РОЕВЕ ИЗОТРОПНИ ПРАВИ В ЕЛИПТИЧНОТО ПРОСТРАНСТВО

от Боян Петканчин

В нашата работа [1] (която цитираме с ИРПЕ), ние изведохме някои резултати за роеве от изотропни прави в комплексното триизмеримо елиптично пространство. В настоящата работа ние се занимаваме по-подробно със същите роеве.

1. Предварителни бележки. Абсолютната повърхнина на комплексното триизмеримо елиптично пространство N_3 означаваме с J, радиуса на кривината му — k. Всяка проективна координатна система в N_3, спрямо която J има уравнение

(1) $$x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=0,$$

наричаме (елиптична) ортогонална координатна система, накратко ортогонален тетраедър. Наредена четворка от комплексни числа (x_0, x_1, x_2, x_3) ще наричаме вектор и ще бележим накратко с x; специалната четворка $x_0=0$, $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ ще наричаме нулев вектор и ще бележим с o. При дадена координатна система всеки ненулев вектор x е съвкупността от координатите спрямо системата на точно една точка, която също обикновено ще наричаме точка x; обратно всяка точка има безбройно много (ненулеви) координатни вектори.

Ако x и y са вектори спрямо ортогонална система на две точки, изразът

(2) $$(xy)=(yx)=xy=x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

се нарича скаларно произведение на двата вектора. Специално

(3) $$x^2=xx=x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2$$

е скаларен квадрат на вектора x. Двете точки x, y са точно тогава ортогонални, т. е. спрегнати относно J, когато

(4) $$xy=0.$$

Една точка x е точно тогава безкрайна, т. е. лежи на абсолютната повърхнина J, когато

(5) $$x^2=0$$

и точно тогава крайна, т. е. не лежи на J, когато

(6) $$x^2\neq 0.$$

Ако x е крайна точка, измежду представящите я вектори има точно два, именно

$$\frac{x}{\sqrt{x^2}}, \quad -\frac{x}{\sqrt{x^2}},$$

чийто скаларен квадрат е 1; наричаме ги **нормирани вектори на точката**, съставящите им — **нормирани координати на същата**.

Разстояние между двете крайни точки x и y наричаме всяко комплексно число δ, определено от равенството

$$\cos\frac{\delta}{k} = \frac{xy}{\sqrt{x^2}.\sqrt{y^2}}, \tag{7}$$

като за квадратните корени можем да вземем коя да е от техните стойности. Ясно е, че ако δ_0 е една от стойностите на разстоянието, то всичките му стойности са

$$\delta = \pm\delta_0 + n.k\pi, \tag{8}$$

където n е произволно цяло число. Две крайни точки са точно тогава ортогонални, когато разстоянието им е равно на $\pm\frac{\pi}{2} + n.k\pi$.

Ако x и y са две нормирани точки ($x^2 = 1$, $y^2 = 1$), за разстоянието им δ важи формулата

$$\cos\frac{\delta}{k} = \pm xy. \tag{9}$$

Детерминантата

$$(xyzt) = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ t_0 & t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix}, \tag{10}$$

образувана с координатите на четири вектора x, y, z, t, ще бележим с $(xyzt)$ и ще наричаме **четворно произведение на векторите в показания ред**. Равенството

$$(xyzt) = 0 \tag{11}$$

е необходимото и достатъчно условие, за да бъдат четирите вектори линейно зависими, т. е. за да бъдат компланарни точките x, y, z, t, в случай, че векторите са ненулеви. По правилото за умножаване на две детерминанти получаваме за произведението на две четворни произведения:

$$(xyzt)(abcd) = \begin{vmatrix} xa & xb & xc & xd \\ ya & yb & yc & yd \\ za & zb & zc & zd \\ ta & tb & tc & td \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Когато са дадени четири линейно независими вектора a, b, c, d, всеки вектор x може да се представи по точно един начин като линейна комбинация на тези вектори:

$$x=\alpha . a+\beta . b+\gamma . c+\delta . d. \tag{13}$$

Коефициентите $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ са проективните координати на точката x спрямо проективната координатна система с координатен тетраедър $a\,b\,c\,d$ и с единична точка

$$a+b+c+d.$$

Нека x, y са две различни точки, тъй че определят една права g. Лесно се проверява: ако

$$(xy)^2-x^2.y^2\neq0, \tag{14}$$

правата пресича J в две различни точки, т. е. има 2 различни безкрайни точки; наричаме я **обикновена права**. Ако

$$(xy^2)-x^2 . y^2=0, \tag{15}$$

но поне едно от числата x^2, y^2 не е 0, правата се допира до J, т. е. има само една безкрайна точка; наричаме я тогава **изотропна права**. Най-после ако

$$x^2=0,\ y^2=0,\ xy=0, \tag{16}$$

всяка точка на правата лежи върху J; правата е образуваща на J и я наричаме **безкрайна права**

Всяка колинеация в пространството, която трансформира J в себе си, се нарича **елиптична еднаквост** или **конгруентност**. Нека x_i са координатите на една точка ϱ спрямо една проективна система S, а x_i' са координатите пак спрямо S на точката ϱ', в която се трансформира ϱ с една колинеация φ. Тогава съществуват подходящи 16 комплексни числа a_{ij}, така че за x_i и x_i' са в сила връзките

$$\varrho x_i'=\sum_{j=0}^{3} a_{ij}x_j \tag{17}$$

при подходящо число $\varrho\neq0$; детерминантата $|a_{ij}|$ е отлична от 0. Ако системата S е ортогонална, тази колинеация е тогава и само тогава елиптична еднаквост, когато матрицата (a_{ij}) е произведение от някакво число с една ортогонална матрица (от ред 4).

Елиптичната геометрия се занимава със свойства и величини, които са инвариантни при произволна елиптична еднаквост. Най-просто инвариантно съотношение е например ортогоналността на две точки; инвариантна величина е например разстоянието между две точки.

Да предположим, че крайната точка x и безкрайната p са зададени като холоморфни функции

$$x=x(u),\quad p=p(u) \tag{18}$$

на комплексната променлива u в една проста област D на нейната Гаусова равнина. Предполагаме по-нататък, че за всяко u от D съединителната права $g=g(u)$ на x и p е изотропна и че съвкупността G от всички прави g, отговарящи на u от D, се състои от безбройно много прави. Тогава G е рой от изотропни прави или изотропен рой прави; точките върху неговите прави образуват една праволинейна повърхнина F.

Ние ще предполагаме точката x нормирана. Тогава за всяко u от D функциите (18) удовлетворяват условията

$$x^2=1,\ p^2=0,\ px=0,\ p\neq o. \tag{19}$$

По-нататък ще предполагаме, че роят е неразвиваем, тъй че за всяко u от D важи

$$\Delta=(pp_1xx_1)\neq 0. \tag{20}$$

Тъй като по (12)

$$\Delta^2=-(px_1)^2.\ [p_1^2-(px_1)^2], \tag{21}$$

от (20) следва

$$px_1\neq 0,\ p_1^2-(px_1)^2\neq 0 \text{ за всяко } u \text{ от } D. \tag{22}$$

Най-после както в ИРПЕ ние ще се занимаваме с изотропни роеве, при които е изпълнено за всяко u от D условието

$$px_1.\ p_1p_2-p_1^2(p_1x_1+px_2)\neq 0 \tag{23}$$

и които ще наричаме общи изотропни роеве прави. От това условие, след евентуално стесняване на D, следва

$$p_1^2\neq 0,\qquad px_1\neq 0, \tag{24}$$

тъй като (23) може да се напише

$$\frac{1}{2}\cdot px_1.(p_1^2)_1-p_1.(px_1)_1\neq 0.$$

Навсякъде долните десни индекси 1, 2 означават производни спрямо параметъра u.

