ИЗОМЕТРИЯ МЕЖДУ ДВЕ ПОВЪРХНИНИ НА МОНЖ

от Боян Петканчин

В нашата работа [1] (цитирвана нататък като ИРП) ние изследвахме тъй наречените от нас **общи изотропни роеве прави** в комплексното триизмеримо Евклидово пространство. Съвкупността от точките върху правите на един такъв рой е неразвиваема праволинейна повърхнина, която ще наричаме **повърхнина на Монж** съгласно установената терминология. В настоящата работа разглеждаме изометриите между две повърхнини на Монж; при това ще използуваме означенията и резултатите от ИРП, като ще припомним накратко някои от тях.

1. В комплексното триизмеримо Евклидово пространство избираме фиксирана ортогонална координатна система K_0. Нека една точка е дадена с радиус-вектора си $x = x(u)$ спрямо началото на K_0; освен това е даден **изотропен** вектор $p = p(u)$. Така е определена точно една права $g = g(u)$, върху която лежат x и p. Комплексният параметър u се мени в една проста област U_0 на своята Гаусова равнина и $x(u)$, $p(u)$ са холоморфни функции на u в U_0. Предполагаме, че за всяко u от U_0 важи неравенството

$$(px_1)(p_1p_2) - p_1^2[(p_1x_1) + (px_2)] \neq 0. \tag{1}$$

Тук долните индекси означават производни спрямо u, например

$$x_1 = \frac{dx}{du}, \quad p_2 = \frac{d^2p}{du^2}, \dots$$

$(px_1) = px_1$, $p_1^2 = p_1p_1, \dots$ са скаларните произведения на съответните вектори. Когато u се мени в U_0, правата $g(u)$ описва една съвкупност G_0 от изотропни прави, която именно наричаме **общ изотропен рой**. Поради изотропността на p имаме

$$p \neq o, \ p^2 = 0 \text{ за всяко } u \text{ от } U_0.$$

По-нататък от (1), като се вземе пред вид, че изразът отляво може да се напише във вида

$$\frac{1}{2}(px_1)(p_1^2)_1 - p_1^2(p_1x_1)_1,$$

следва, че в достатъчно малка проста подобласт U на U_0 важат неравенствата

$$p_1^2 \neq 0,\ px_1 \neq 0. \tag{2}$$

Ние се ограничаваме нататък върху частта G от роя G_0, чиито прави се получават, когато u се мени само в U; разбира се G е също общ изотропен рой. От (2) поради

$$(pp_1x_1)^2 = -p_1^2 (px_1)^2 \tag{3}$$

следва, че роят G е неразвиваем; тук (pp_1x_1) е смесеното произведение на трите вектора.

Означаваме с $\sqrt{p_1^2}$ еднозначната холоморфна функция на u в U, която се определя от

$$(pp_1x_1) = i\ \sqrt{p_1^2}.\ (px_1). \tag{4}$$

От формули (25) на ИРП знаем, че за роя G може да се въведе естествен параметър σ чрез

$$\sigma = \int_{u_0}^{u} \frac{(px_1)(p_1p_2) - p_1^2[(p_1x_1)+(px_2)]}{p_1^2(px_1)}\, du, \tag{5}$$

където u_0 е произволна, но фиксирана стойност на u от U. По-нататък върху правата $g=g(u)$ от G имаме инвариантно свързана с роя централна точка

$$z = x + \frac{p_1^2x_1^2 + (p_1x_1)(px_2) - (px_1)(p_1x_2)}{(px_1)(p_1p_2) - p_1^2(p_1x_1) - p_1^2(px_2)} \cdot p \tag{6}$$

(ИРП (22)). Най-после за изотропния вектор върху g се установява инвариантно нормиране, като вместо p върху g се взима векторът

$$e = \frac{p}{(pz')} \tag{7}$$

(ИРП (26)).

Нататък предполагаме произволната права $g=g(\sigma)$ от роя G зададена с централната точка $z=z(\sigma)$ (вместо с произволната точка x), с изотропния вектор $e=e(\sigma)$ (вместо с произволен вектор p), като за параметър е избран естественият σ (вместо произволния u). Параметърът σ се мени в проста област Σ (вместо U) на своята Гаусова равнина и за всяко σ от Σ важат:

$$\begin{gathered} e^2=0,\ ez'=1,\ e'e''=e'^2,\ e'^2z'^2-(e'z')^2-e'z''=0; \\ (ee'z')=i\sqrt{e'^2} \end{gathered} \tag{8}$$

(ИРП (27)); тук означават производни спрямо естествения параметър σ.

