ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ИНТЕГРАЛИ, КОИТО ПРЕДСТАВЯТ ЦЕЛИ ФУНКЦИИ СЪС САМО РЕАЛНИ НУЛИ

от Любомир Илиев

1. Да означим с E съвокупността на функциите $f(t)$, дефинирани, неотрицателни, R-интегруеми в интервала $[0, a]$, за които цялата функция

$$(F) \quad F(z)=\int_0^a f(t)\cos tz\,dt, \quad a>0$$

има само реални нули.

Нека $x=x(t)$ е четен полином на t или четна цяла функция, така че

а) $x(a)=0$, $a>0$,

б) $x'(it)$ е полином, който има само реални нули или е цяла функция, граница на такива полиноми.

Направените предположения за функцията $x(t)$ осигуряват някои допълнителни нейни свойства. Така от тия предположения се вижда, че коефициентите на $x(t)$ до един постоянен комплексен множител са реални. Ако отстраним този евентуален множител, виждаме, че $x(t)$ удовлетворява условието:

в) може да се предположи винаги, че коефициентите на $x(t)$ са реални.

Освен това, съгласно условията б) и в), $x'(t)$ е с реални коефициенти и има нули само върху имагинерната ос. Тъй като $x'(0)=0$, то в интервала $(-\infty, 0)$ $x'(t)$ запазва един постоянен знак, а в интервала $(0, +\infty)$ запазва постоянно обратния знак. Следователно, получихме условието:

г) във всеки от интервалите $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ функцията $x(t)$ или само стриктно расте или само стриктно намалява.

От условието б) следва, че $x'(a)\neq 0$. Като вземем пред вид и условието г), получаваме:

д) $x(t)$ има само две реални нули: $t_1=a$ и $t_2=-a$. Тези нули са прости.

Тъй като съгласно условието г) в интервала $[0, a]$ функцията $x(t)$ е стриктно монотонна, тя допуща обратна функция. Нека $t=t(x)$ е обратната функция на $x(t)$ в интервала $[0, a]$.

Да означим с $A(a)$ класата на четните, реални функции, които удовлетворяват условията а) и б). Съгласно доказаното, функциите от класата $A(a)$ допущат в интервала $[0, a]$ обратна функция $t=t(x)$.

Нека $f_0(t)\varepsilon E$, $x(t)\varepsilon A(a)$ и $t=t(x)$ е обратната функция на $x(t)$ в интервала $[0, a]$. Да положим:

$$\varphi_0(x)=f_0(t), \qquad f_1(t)=\varphi_1(x)=\int_0^x \varphi_0(x)dx.$$

Намирането на функцията $f_1(t)$ от функциите $f_0(t)$ и $x(t)$ чрез последните равенства ще наричаме извършване на операцията L и ще означаваме

$$f_1(t)=L(f_0, x).$$

Сега ще установим следната

Теорема I. Ако $f_0(t)\varepsilon E$, $x(t)\varepsilon A(a)$ и $f_1(t)=L(f_0, x)$, то $f_1(t)\varepsilon E$.

Доказателство. Тъй като $f_0(t)\varepsilon E$, то цялата функция

$$F_0(z)=\int_0^a f_0(t)\cos tz dt$$

има само реални нули. Да продължим функцията $f_0(t)$ и в интервала $[-a, 0]$ като четна, т. е. нека $f_0(-t)=f_0(t)$ при $0\leq t\leq a$. Тогава:

$$F_0(z)=\frac{1}{2}\int_{-a}^a f_0(t)e^{itz}dt.$$

Съгласно условието б) и един резултат на G. Pólya [1], цялата функция

$$\int_{-a}^a f_0(t)x'(t)e^{itz}dt=2i\int_0^a f_0(t)x'(t)\sin tz\,dt$$

ще има само реални нули.