В ИРПЕ върху правата $g=g(u)$ на роя е дефинирана инвариантно свързана с роя централна точка

$$z=x+\frac{p_1^2x_1^2+p_1x_1.px_2-px_1.p_1x_2}{px_1.p_1p_2-p_2^2.(p_1x_1+px_2)}\cdot p. \tag{25}$$

По-нататък въведен е за роя естествен параметър

$$\sigma=\int_{u_0}^{u}\frac{px_1.p_1p_2-p_1^2(p_1x_1+px_2)}{p_1^2.px_1}\,du, \tag{26}$$

като u_0 е фиксирано число от D. Най-после въведено е инвариантно нормиране за безкрайната точка на g, като вместо произволния неин вектор p се избира векторът

(27) $$e = \frac{p}{pz'}.$$

Оттук нататък ще означават производни относно естествения параметър σ.

Ние ще предполагаме вече, че произволната права $g = g(\sigma)$ от G се определя с нормираната централна точка $z = z(\sigma)$, с нормираната по споменатия начин безкрайна точка $e = e(\sigma)$, като параметърът σ е естественият, изменящ се в проста област Σ, съдържаща $\sigma = 0$. Всичко това означава, че за произволно σ от Σ важат условията

(28) $$z^2 = 1,\ e^2 = 0,\ ez = 0,\ ez' = 1,$$
$$e'e'' = e'^2,\ e'z'' = e'^2z'^2 - (e'z')^2$$

и разбира се, всички, които се получават от тях чрез диференцирания.

За произволен неразвиваем рой от изотропни прави, за който

(29) $$p_1^2 \neq 0,\ p_1^2 - (px_1)^2 \neq 0,$$

за всяка негова права $g = g(u)$ съществува **оскулачна сфера** с център

(30) $$w = \frac{p_1x_1 . p - px . p_1 - p_1^2 . x}{\sqrt{p_1^2} . \sqrt{p_1^2 - (px_1)^2}}$$

и радиус $R \neq \pm n.k\frac{\pi}{2}$, за който

(31) $$\sin^2\frac{R}{k} = \frac{(px_1)^2}{p_1^2} \neq 0, \quad \cos^2\frac{R}{k} = \frac{p_1^2 - (px_1)^2}{p_1^2} \neq 0.$$

За нашия общ изотропен рой, определен с $z(\sigma)$ и $e(\sigma)$, ще имаме

(32) $$\sin^2\frac{R}{k} = \frac{1}{e'^2}.$$

От $e'e'' = e'^2$ и (32) лесно следва, че

(33) $$\sin^2\frac{R}{k} = \sin^2\frac{R_0}{k} \cdot e^{-2\sigma},$$

където R_0 е радиусът на оскулачната сфера за правата $g(0)$. Често ще означаваме

(34) $$U = \frac{1}{\sqrt{e'^2}} = \sin\frac{R}{k} = \sin\frac{R_0}{k} \cdot e^{-\sigma} \qquad (U' = -U).$$

Величините

(35) $$U^2 = \frac{1}{e'^2},\quad T = e'z',\quad S^2 = z'^2$$

са инварианти на роя. Инвариантността им спрямо произволна елиптична еднаквост следва от това, че те се изразяват чрез скаларни произведения. Инвариантността им спрямо смяна на параметъра следва от това, че в тях фигурират производни спрямо инвариантния параметър σ. Инвариантността им спрямо смяна на определящите правата g крайна и безкрайна точка следва от това, че z и e са инвариантно свързани с роя.

2. Циклични координатни системи. Една проективна координатна система C в N_3 с основни точки a_0, a_1, a_2, a_3 и единична точка f ще наричаме (елиптична) циклична координатна система — накратко цикличен тетраедър — ако спрямо нея абсолютната повърхнина F има уравнение

$$y_0^2+y_2^2+2y_1y_3=0; \tag{36}$$

тук y_i са координатите на точка от N_3 спрямо C. Ще установим някои свойства на тези циклични системи.

а) Проективната координатна система $C=a_0a_1a_2a_3f$ е точно тогава циклична, когато 1) a_1 и a_3 са точки от J, 2) a_0 и a_2 са две крайни ортогонални помежду си точки върху спрегнатата поляра на правата a_1a_3 относно J, 3) полярните равнини на f спрямо тетраедъра $a_0a_1a_2a_3$ и спрямо J съвпадат.