Основни инварианти на роя са величините

$$R = \frac{1}{\sqrt{e'^2}}, \quad S = \sqrt{z'^2}, \quad T = e'z'. \tag{9}$$

Тук $\sqrt{e'^2}$ има стойността от (8), а за $\sqrt{z'^2}$ избираме един от двата еднозначни клона в Σ. Величините R^2, S^2, T определят роя еднозначно до еднаквост, ако са дадени като функции на σ. Величината

$$R = R_0 e^{-\sigma} \tag{10}$$

е радиусът на оскулачната сфера на роя за правата $g(\sigma)$ (R_0—за правата $g(0)$); за нея

$$R' = -R. \tag{10'}$$

За роя са в сила важните формули за производните (формули на Френе):

$$e'' = (T' - T)e + (T+1)e' - \frac{1}{R^2}z', \quad z'' = SS'e + S^2 e' - Tz' \quad \text{(ИРП (43))}. \tag{11}$$

2. Съвкупността Γ от точките върху правите на роя G е една неразвиваема праволинейна повърхнина, която ще наричаме **повърхнина на Монж**. За нея имаме параметрично представяне

$$y = y(\sigma, v) = z + ve; \tag{12}$$

y е радиус-векторът относно началото на K_0 на произволна точка от повърхнината, а параметри върху Γ са σ и v; σ се мени в Σ, а v—в цялата си Гаусова равнина. От (12) намираме

$$y_\sigma = z' + ve', \quad y_v = e$$

и оттук израза за линейния елемент на Γ:

$$ds^2 = \left(\frac{v^2}{R^2} + 2Tv + S^2\right)d\sigma^2 + 2d\sigma\, dv. \tag{13}$$

От (13) (или пък ако изчислим и втората основна форма на Γ) лесно получаваме тоталната кривина

$$K = \frac{1}{R^2} = \frac{e^{2\sigma}}{R_0^2} \tag{14}$$

на Γ; виждаме, че тя е функция само на σ.

Нека сега са дадени две повърхнини Γ и $\bar{\Gamma}$ на Монж, като за правите $g = g(\sigma)$ и $\bar{g} = \bar{g}(\bar{\sigma})$ на съответните рoеве G и $\bar{G}$ имаме определящи елементи

$$\begin{aligned} &e = e(\sigma), \quad z = z(\sigma); \\ &\bar{e} = \bar{e}(\bar{\sigma}), \quad \bar{z} = \bar{z}(\bar{\sigma}). \end{aligned} \tag{15}$$

σ се мени в проста област Σ, съдържаща $\sigma = 0$; $\bar{\sigma}$ се мени в проста област $\bar{\Sigma}$, съдържаща $\bar{\sigma} = 0$. Всички величини и елементи, отнасящи се до $\overline{\Gamma}$ (и $\overline{G}$), означаваме със същите букви, както аналогичните за Γ (и G), но с черта отгоре.

Да предположим, че Θ е една изометрия на Γ върху $\overline{\Gamma}$, представена аналитично с

$$\bar{\sigma}=\bar{\sigma}(\sigma,\ v),\quad \bar{v}=\bar{v}(\sigma,\ v). \tag{16}$$

В съответните точки $(\sigma,\ v)$ и $(\bar{\sigma},\ \bar{v})$ трябва да имаме равни тотални кривини:

$$\frac{1}{R_0^2}\ e^{2\sigma}=\frac{1}{\bar{R}_0^2}\cdot\ e^{2\bar{\sigma}}.$$

Оттук се вижда, че

$$\bar{\sigma}=\sigma+\text{const}. \tag{17}$$

Полученото равенство показва, че на всички точки от Γ, които лежат върху една праволинейна образуваща ($\sigma=\text{const}$) отговарят при изометрията точки на $\overline{\Gamma}$, които също лежат на една образуваща ($\bar{\sigma}=\text{const}$). Значи изометрията Θ на Γ върху $\overline{\Gamma}$ поражда съответствие Θ_0 на роя G върху роя $\overline{G}$, представено аналитично със (17). При това тъй като началните прави за мерене на естествените параметри в G и $\overline{G}$ можем да избираме произволно, можем да считаме, че в (17) константата е 0; именно за това е достатъчно да изберем за начални прави $g(0)$ и $\bar{g}(0)$ в роевете две прави, които си отговарят в Θ_0. Ясно е, че тогава уравненията (16) на изометрията стават

$$\bar{\sigma}=\sigma,\qquad \bar{v}=\bar{v}(\sigma,v). \tag{18}$$

За втората повърхнина $\overline{\Gamma}$ имаме аналогично на (13):

$$d\bar{s}^2=\left(\frac{\bar{v}^2}{\bar{R}^2}+2\bar{T}\bar{v}+\bar{S}^2\right)d\bar{\sigma}^2+2d\bar{\sigma}\,d\bar{v}. \tag{19}$$