Но

$$\int_0^a f_0(t)x'(t)\sin tz\,dt=\int_0^a \varphi_0(x)\sin tz\,dx=\int_0^a \sin tz\,d\varphi_1(x)$$

$$=\sin tz\,.\,\varphi_1(x)\Big|_0^a-z\int_0^a \varphi_1(x)\cos tz\,dt=-z\int_0^a f_1(t)\cos tz\,dt,$$

тъй като $\varphi_1[x(a)]=\varphi_1(0)=0$. Теоремата е доказана.

2. Доказаната теорема дава възможност от всяка цяла функция, представена във вида (F), която има само реални нули, да получим нова функция със същото свойство. От възможните приложения и нови случаи ще се спрем на следните.

Нека функцията $x(t)\varepsilon A(a)$ изпълнява и следното допълнително условие: а′) $x(0)>0$. В такъв случай $x(t)$ е намаляваща функция в интервала $[0, a]$, а $x^{-\alpha}$, гдето $0\leq\alpha<1$ е растяща функция в същия интервал. Съгласно една теорема на G. Pólya [2], функцията $f_0(t)=$

$=x^{-a}$ принадлежи на класата E. Но в такъв случай $\varphi_0(x)=x^{-a}$ и $(1-a)f_1(t)=(1-a)\varphi_1(x)=x^{1-a}$; въобще $(1-a)(2-a)\ldots(n-a)f_n(t)=x^{n-a}$ е функция, която съгласно теорема I принадлежи на класата E. Ако $\lambda>-1$, винаги могат да се намерят едно неотрицателно цяло число n и едно a, $0<a<1$ така че $\lambda=n-a$. Така от теорема I получаваме следното

Следствие. Ако $x(t)\varepsilon A(a)$ и $x(0)>0$, то при произволно $\lambda>-1$ цялата функция

$$\int_0^a x^\lambda \cos tz\,dt$$

има само реални нули.

При различни функции $x(t)$ от това следствие се получават интересни резултати. Така, очевидно функцията $x(t)=1-t^{2q}$, гдето q е цяло положително число, принадлежи ка класата $A(1)$ и $x(0)=1>0$. От следствието получаваме известния резултат на G. Pólya [1], според който нулите на цялата функция

$$\int_0^1 (1-t^{2q})^\lambda \cos tz\,dt$$

при $\lambda>-1$ и q цяло положително число са реални.

3. Нека $f(t)$ е четен реален полином, така че $f'(it)$ да има само реални нули. В такъв случай $f'(t)$ запазва постоянен знак в интервала $(0,+\infty)$ и следователно $f(t)$ е стриктно монотонна функция в същия интервал. Тъй като и $f''(t)\neq 0$ за $0<t<+\infty$, то или $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=+\infty$ или $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=-\infty$. В първия случай чрез прибавяне на подходяща константа винаги можем да предположим, че $f(t)\geq 0$, а във втория — че $f(t)\leq 0$ за всяко t. Нека $f(t)\geq 0$. Ако $n>f(0)$ е произволно положително число поради $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=+\infty$ съществува число $a_n>0$, така че $f(a_n)=n$. Числото a_n е единствено и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$. Следователно, функцията $1-\dfrac{f(t)}{n}\varepsilon\ A(a_n)$ и съгласно следствието цялата функция

$$\int_0^{a_n} \left(1-\frac{f(t)}{n}\right)^n \cos tz\,dt$$

има само реални нули.

Тъй като в интервала $0\leq t\leq a_n$ имаме неравенствата $0\leq\left(1-\dfrac{f(t)}{n}\right)^n<e^{-f(t)}$, то при $n\to\infty$ получаваме, че цялата функция

$$\int_0^\infty e^{-f(t)} \cos tz\,dt$$

има само реални нули. Оттук с граничен преход получаваме:

Теорема II. Ако $f(t)$ е четна неотрицателна функция такава, че $f'(it)$ е полином, който има само реални нули или е цяла, граница на такива полиноми, цялата функция

$$\int_0^\infty e^{-f(t)} \cos tz \, dt$$

има само реални нули.