Да припомним: нека правата a_kf пресича срещулежащата на a_k стена на тетраедъра $a_0a_1a_2a_3$ в точка f_k. Тогава тетраедрите a_k и f_k са перспективни с център на перспективност f; равнината на перспективността на тези два тетраедъра се нарича полярна равнина на f относно тетраедъра a_k.

Ще докажем първо необходимостта на условията от а). Предполагаме, че тетраедърът a_kf е цикличен, така че J има спрямо него уравнението (36). Тогава веднага се проверява, че точките a_1 и a_3 с координати $(0, 1, 0, 0)$ и $(0, 0, 0, 1)$ спрямо a_kf лежат на J и че точките a_0 $(1, 0, 0, 0)$, a_2 $(0, 0, 1, 0)$ не лежат на J. Условието за спрегнатост на две точки y_i' и y_i'' относно J се намира от уравнението (36); то е

$$y_0'y_0''+y_2'y_2''+y_1'y_3''+y_3'y_1''=0. \tag{37}$$

Чрез него веднага се проверява, че във всяка от двойките a_1a_0 a_1a_2, a_3a_0, a_3a_2, a_0a_2 двете точки са спрегнати относно J. Спрегнатостта на точките в първите 4 двойки показва, че правата a_0a_2 е спрегнатата поляра относно J на правата a_1a_3. Петата двойка ни дава, че и a_0, a_2 са спрегнати. С това 1) и 2) са установени.

Точката f има спрямо C координати $(1, 1, 1, 1)$ и следователно, полярната ѝ равнина относно J ще има уравнение

$$y_0+y_2+y_1+y_3=0. \tag{38}$$

От друга страна, лесно се намира, че уравнението на полярната равнина на една точка $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ спрямо координатния тетраедър a_k е

$$\frac{y_0}{\lambda_0}+\frac{y_1}{\lambda_1}+\frac{y_2}{\lambda_2}+\frac{y_3}{\lambda_3}=0, \tag{39}$$

специално уравнението на полярната равнина на f относно същия тетраедър ще бъде

$$y_0+y_1+y_2+y_3=0. \tag{40}$$

Сравнението на (38) и (40) доказва 3).

Сега ще установим достатъчността на условията от а). Предполагаме, че тези условия са изпълнени. Нека повърхнината J има спрямо C уравнение

$$\sum_{i,k=0}^{3} a_{ik}\, y_i y_k=0. \tag{41}$$

Точката a_1 има координати (0, 1, 0, 0), следователно, полярна равнина

$$a_{10}y_0+a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3=0 \tag{42}$$

относно J. Но a_1 по условията е ортогонална на точките a_0, a_2; тъй като a_1, лежейки на J, е ортогонална и на себе си, следва, че полярната равнина на a_1 е равнината $a_0a_1a_2$ с уравнение

$$y_3=0. \tag{43}$$

Като сравним двете уравнения (42) и (43), намираме, че в (41) коефициентите

$$a_{10}=a_{11}=a_{12}=0.$$

По същия начин от дадените условия намираме, че a_3 има полярна равнина $y_1=0$, a_0 — полярна равнина $y_0=0$, a_2 — полярна равнина $y_2=0$. Като работим така, както за a_1, окончателно от условията 1) и 2) добиваме, че всички коефициенти a_{ik}, освен a_{00}, a_{22}, a_{13}, са равни на 0, тъй че уравнението (41) на J спрямо C става

$$a_{00}y_0^2+a_{22}y_2^2+2a_{13}y_1y_3=0. \tag{44}$$

По-нататък полярната равнина на f (1, 1, 1, 1) спрямо J се намира от (44); тя има уравнение

$$a_{00}y_0+a_{22}y_2+a_{13}y_1+a_{13}y_3=0. \tag{45}$$

А полярната равнина на f спрямо тетраедъра a_k ще бъде

$$y_0+y_1+y_2+y_3=0. \tag{46}$$

Като сравним (45) и (46), идваме до

$$a_{00}=a_{22}=a_{13}.$$

Тези стойности на коефициентите, заместени в (45), дават за J уравнение

$$y_0^2+y_2^2+2y_1y_3=0$$

спрямо C; това уравнение показва, че координатната система C е циклична.