Щом Θ е изометрия, имаме $d\bar{s}^2=ds^2$, т. е.

$$\left(\frac{\bar{v}^2}{\bar{R}^2}+2\bar{T}\bar{v}+\bar{S}^2\right)\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma}\right)^2 d\sigma^2+2\ \frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma}d\sigma\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial\sigma}d\sigma+\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}dv\right)= \tag{20}$$

$$=\left(\frac{v^2}{R^2}+2Tv+S^2\right)d\sigma^2+2d\sigma dv$$

е тъждество по отношение на четирите променливи σ, v, $d\sigma$, dv като следствие от (18); разбира се в (20) в същност $\bar{R}^2=R^2$, $d\bar{\sigma}:d\sigma=1$ поради (18). Приравняваме в (20) коефициентите на $d\sigma^2$ и $d\sigma dv$ от двете страни:

$$\frac{\bar{v}^2}{\bar{R}^2}+2\bar{T}\bar{v}+\bar{S}^2+2\ \frac{\partial\bar{v}}{\partial\sigma}=\frac{v^2}{R^2}+2Tv+S^2,\qquad \frac{\partial\bar{v}}{\partial v}=1. \tag{21}$$

От второто равенство имаме

$$\bar{v}=v+\varphi(\sigma), \text{ следователно } \frac{\partial\bar{v}}{\partial\sigma}=\varphi'(\sigma). \tag{22}$$

Тук $\varphi(\sigma)$ е някаква холоморфна функция на σ в Σ. Заместваме намерените стойности на $\bar{v}$ и $\frac{\partial\bar{v}}{\partial\sigma}$ в първото равенство (21) и намираме

$$\frac{v^2}{R^2}+\frac{2v\varphi}{R^2}+\frac{\varphi^2}{R^2}+2\bar{T}v+2\bar{T}\varphi+\bar{S}^2+2\varphi'=\frac{v^2}{R^2}+2Tv+S^2. \tag{23}$$

Понеже това трябва да бъде тъждество относно v, добиваме

$$\frac{2\varphi}{R^2}+2\bar{T}=2T, \qquad \frac{\varphi^2}{R^2}+2\bar{T}\varphi+\bar{S}^2+2\varphi'=S^2. \tag{24}$$

От първото равенство (24) намираме

$$\varphi=R^2(T-\bar{T}), \tag{25}$$

следователно

$$\varphi'=-2R^2(T-\bar{T})+R^2(T'-\bar{T}').$$

Заместваме тези стойности на φ и φ' във второто равенство (24) и след очевидно преработване намираме

$$T^2-4T+2T'-\frac{S^2}{R^2}=\bar{T}^2-4\bar{T}+2\bar{T}'-\frac{\bar{S}^2}{R^2}. \tag{26}$$

Равенствата (18), (25), (26) дават окончателния резултат: *ако Θ е изометрия на Γ върху $\bar{\Gamma}$, тя поражда едно съответствие Θ_0 на роя $\bar{G}$ върху роя G, при което за съответните прави имаме*

$$R^2=\bar{R}^2, \quad T^2-4T+2T'-\frac{S^2}{R^2}=\bar{T}^2-4\bar{T}+2\bar{T}'-\frac{\bar{S}^2}{R^2}. \tag{27}$$

Уравненията (18) на Θ са

$$\bar{\sigma}=\sigma, \qquad \bar{v}=v+R^2(T-\bar{T}), \tag{28}$$

ако в двата роя за начални прави на естествените параметри σ, $\bar{\sigma}$ са взети съответни при Θ_0 прави. Обратно, ако при едно съответствие Θ_0 на роя G върху роя $\bar{G}$ имаме изпълнени за съответните прави условията (27), то може да се разшири до съответствие Θ на повърхнината Γ върху повърхнината $\bar{\Gamma}$, което е изометрия; нейните уравнения са именно (28).

Доказателството на обратното твърдение е очевидно; веднага се проверява, че дефинираното с (28) съответствие на Γ върху $\bar{\Gamma}$ при условията (27) е изометрия.

Накратко можем да кажем: условията (27) са необходими и достатъчни, за да бъде Θ_0 разширимо до изометрия. Тези условия имат инвариантна форма, тъй като съдържат само инварианти на двата роя. Наличието им показва, че не всеки две Монжови повърхнини са изометрични помежду си.

3. Да изведем някои прости следствия от получените условия (27).