Функцията $f(t) = \frac{a}{2}(e^t + e^{-t}) = a \operatorname{ch} t$, $a > 0$ удовлетворява условията на теорема II. Така получаваме известния резултат на G. Pólya [3], който е свързан с изследването на нулите на Riemann-овата функция $\xi(z)$ и според който нулите на цялата функция

$$\xi^*(z) = \int_0^\infty e^{-a \operatorname{ch} t} \cos tz \, dt$$

са реални.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Pólya, Journal für r. u. a. Math. т. 158 (1927), стр. 6.
2. G. Pólya, Math. Zeitschrift, т. 2 (1918), стр. 352.
3. G. Pólya, Acta mathematica, т. 48 (1926), стр. 305.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ, ИМЕЮЩИЕ ТОЛЬКО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ НУЛИ

Л. Илиев

РЕЗЮМЕ

Пусть $x(t)$ четная, действительная функция, которая удовлетворяет условиям:

а) $x(a)=0$, $a>0$,

б) $x'(it)$—многочлен, имеющий только действительные нули или целая функция — предел таких многочленов.

Легко видеть, что $x(t)$ допускает обратную функцию в интервале $[0, a]$.

В настоящем сообщении доказаны следующие результаты:

Теорема I. Пусть $f_0(t)$ неотрицательная интегруемая функция в интервале $[0, a]$, $a>0$ для которой целая функция

$$\int_0^a f_0(t)\cos tz\,dt$$

имеет только действительные нули и $x(t)$ действительная, четная функция, удовлетворяющая условиям а) и б).

Если $t=t(x)$ обратная функция $x(t)$ в интервале $[0, a]$ и если положить

$$f_0(t)=\varphi_0(x),\quad f_1(t)=\varphi_0(x)=\int_0^x \varphi_0(x)\,dx,$$

то целая функция

$$\int_0^a f_1(t)\cos tz\,dt$$

имеет только действительные нули.

Из этой теоремы непосредственно получаем следующее

Следствие. Если $x(t)$ четная, действительная функция, удовлетворяющая условиям а), б) и дополнительному условию $a')$ $x(0)>0$, то при $\lambda>-1$, целая функция

$$\int_0^a x^\lambda \cos tz\,dt$$

имеет только действительные нули.

Наконец установливаем следующую теорему:

Теорема II. Если $f(t)$ четная, неотрицательная функция, так что $f'(it)$ мночоглен, имеющий только действительные нули или является целой функцией — пределом таких многочленов, то целая функция

$$\int_0^\infty e^{-f(t)} \cos tz\,dt$$

имеет только действительные нули.

TRIGONOMETRISCHE INTEGRALE, DIE GANZE FUNKTIONEN MIT NUR REELLEN NULLSTELLEN DARSTELLEN

Ljubomir Ilieff

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit wird die Realität der Nullstellen gewisser ganzen Funktionen von der Gestalt

$$\int_0^a f(t) \cos tz \, dt$$

festgestellt. Als Folgerung bekommt man die Ergebnisse:

1. Wenn $x(t)$ eine reelle gerade Funktion bezeichnet, so dass $x'(it)$ ein Polynom mit nur reellen Nullstellen oder eine Grenze solcher Polynome ist und wenn $x(a)=0$ ist, so hat die ganze Funktion

$$\int_0^a x^\lambda(t) \cos tz \, dt$$

wo $\lambda > -1$, nur reelle Nullstellen.

2. Wenn $f(t)$ eine positive gerade Funktion bezeichnet, so dass $f'(it)$ ein Polynom mit nur reellen Nullstellen oder eine Grenze solcher Polynome ist, so besitzt die ganze Funktion

$$\int_0^\infty e^{-f(t)} \cos tz \, dt$$

nur reelle Nullstellen.