б) Всяка елиптична еднаквост трансформира циклична система пак в циклична.

Нека $C=a_kf$ е циклична система и чрез една елиптична еднаквост φ се трансформира в $C'=a_k'f'$. За C по а) са изпълнени условията 1), 2), 3). Специално от 3) имаме, че полярната равнина π на f спрямо J и полярната равнина ϱ на f спрямо a_k съвпадат. Точките a_k' удовлетворяват аналогичните на 1) и 2) условия. Например a_1, a_3 лежат на J. Тогава $a_1'a_3'$ ще лежат на повърхнината J', в която се трансформира J чрез φ. Но $J'=J$, значи a_1',a_3' лежат на J. Също например a_0 и a_2 са спрегнати относно J. Понеже спрегнатостта на две точки относно една повърхнина от втора степен е проективно свойство, a_0' и a_2' ще бъдат спрегнати относно J', т. е. относно J. Така се проверяват условията 1) и 2) за a_k'.

Да наречем π' равнината, в която се трансформира $\pi=\varrho$ чрез φ. Тъй като свойството точка и равнина да бъдат полюс и полярна равнина спрямо една повърхнина от втора степен е проективно, щом f и π са полюс и полярна равнина спрямо J, и π' ще бъде полярна равнина на f' спрямо J', т. е. спрямо J. Понеже и свойството точка и равнина да бъдат полюс и полярна равнина спрямо един тетраедър е също проективно, вижда се, че π' ще бъде и полярна равнина на f' спрямо тетраедъра a_k'. Получихме, че полярните равнини на f' относно J и a_k' съвпадат, т. е. за $C'=a_k'f'$ е изпълнено и 3). Валидността на условията 1), 2), 3) за C' показва, че системата $C'=a_k'f$ е циклична

в) Да предположим, че $C=a_kf$ е циклична система и нека J' е неизродена повърхнина от втора степен със свойствата: 1) a_1 и a_3 лежат на J', 2) a_0 и a_2 са спрегнати относно J' и лежат на спрегнатата поляра на правата a_1a_3 относно J, 3) полярните равнини на f спрямо J' и тетраедъра a_k съвпадат. Тогава J' е повърхнината J.

Нека J' има спрямо C уравнение

$$\sum a_{ik}y_iy_k=0. \tag{47}$$

Както при доказване достатъчността в а), установява се въз основа на предположените свойства 1), 2), 3) за J, че всички коефициенти, освен a_{00}, a_{22}, a_{13}, са 0 и че $a_{00}=a_{22}=a_{13}$. Тогава уравнението (47) на J' става

$$y_0^2+y_2^2+2a_1a_3=0.$$

Но и J има същото уравнение спрямо C, понеже това е цикличен тетраедър. Оттук следва желаното $J'=J$.

Сега можем да докажем твърдението, обратно на б):

г) Нека $C=a_kf$ и $C'=a_k'f'$ са две циклични системи. Съществува точно една елиптична еднаквост, която трансформира

$$a_0\to a_0',\quad a_1\to a_1',\quad a_2\to a_2',\quad a_3\to a_3',\quad f\to f'$$

Съществува точно една колинеация φ в пространството, която преобразува $a_k\to a_k'$, $f\to f'$. Ще докажем, че тя е елиптична еднаквост. И тъй като въобще всяка елиптична еднаквост с желаните свойства трябва да бъде колинеация, която трансформира $a_k\to a_k'$,

$f \to f'$, следва и единствеността на търсената елиптична еднаквост. Тъй че същественото е да установим, че φ е елиптична еднаквост.