а) Нека една повърхнина Γ на Монж е дадена с естествени уравнения

$$R^2=R^2(\sigma),\quad T=T(\sigma),\quad S^2=S^2(\sigma).$$

Всяка изометрична с Γ повърхнина $\bar\Gamma$ на Монж ще има съгласно (27) естествени уравнения

$$\bar R^2=R^2(\sigma),\ T=\bar T(\sigma),\ \bar S^2=R^2\,(\bar T^2-4\bar T+2\bar T'-T^2+4T-2T')+S^2,$$

където $\bar T(\sigma)$ е някаква холоморфна в Σ функция. Всички повърхнини $\bar\Gamma$, изометрични с Γ и имащи едно и също второ естествено уравнение $\bar T=\bar T(\sigma)$. са очевидно конгруентни, понеже имат едни и същи инварианти R^2, $\bar T$, $\bar S^2$.

б) По-нататък от (27), (28) следва: *при изометрията Θ на Γ върху $\bar\Gamma$ централната крива C_z на Γ се трансформира тогава и само тогава в централната крива $C_{\bar z}$ на $\bar\Gamma$, когато Θ е конгруентност.*

Да допуснем, че централната крива на Γ се трансформира в централната крива на $\bar\Gamma$; тогава в (28) на $v=0$ отговаря $\bar v=0$ и това дава $\bar T=T$. Освен това изпълнени са и условията (27); второто от тях, поради $\bar T=T$, дава $\bar S^2=S^2$. За двата роя G, $\bar G$ получихме $\bar R^2=R^2$, $\bar T=T$, $\bar S^2=S^2$ и това показва че те са конгруентни. Обратното твърдение е ясно.

в) Нашите условия (27) позволяват да се установи лесно един резултат на L. Berwald [2]. Той разглежда, при дадена повърхнина Γ на Монж и съответен рой G, развиваемия рой H на характеристиките на еднопараметричната система изотропни равнини, минаващи през правите на G. Този рой е коничен или тангентен; в първия случай Berwald нарича Γ Монжова повърхнина от I вид, във втория случай — от II вид.

Изотропната равнина през определената с z, e образуваща g на G има уравнение

$$e\,(y-z)=0 \tag{29}$$

в текущ радиус-вектор y; когато в него се мени σ (влизащо в e и z), получаваме всички равнини на споменатата еднопараметрична система. Диференцираме (29) два пъти спрямо σ:

$$e'(y-z)-ez'=0,\quad e''(y-z)-e'z'=0.$$

Като вземем пред вид (8) и формулите (11) на Френе, тези уравнения се написват

$$e'(y-z)-1=0, \qquad z'(y-z)=R^2. \tag{30}$$

От (29) и (30) получаваме параметрично уравнение

$$y=z+R^2.(1-T).e+R^2.e' \tag{31}$$

за централната крива на развиваемия рой H. От него чрез диференциране добиваме

$$y'=R^2(T-2).e, \tag{32}$$

като пак е използувана формулата (11) за e''. От (32) се вижда, че H е коничен рой точно тогава, когато $T-2=0$, тангентен—когато $T-2 \neq 0$. Значи Монжовата повърхнина Γ е от първи вид, когато $T=2$, от втори вид, когато $T \neq 2$.

Нека сега имаме две Монжови повърхнини Γ и Γ от първи вид. От (27) се вижда, поради $T=2$, $\bar{T}=2$, че условията за изометрия са

$$R^2=\bar{R}^2, \quad -8-\frac{S^2}{R^2}=-8-\frac{\bar{S}^2}{\bar{R}^2}.$$

Окончателно следват условия

$$\bar{R}^2=R^2, \quad \bar{S}^2=S^2, \quad \bar{T}=T(=2)$$

и те показват, че изометрията Θ на Γ върху $\bar{\Gamma}$ е конгруентност. В това се състои резултата на Berwald: всяка изометрия между две Монжови повърхнини от I вид е конгруентност.

г) Да разгледаме специално изометриите между две Монжови повърхнини Γ и $\bar{\Gamma}$, за които инвариантите S и $\bar{S}$ са постоянно 0. Съгласно ИРП тези повърхнини имат крайни параметрични представяния (ИРП (70)). Роят G се характеризира геометрически с това, че кривата C_w на центровете на оскулачната сфера за G е крива в изотропна равнина; също и $C_{\bar{w}}$. Условията за изометрия сега стават

$$R^2=\bar{R}^2, \quad \bar{T}^2-4\bar{T}+2\bar{T}'=T^2-4T+2T'. \tag{33}$$

Нека е дадена повърхнината Γ, т. е. дадени са R^2, T като функции на σ. За произволна изометрична с Γ повърхнина $\bar{\Gamma}$ имаме $\bar{R}^2=R^2$, $\bar{S}^2=0$ и $\bar{T}$ като функция на σ удовлетворява Рикатиевото диференциално уравнение (33). То има частен интеграл дадената функция $T=T(\sigma)$ и по познат начин може да бъде намерен общият му интеграл

$$\bar{T}=T+\frac{2e^{2\sigma-J}d_\sigma}{C+\int e^{2\sigma-J}d\sigma}. \tag{34}$$

Тук C е интеграционна константа, а J е една примитивна функция на T в Σ, както в (70) от ИРП.

