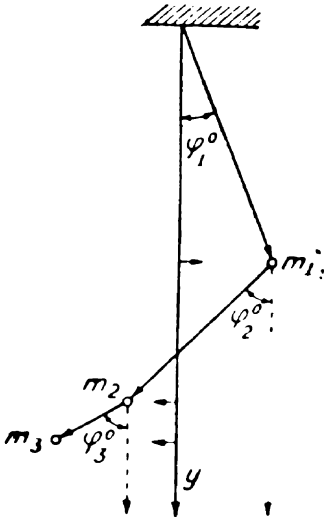
$$\frac{s_2^0}{s_3^0} = \frac{a_3 + u_2}{u_2}.$$

Понеже u_2 се намира между $-a_1$ и $-a_2$, то ясно е, че $\omega(u_2) < 0$, и следователно, винаги $\frac{\varphi_2^0}{\varphi_3^0} > 0$ и $\frac{s_2^0}{s_3^0} > 0$. От друга страна, като вземем

пред вид, че характеристичното уравнение може да се напише във вида

$$M_1(a_1 + u)\tau(u) - M_2 a_1 a_2 \omega(u) - M_3 m_3 a_1 a_3 u = 0,$$

като заместим u с корена u_2 , видим заключение, че $\tau(u_2)$ е отрицателно, тъй като вторият и третият член на това уравнение са положителни. Следователно, тук се явява случаят, показан на фигура 2,



Фиг. 2

$$\frac{\varphi_1^0}{\varphi_2^0} < 0, \quad \frac{\varphi_2^0}{\varphi_3^0} > 0, \quad |\varphi_2^0| < |\varphi_3^0|,$$

$$\frac{s_1^0}{s_2^0} < 0, \quad \frac{s_2^0}{s_3^0} > 0.$$

И тъй можем да заключим, че при средното периодично люлене масите на последните две махала започват да се движат винаги от едната страна на стабилното равновесно положение.

с) *Фамилия периодични движения, зависящи от u_3 (бавно люлене)*

Тук имаме

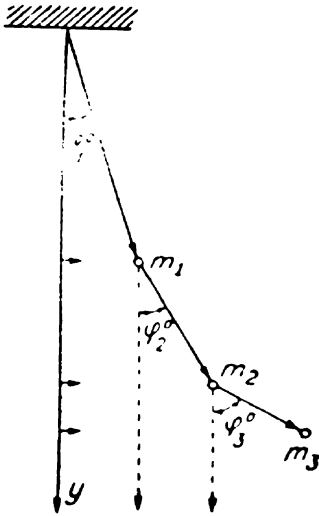
$$\frac{\varphi_1^0}{\varphi_2^0} = \frac{\tau(u_3)}{-a_1 \omega(u_3)}, \quad \frac{\varphi_2^0}{\varphi_3^0} = \frac{\omega(u_3)}{M_2 u_3};$$

$$\frac{s_1^0}{s_2^0} = \frac{\tau(u_3)}{M_2 u_3(a_3 + u_3)}, \quad \frac{s_2^0}{s_3^0} = \frac{a_3 + u_3}{u_3}.$$

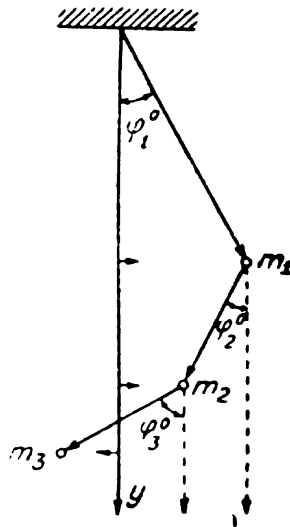
Като заместим в (5а) u с u_3 и имаме пред вид, че $u_3 < -a_1$ и $\omega(u_3) < 0$, ясно е, че за да бъде u_3 корен на характеристичното уравнение, трябва $\tau(u_3) > 0$. Това показва, че и тук имаме един единствен случай, показан от фигура 3,

$$\frac{\varphi_1^0}{\varphi_2^0} > 0, \quad \frac{\varphi_2^0}{\varphi_3^0} > 0, \quad |\varphi_2^0| < |\varphi_3^0|,$$

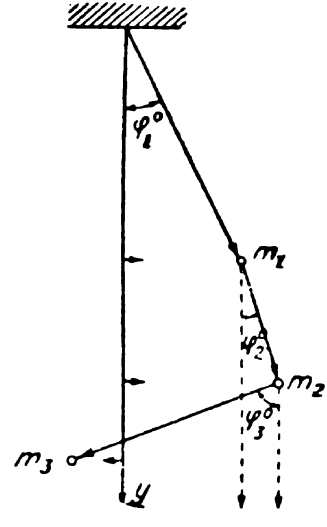
$$\frac{s_1^0}{s_2^0} > 0, \quad \frac{s_2^0}{s_3^0} > 0.$$



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Прочее при бавното периодично люлене трите маси започват да се движат от едната страна на стабилното равновесно положение.