Тъй като C е циклична система, според а) тя има относно J свойствата 1), 2), 3). Подобно на доказателството на б) се вижда, че a_k', f' ще имат аналогичните свойства 1), 2), 3) спрямо повърхнината J', в която се трансформира J чрез колинеацията φ. Понеже системата $a_k'f'$ е циклична и има спрямо повърхнината J свойствата 1), 2), 3), според в) следва, че $J'=J$. И тъй нашата колинеация φ трансформира J в себе си и ще бъде елиптична еднаквост.

д) Нека K е ортогонална система и $a_0a_1a_2a_3$ са вектори спрямо K на 4 некомпланарни точки, като крайните от тях са нормирани. За произволна точка от пространството с вектор x относно K да наречем съответни четирите числа y_0, y_1, y_2, y_3, определени еднозначно от

(48) $$x=y_0 \, . \, a_0+y_1 \, . \, a_1+y_2 \, . \, a_2+y_3 \, . \, a_3.$$

Известно е, че y_k са проективни координати на точката x спрямо проективната координатна система S с основни точки a_0, a_1, a_2, a_3 и единична точка

$$a_0+a_1+a_2+a_3.$$

В такъв случай S е тогава и само тогава циклична система, когато за скаларните произведения на a_k имаме следната таблица:

(49)

	a_0	a_1	a_2	a_3
a_0	1	0	0	0
a_1	0	0	0	1
a_2	0	0	1	0
a_3	0	1	0	0

Да допуснем, че важи написаната таблица. Тогава за уравнението на абсолютната повърхнина J намираме в координатната система S уравнение

$$x^2=0, \text{ или } (y_0 . a_0+y_1 . a_1+y_2 . a_2+y_3 . a_3)^2=0$$

или развито

50) $$y_0^2+y_2^2+2y_1y_3=0,$$

като са взети пред вид скаларните произведения от таблицата. Щом J има спрямо S уравнението (50), S е по дефиниция циклична система.

Нека обратно S е циклична система; трябва да докажем, че скаларните произведения имат стойностите от (49). Щом S е циклична система, точките a_1, a_3 са безкрайни, следователно, $a_1^2=a_3^2=0$. Точките a_0, a_2 са крайни и по предположение нормирани, така че $a_0^2=a_2^2=1$. По-нататък по а) a_0 и a_2 са спрегнати относно J, следователно, $a_0a_2=0$ по (4), като помним, че a_0, a_2 са вектори на точките спрямо ортогонална система. По-нататък правите a_1a_3 и a_0a_2 са спрегнати поляри относно J, значи коя да е от първите две точки е ортогонална на коя да е от вторите две точки. Това дава $a_1 a_0 = a_1 a_2 = 0$, $a_3 a_0 = a_3 a_2 = 0$. За да бъде доказана цялата таблица, трябва да установим още само $a_1 a_3 = 1$. Уравнението на J спрямо S ще бъде $x^2 = 0$, т. е. $(y_0 . a_0 + y_1 . a_1 + y_2 . a_2 + y_3 . a_3)^2 = 0$. Като вземем пред вид намерените вече стойности на останалите скаларни произведения, получаваме за J уравнение

$$y_0^2 + y_2^2 + 2a_1 a_3 . y_1 y_3 = 0. \tag{51}$$

Тъй като по предположение S е циклична система, J трябва да има уравнение

$$y_0^2 + y_2^2 + 2y_1 y_3 = 0. \tag{52}$$

Сравняването на (51) и (52) дава $y_1 y_3 = 1$.

Използуването на цикличните системи в елиптичната геометрия, особено в комплексната елиптична геометрия, е толкова удобно, колкото на ортогоналните системи.