Ако използуваме тези формули от ИРП, бихме могли да напишем параметрично представяне за произволната повърхнина $\bar{\Gamma}$

(с $\bar{S}=0$), изометрична с дадената повърхнина Γ (също с $S=0$). Достатъчно е в (70) от ИРП да заместим

$$\bar{J}=\int \bar{T}d\sigma = \int Td\sigma + 2\int \frac{e^{2\sigma - J}}{C+\int^{2\sigma - J}d\sigma} \quad d\sigma = J+2\log(C+\int e^{2\sigma - J}d\sigma)$$

В същност трябват ни

$$e^{\bar{J}}=e^{J}(C+\int e^{2\sigma - J}d\sigma)^2, \ e^{-\bar{J}}=\frac{e^{-J}}{(C+\int e^{2\sigma - J}d\sigma)^2}.$$

Така: ако е дадена Монжова повърхнина Γ с крива на центровете в изотропна равнина, могат да се намерят в квадратури параметрични уравнения на всички Монжови повърхнини, които са изометрични с нея и имат крива на центровете също в изотропна равнина.

4. Да се занимаем с въпроса: може ли да съществуват две изометрични Монжови повърхнини Γ и $\bar{\Gamma}$, при които съответните образуващи са успоредни?

Да допуснем, че Θ е изометрия на Γ върху $\bar{\Gamma}$ с успоредност на съответните образуващи. Ако правата $g=g(\sigma)$ на роя G е определена с

$$z=z(\sigma), \ e=e(\sigma),$$

за съответната права $\bar{g}=\bar{g}(\bar{\sigma})$ от роя $\bar{G}$ можем да считаме, че е определена с

$$\bar{z}=z+\alpha.e+\beta.e'+\gamma.z', \ \bar{e}=\mu.e, \tag{35}$$

като $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ са неизвестни за сега холоморфни функции на σ; $\bar{e}$ е пропорционално на e, тъкмо защото съответните прави са успоредни. Тъй като имаме изометрия на Γ върху $\bar{\Gamma}$, важи

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma}=1,$$

следователно, производните на $\bar{e}$ и Σ спрямо $\bar{\sigma}$ са същевременно и производни спрямо σ.

От (35) най-напред получаваме

$$\frac{d\bar{e}}{d\sigma}=\bar{e}'=\mu'.e+\mu.e', \quad e'^2=\mu^2e^2 \tag{36}$$

и тъй като $e'^2=\frac{1}{R^2}$, $\bar{e}'^2=\frac{1}{\bar{R}^2}$ и при изометрията $\bar{R}^2=R^2$ от второто равенство (36) следва $\mu^2=1$, т. е.

$$\mu=\pm 1 \quad \text{и} \quad \frac{d\bar{e}}{d\sigma}=\bar{e}'=\mu.e'. \tag{37}$$

По-нататък

$$(38) \qquad \frac{d^2\bar{e}}{d\bar{\sigma}^2} = \bar{e}'' = \mu \, . \, \bar{e}'' = \mu . \left[(T' - T) . e + (T+1) . e' - \frac{1}{R^2} . z \right],$$

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{\sigma}} = \bar{z}' = z' + \alpha' . e + \beta' . e' + \gamma' . z' + \alpha . e' + \beta . e'' + \gamma . z''.$$

Като заместим в израза за $\bar{z}'$ стойностите на e'' и z'' от (11), намираме

$$(39) \qquad \bar{z}' = a.e + b.e' + c.z'$$

с някакви коефициенти $a, b, c,$ функции на σ.

За роя $\bar{O}$, т. е. за $\bar{e}$, $\bar{z}$, $\bar{\sigma} = \sigma$, трябва да бъдат изпълнени (8). Лесно се проверява, че

$$\bar{e}^2 = 0, \quad \bar{e}' \bar{e}'' = \bar{e}'^2$$

са удовлетворени, благодарение на

$$(40) \qquad \bar{e} = \mu e, \quad \mu = \pm 1.$$

Остава да изразим само, че

$$(41) \qquad \bar{e} \bar{z}' = 1, \quad \bar{e}'^2 \bar{z}'^2 - (\bar{e}' \bar{z}')^2 - \bar{e}' \bar{z}'' = 0.$$