Останалите два случая, които се характеризират с $(f - a_2) > 0$, се третират по същия начин и дават за бързото, средното и бавното люлеене същите конфигурации, с изключение само при средното люлеене, когато u_2 се намира между $-a_2$ и 0. В този случай разположението на трите махала след началния момент и при $\lambda \rightarrow 0$ е дадено с фигура 4, съответно с фигура 5, в зависимост от това, дали $f\left(-\frac{m_2}{M_2} a_3\right) \geq 0$, т. е. дали масата m_1 или m_2 е достатъчно малка.

Аналогични изследвания ще се получат, ако изберем предварително друго съотношение за дължините на махалата. Същият въпрос ще представлява интерес, ако трите махала се люлеят около положението на лабилното равновесие.

ПОЛОЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ТРЕХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МАЯТНИКОВ, НАХОДЯЩИХСЯ НА ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ЕЕ ДВИЖЕНИИ ВОКРУГ ПОЛОЖЕНИЯ УСТОЙЧИВОГО РАВНОВЕСИЯ

Г. Брадистиллов

РЕЗЮМЕ

В одной своей прежней работе я рассмотрел систему n последовательно соединенных физических маятников, которые вращаются вокруг параллельных осей, и доказал существование семейств (сетей) периодических движений этой системы вокруг положения устойчивого равновесия. В настоящей работе я исследую вопрос, каково будет положение системы трех последовательно соединенных математических маятников при периодическом их движении вокруг положения устойчивого равновесия после начального момента.

Уравнения движения системы при $\varphi = \lambda\psi$ следующие:

$$M_\nu \sum_{k=1}^{\nu} a_k [\cos(\psi_\nu - \psi_k) \psi_k'' + \sin \lambda (\psi_\nu - \psi_k) \cdot \psi_k'^2] + \\ + \sum_{k=\nu+1}^3 M_k a_k [\cos \lambda (\psi_\nu - \psi_k) \cdot \psi_k'' + \sin \lambda (\psi_\nu - \psi_k) \psi_k'^2] = -gM_\nu \psi_\nu + \\ + \lambda g M_\nu \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{2n-3} \psi_\nu^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

Эта система при $\lambda=0$ обращается в линейную

$$M_\nu \sum_{k=1}^{\nu} a_k \varphi_k'' + \sum_{k=\nu+1}^3 M_k a_k \psi_k'' = -gM_\nu \psi_\nu,$$

характеристическое уравнение которой следующее

$$f(u) = \begin{vmatrix} M_1(a_1 + u) & M_2 a_2 & M_3 a_3 \\ M_2 a_1 & M_2(a_2 + u) & M_3 a_3 \\ M_3 a_1 & M_3 a_2 & M_3(a_3 + u) \end{vmatrix} = 0, \text{ где } \varrho^2 = \frac{g}{u}.$$

Если предположит, что длины a_k маятников удовлетворяют неравенствам $a_1 > a_2 > a_3$ и кроме того $f(-a_2) < 0$, то корни характеристического уравнения отделяются следующим образом:

$$-(a_1 + a_2 + a_3) < u_3 < -a_1 < u_2 < -a_2 < -a_3 < u_1 < 0.$$

В этом случае рассматриваем только положение системы трех маятников относительно положения устойчивого равновесия.

Если обозначим $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0$ углы, которые эти три маятника образуют при $\lambda \rightarrow 0$ и после начального момента с положительным направлением оси y , а через s_1^0, s_2^0, s_3^0 горизонтальные компоненты начальных скоростей при $\lambda \rightarrow 0$, то между этими величинами находим следующие отношения:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1^0}{\varphi_2^0} &= \frac{M_2 u_k^2 + M_3 (a_2 + a_3) u_k + m_2 a_2 a_3}{-a_1 (m_2 a_3 + M_2 u_k)} = \frac{\tau(u_k)}{-a_1 \omega(u_k)}, \\ \frac{\varphi_2^0}{\varphi_3^0} &= \frac{m_2 a_3 + M_2 u_k}{M_2 u_k} = \frac{\omega(u_k)}{M_2 u_k}, \\ \frac{s_1^0}{s_2^0} &= \frac{\tau(u_k)}{M_2 u_k (a_3 + u_k)}, \\ \frac{s_2^0}{s_3^0} &= \frac{a_3 + u_k}{u_k}, \end{aligned}$$

где $k=1, 2, 3$. На основании этих отношений характеризуем $\lambda \rightarrow 0$ и после начального момента положение системы трех математических маятников при периодическом их движении относительно положения устойчивого равновесия.

Именно при быстром периодическом колебании, зависящем от корня u_1 , соответствует конфигурация, данная на фигура 1. Интересно отметить, что при этом колебании массы двух последних маятников находятся по разные стороны по отношению к положению равновесия.

При среднем и медленном периодическом колебании, зависящих соответственно от корней u_2 и u_3 , имеем конфигурации, данные на фигура 2 и 3.

Отметим, что при среднем периодическом колебании массы двух последних маятников двигаются всегда с одной стороны положения устойчивого равновесия, а при медленном периодическом колебании три массы начинают движение с одной стороны.