3. Циклична придружаваща система за един рой. С всяка права $g = g(\sigma)$ от общия изотропен рой G ние ще свържем инвариантно една циклична система, в която $a_0 = z$, $a_1 = e$; да се има пред вид, че поради (28) имаме

$$a_0^2 = 1, \ a_1^2 = 0, \ a_0 a_1 = 1.$$

Праволинейната повърхнина F, образувана от точките върху правите на роя G, има параметрично представяне

$$y = z + v . e \tag{53}$$

с параметри σ, v. Допирателната ѝ равнина в произволната точка y се определя с точките

$$y = z + v . e, \ y_\sigma = z' + v . e', \ y_v = e.$$

Специално допирателната ѝ равнина ζ в централната точка z се определя с точките z, z', e. Нека r е вектор на нейния полюс спрямо J; за него ще имаме

$$rz = 0. \ rz' = 0, \ re = 0 \tag{54}$$

и ако положим

$$r = \alpha . z + \beta . z' + \gamma . e + \delta . e'$$

с неизвестни коефициенти $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, от уравнения (54) ще получим

$$\alpha - \delta = 0, \ \beta S^2 + \gamma + \delta T = 0, \ \beta = 0.$$

Оттук определяме

$$\alpha = \frac{U\varrho}{\sqrt{1-U^2}}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -\frac{TU}{\sqrt{1-U^2}}\varrho, \quad \delta = \frac{U}{\sqrt{1-U^2}}\varrho, \quad \text{с } \varrho \neq 0,$$

така че

$$r = \varrho \frac{U}{\sqrt{1-U^2}} \cdot (z - T . e + e') \tag{55}$$

По-нататък

$$r^2=\varrho^2\frac{U^2}{1-U^2}\cdot\frac{1-U^2}{U^2}$$

и ако искаме да нормираме r с $r^2=1$, ще имаме $\varrho=1$ и

(56) $$r=\frac{U}{\sqrt{1-U^2}}\cdot(z-T.e+e')=\delta.(z-T.e+e').$$

Коефициентът е

(57) $$\delta=\delta(\sigma)=\frac{U}{\sqrt{1-U^2}}=\operatorname{tg}\frac{R}{k}\cdot$$

Той е инварианта на G и за него от $U'=-U$ лесно намираме

(58) $$\delta'=-\delta(1+\delta^2).$$

Точката r избираме за точка a_2 на цикличната система $C=C(\sigma)$ в която произволна точка x (вектор спрямо ортогонална система) има координати y_0, y_1, y_2, y_3, определени от

(59) $$x=y_0.z+y_1.e+y_2.r+y_3.q.$$

Тук q е четвъртата точка a_3. Съгласно общите разглеждания от 2. q трябва да бъде отличната от e пресечна точка на J със спрегнатата поляра спрямо J на правата $a_0a_2=zr$. Или иначе казано: през правата zr минават две допирателни равнини към J; едната има допирна точка e, другата — именно търсената точка q. Най-после можем да кажем: допирателната равнина ζ не е изотропна (тъй като полюсът ѝ r е крайна точка) и ще пресече J в една неизродена крива k_ζ от втора степен. От точката z в тази равнина минават две тангенти към k_ζ; едната има допирна точка e, втората — допирна точка q. Според д) от 2. таблицата на скаларните произведения на z, e, r, q трябва да бъде

(60)

	z	e	r	q
z	1	0	0	0
e	0	0	0	1
r	0	0	1	0
q	0	1	0	0

Значи имаме

(61) $$qz=0,\qquad qe=1,\qquad qr=0,\qquad q^2=0.$$

Полагаме

$$q=\alpha.z+\beta.z'+\gamma.e+\tau.e'$$

с неизвестни коефициенти α, β, γ, τ. В (61) заместваме q с този израз и като вземем пред вид (60), намираме за α, β, γ, τ уравнения, от които получаваме

$$\alpha=\tau=0,\quad \beta=1,\quad \gamma=-\frac{S^2}{2}$$

Значи векторът q е

$$q=z'-\frac{S^2}{2}.e. \tag{62}$$

Така с образуващата $g=g(\sigma)$ на роя G свързахме инвариантно придружаваща циклична координатна система $C=C(\sigma)$ с основни точки

$$a_0=z,\ a_1=e,\ a_2=r=\delta.\ (z-T.\ e+e'),\ a_3=q=z'-\frac{S^2}{2}.e. \tag{63}$$

Инвариантността ѝ се вижда от описания вече геометричен характер на точките z, e, r, q.