От (39) и (40) намираме

$$\bar{e} \bar{z}' = \mu c$$

и $\bar{e} \bar{z}' = 1$ показва, че трябва да имаме

$$(42) \qquad \mu c = 1, \quad c = \mu.$$

Да изчислим сега израза в ляво на второто равенство (41). Пресмятаме последователно:

$$\bar{e}'^2 = \frac{1}{\bar{R}^2} = \frac{1}{R^2},$$

$$\bar{z}'^2 = \bar{S}^2 = (a \, . \, e + b.e' + \mu.z')^2 = \frac{b^2}{R^2} + S^2 + 2a\mu + 2b\mu T,$$

$$\bar{e}' \bar{z}' = \bar{T} = (\mu.e') \, (a.e + b.e' + \mu.z') = T + \frac{\mu b}{R^2},$$

$$\bar{T}' = \bar{e}'' \bar{z}' + \bar{e}' \bar{z}'' = \mu \frac{b'}{R^2} + 2 \frac{b\mu}{R^3} + T',$$

$$\bar{e}'' \bar{z}' = \mu . \left[(T' - T) . e + (T+1) . e' - \frac{1}{R^2} \cdot z' \right] (a.e + b.e' + \mu.z') =$$

$$= -\frac{a\mu}{R^2} + \frac{b\mu}{R^2} + T' + T^2 - \frac{S^2}{R^2},$$

$$\overline{e'}\overline{z''}=\overline{T'}-\overline{e''}\,\overline{z'}=\frac{b\mu}{R^2}+\frac{b'\mu}{R^2}+\frac{a\mu}{R^2}-T^2+\frac{S^2}{R^2}\cdot$$

Тогава

$$\overline{e'}^2\overline{z'}^2-(\overline{e'}\,\overline{z'})^2-(\overline{e'}\,\overline{z''})=\frac{1}{R^2}\left(\frac{b^2}{R^2}+S^2+2a\mu+2b\mu T\right)-\left(T+\frac{\mu b}{R^2}\right)^2-$$

$$-\left(\frac{b\mu}{R^2}+\frac{b'\mu}{R^2}+\frac{a\mu}{R^2}-T^2+\frac{S^2}{R^2}\right)=\frac{(a-b-b')\mu}{R^2}$$

и второто равенство (41) дава

$$a-b-b'=0. \tag{43}$$

По-нататък заместваме

$$\overline{R}^2=R^2,\ \overline{T}=T+\frac{\mu b}{R^2},\ \overline{S}^2=S^2+\frac{b^2}{R^2}+2a\mu+2b\mu T$$

в условието (27) за изометрия; след преработване получаваме $\frac{2\mu}{R^2}(b'-a)=0$ или

$$b'-a=0. \tag{44}$$

От (43) и (44) намираме $a=0$, $b=0$. Получените равенства

$$a=0,\quad b=0,\quad c=\mu$$

и (39) водят до

$$\overline{z}'=\mu.z'.$$

Оттук чрез интегриране намираме $\overline{z}=\mu.z+z_0$, където z_0 е постоянна точка. Следователно, за роя $\overline{G}$ имаме

$$\overline{z}=\mu.z+z_0,\ \overline{e}=\mu.e. \tag{45}$$

При $\mu=+1$ правата $\overline{g}$ се получава от g чрез транслацията, определена с вектора z_0, следователно, Γ и $\overline{\Gamma}$ са директно конгруентни. При $\mu=-1$ $\overline{g}$ се получава от g чрез централната симетрия спрямо точката $\frac{z_0}{2}$, следователно, Γ и $\overline{\Gamma}$ са инверзно конгруентни. Така получихме резултата:

Ако две Монжови повърхнини са изометрични с успоредност на съответните образуващи, то те се получават една от друга чрез транслация или централна симетрия, следователно са конгруентни.

Както е известно, при праволинейни повърхнини с неизотропни образуващи в общия случай могат да съществуват двойки изометрични повърхнини, които не са конгруентни.

5. В ИРП с всеки общ изотропен рой G е свързан по един естествен начин един друг общ изотропен рой, който е наречен първи придружаващ рой на G. Именно за образуващата $g=g(\sigma)$ на G, определена с z и e, разглеждаме съответната повърхнина $\Lambda(\sigma)$ на

Lie. Самата права g принадлежи на едната система образуващи на $\Lambda(\sigma)$ и разбира се минава през z. През z минава и една образуваща $g_l = g_l(\sigma)$ на $\Lambda(\sigma)$ от другата система. Това е правата, определена с

$$\text{(46)} \qquad \begin{aligned} &\text{точка } x_l(\sigma) = z, \\ &\text{и вектор } p_l(\sigma) = S^2.e - 2.z'. \end{aligned}$$

Тази права е изотропна и при изменяне на σ описва първия придружаващ рой G_l на G. За него в ИРП са изчислени инвариантите

$$\text{(47)} \qquad \sigma_1 = \sigma, \; R_1{}^2 = R^2, \; T_1 = -T - \frac{2S'}{S}, \; S_1{}^2 = S^2.$$

Точките върху правите на G_l образуват Монжова повърхнина Γ_l. Поставяме въпроса: какъв трябва да бъде роят G, за да бъде Γ_l изометрична с Γ, като при това на правата $g(\sigma)$ от G да отговаря $g_l(\sigma)$ от G_l?

Очевидно трябва да бъде изпълнено условието за изометрия

$$T_1{}^2 - 4T_1 + 2T_1{}' - \frac{S_1{}^2}{R_1{}^2} = T^2 - 4T + 2T' - \frac{S^2}{R^2}.$$

Като заместим тук стойностите от (47), след опростяване получаваме

$$\text{(48)} \qquad 2\frac{S'^2}{S^2} - \frac{S''}{S} + \frac{2S'}{S} + T\frac{S'}{S} + 2T - T' = 0.$$

Резултатът е: за да съществува желаната изометрия между Γ и Γ_l, инвариантите S и T на роя G трябва да бъдат свързани с (48); (48) е впрочем и достатъчно за съществуване на такава изометрия.

Ако положим в (48)

$$\text{(49)} \qquad \frac{S'}{S} = u,$$

условието (49) се написва във формата

$$\text{(50)} \qquad u^2 - u' + (T+2)u + 2T - T' = 0.$$

В определянето на роевете G с желаното свойство съществува голям произвол. Ние можем да си изберем произволно $S = S(\sigma)$, т. е. и u, и да намерим от (50) функцията T. T се изразява чрез u в квадратури, тъй като (50) относно T е линейно диференциално уравнение от I ред. Дадената $S(\sigma)$ и намерената $T(\sigma)$ определят роя до конгруентност (заедно с функцията $R^2 = R_0{}^2 e^{-2\sigma}$). Или обратно можем да си изберем произволно $T = T(\sigma)$ и да намерим от (50) функцията $u(\sigma)$. За u (50) е Рикатиево диференциално уравнение с познат частен интеграл $-T$ и следователно, общият му интеграл може да се изрази в квадратури.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Петканчин, Общи изотропни роеве прави в Евклидовото пространство, Годиш. на Соф. унив., Прир.-мат. фак., XLIV (1947—1948), кн. I, стр. 357—399.
1. B. Petkantschin, Allgemeine isotrope Regelscharen im Euklidischen Raum, Ann. de l' Université de Sofia, Fac. d. Sc., XLIV (1947—1948), livre I, p. 357—399 (bulgarisch mit deutscher Zusammenfassung).
2. L. Berwald, Über die Flächen mit einer einzigen Schar zueinander windschiefer Minimalgeraden, Stzgber. d. math.-phys. Kl. d. Akad. d. Wiss. zu München, 1913, S. 143—211 (insbes. S. 201).

ИЗОМЕТРИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ПОВЕРХНОСТЯМИ МОНЖА

Б. Петканчин

РЕЗЮМЕ

Мы рассматриваем в комплексном трехмерном Евклидовом пространстве голоморфную однопараметрическую систему изотропных прямых G. Прямая $g(u)$ системы определяется точкой $x(u)$ и изотропным вектором $p(u)$; $x(u)$ и $p(u)$—голоморфные функции комплексного переменного u. При условии

$$(1) \qquad (px_1)(p_1p_2)-p_1^2[(p_1x_1)+(px_2)]\neq 0 \quad \left[x_1=\frac{dx}{du},\ p_2=\frac{d^2p}{du^2},\dots\right]$$

мы называем систему G общей изотропной (однопараметрической) системой прямых; множество точек ее прямых есть поверхность Монжа Γ. В статье[1] мы определили для G инвариантный параметр (5), инвариантную центральную точку (6) на $g(u)$ и инвариантное нормирование (7) ($'=\frac{d}{d\sigma}$, а (ab) обозначает скалярное произведение двух векторов a, b).

При предположении, что система G задается уравнениями $z=z(\sigma)$, $e=e(\sigma)$, основные инварианты системы даются выражениями

$$(9) \qquad R=\frac{1}{\sqrt{e'^2}}=R_0e^{-\sigma},\quad S=\sqrt{z'^2},\quad T=e'z'.$$

Деривационные формулы для G имеют форму

$$(11) \qquad e''=(T'-T)e+(T+1)e'-\frac{1}{R^2}z',\quad z''=SS'e+S^2e'-Tz'.$$

Пусть теперь даны две поверхности Монжа Γ и $\bar\Gamma$; мы ищем все изометрии между ними. Наш основной результат состоит в следующем: каждая изометрия Θ поверхности Γ на поверхность $\bar\Gamma$ индуцирует изображение Θ_0 системы G на систему $\bar G$, при котором в соответственных прямых выполняются условия

$$(27) \qquad R^2=\bar R^2,\quad T^2-4T+2T'-\frac{S^2}{R^2}=\bar T^2-4\bar T+2\bar T'-\frac{\bar S^2}{\bar R^2}.$$

Изометрия определяется уравнениями

$$\bar{\sigma}=\sigma, \qquad \bar{v}=v+R^2(T-\bar{T}), \tag{28}$$

если предположить, что начальные прямые $g(0)$, $\bar{g}(0)$ обоих систем являются тоже соответственными. Наоборот изображение Θ_0 системы G на систему $\bar{G}$, удовлетворящее условиям (27), можно продолжить при помоіци (28) до изометрии Γ на $\bar{\Gamma}$.

Мы выводим очень просто одну теорему Л. Бернальда [2].

ISOMETRIE ZWISCHEN ZWEI MONGESCHEN FLÄCHEN

B. Petkantschin

ZUSAMMENFASSUNG

Im *komplexen* dreidimensionalen Euklidischen Raum sei $g(u)$ die durch den endlichen Punkt $x(u)$ und den (isotropen) Vektor $p(u)$ bestimmte *isotrope* Gerade; $x(u)$ und $p(u)$ sind holomorphe Funktionen des komplexen Parameters u in einem einfachzusammenhängenden Gebiet U der Gaußschen Ebene von u. Wir setzen voraus, dass in U die Ungleichung

$$(1) \qquad (px_1)(p_1p_2)-p_1^2\ [(p_1x_1)+(px_2)]\neq 0$$

gilt. Darin sind $p_1, \ldots, x_2$ die Ableitungen

$$p_1=\frac{dp}{du}, \cdot \quad , x_2=\frac{d^2x}{du^2};$$

(px_1), $p_1^2=(p_1p_1), \ldots$ sind die Skalarprodukte der betreffenden Vektoren. Wenn sich der Parameter u in U ändert, beschreibt die isotrope Gerade $g(u)$ eine **allgemeine isotrope Regelschar** G. Die Menge der Punkte auf den Geraden von G ist eine **Mongesche Fläche** Γ; sie ist eine nichtabwickelbare Linienfläche aus lauter isotropen Geraden. In unserer Arbeit [1] haben wir den invarianten Parameter (5), den invarianten Zentralpunkt (6) auf $g(u)$ und die invariante Normierung (7) für G eingeführt ($'$ bezeichnet Ableitung bez. σ).

In den weiteren Betrachtungen nehmen wir an, daß die Gerade $g=g(\sigma)$ von G durch $z=z(\sigma)$ und $e=e(\sigma)$ bestimmt ist. Dann gelten für diese beiden Funktionen identisch in σ die Gleichungen (8). Die Grundinvarianten von G sind

$$(9) \qquad R=\frac{1}{\sqrt{e'^2}}=R_0e^{-\sigma}, \quad S=\sqrt{z'^2}, \quad T=e'z'$$

und eben dieselben treten in den Frenetschen Formeln

$$(11) \qquad e''=(T'-T)e+(T+1)e'-\frac{1}{R^2}z', \quad z''=SS'e+S^2e'-Tz'$$

für G auf.

Die Mongesche Fläche Γ hat die Parameterdarstellung (12) mit den Parametern σ und v.

Es seien jetzt zwei Mongeschen Flächen Γ und $\bar{\Gamma}$ gegeben. Wir suchen alle Isometrien (16) von Γ auf $\bar{\Gamma}$. Das Hauptergebnis lautet: es sei Θ eine Isometrie der Fläche Γ auf die Fläche $\bar{\Gamma}$. Dann induziert sie eine Abbildung Θ_0 der Regelschar G auf die Regelschar $\bar{G}$, bei welcher in den entsprechenden Geraden $g(\sigma)$, $\bar{g}(\bar{\sigma})$ die Gleichungen

$$R^2=\bar{R}^2, \quad T^2-4T+2T'-\frac{S^2}{R^2}=\bar{T}^2-4\bar{T}+2\bar{T}'-\frac{\bar{S}^2}{\bar{R}^2} \tag{27}$$

gelten. Die Isometrie Θ wird analytisch durch

$$\bar{\sigma}=\sigma, \quad \bar{v}=v+R^2(T-\bar{T}) \tag{28}$$

bestimmt, wenn man als Anfangsgeraden $g(0)$, $\bar{g}(0)$ von G und $\bar{G}$ zwei in Θ_0 entsprechende Geraden wählt. Umgekehrt eine den Bedingungen (27) genügende Abbildung Θ_0 der Regelschar G auf die Regelschar $\bar{G}$ lässt sich durch (28) zu einer Isometrie von Γ auf $\bar{\Gamma}$ erweitern.

Dieses Resultat wird auf einige spezielle Fragen angewandt. Es ergibt sich z. B. ganz einfach ein Satz von L. Berwald [2].