С (63) основните точки z, e, r, q на $C(\sigma)$ са представени като линейни комбинации на четирите линейно независими вектори e, e' z, z'. Обратно имаме

$$e=e,\ e'=-z+T.\ e+\frac{1}{\delta}.r,\ z=z,\ z'=\frac{S^2}{2}.e+q. \tag{64}$$

За придружаващия цикличен тетраедър $C(\sigma)$ лесно могат да се намерят формули на Френе. Да положим

$$\begin{aligned} z'&=c_{11}.z+c_{12}.e+c_{13}.r+c_{14}.q,\\ e'&=c_{21}.z+c_{22}.e+c_{23}.r+c_{24}.q,\\ r'&=c_{31}.z+c_{32}.e+c_{33}.r+c_{34}.q,\\ q'&=c_{41}.z+c_{42}.e+c_{43}.r+c_{44}.q \end{aligned} \tag{65}$$

с неизвестни коефициенти — функции на σ. Като множим скаларно всяко от тези равенства последователно с z, e, r, q и вземем пред вид таблицата (60), намираме за коефициентите представяния чрез скаларни произведения.

$$\begin{aligned} &c_{11}=z'z,\ c_{14}=z'e,\ c_{13}=z'r,\ c_{12}=z'q,\\ &c_{21}=e'z,\ c_{24}=e'e,\ c_{23}=e'r,\ c_{22}=e'q,\\ &c_{31}=r'z,\ c_{34}=r'e,\ c_{33}=r'r,\ c_{32}=r'q,\\ &c_{41}=q'z,\ c_{44}=q'e,\ c_{43}=q'r,\ c_{42}=q'q. \end{aligned} \tag{66}$$

Да диференцираме скаларните произведения от таблицата и получените равенства да изразим по (66) чрез коефициентите. Получаваме

$$\begin{aligned} &c_{11}=c_{24}=c_{33}=c_{42}=0,\\ &c_{14}+c_{21}=0,\ c_{13}+c_{31}=0,\ c_{12}+c_{41}=0,\\ &c_{23}+c_{34}=0,\ c_{22}+c_{44}=0\ \ c_{32}+c_{43}=0. \end{aligned} \tag{67}$$

Да вземем няколко примера. От $e^2=0$, $r^2=1$ чрез диференциране добиваме $ee'=0$, $rr'=0$ или $c_{24}=0$, $c_{33}=0$ съгласно (66). От $zq=0$, $eq=0$ с диференциране намираме пък $z'q+zq'=0$, $e'q+eq'=0$ или $c_{12}+c_{41}=0$, $c_{22}+c_{44}=0$ съгласно (66).

Поради (67) формулите (65) за производните стават

$$(68)\qquad \begin{aligned} z' &= c_{12}\,.\,e+c_{13}\,.\,r+c_{14}\,.\,q,\\ e' &= -c_{14}\,.\,z+c_{22}\,.\,e+c_{23}\,.\,r,\\ r' &= -c_{13}\,.\,z+c_{32}\,.\,e-c_{23}\,.\,q,\\ q' &= -c_{12}\,.\,z-c_{32}\,.\,r-c_{22}\,.\,q, \end{aligned}$$

като

$$(69)\qquad \begin{aligned} &c_{12}=z'q=-zq',\ c_{13}=z'r=-zr',\ c_{14}=z'e=-ze',\\ &c_{22}=e'q=-eq',\ c_{23}=e'r=-er'\ \ c_{32}=r'q=-rq'. \end{aligned}$$

Да изчислим за $C(\sigma)$ тези 6 коефициента:

$$c_{12}=z'q=z'\left(z'-\frac{S^2}{2}\,.\,c\right)=s^2-\frac{S^2}{2}=\frac{S^2}{2},$$

$$c_{13}=z'r=\delta z'(z-T\,.\,e+e')=\delta(-T+T)=0,$$

$$c_{14}=z'e=1,$$

$$c_{22}=e'q=e'\left(z'-\frac{S^2}{2}\,.\,e\right)=T,$$

$$c_{23}=e'r=\delta e'(z-T\,.\,e+c')=\delta\left(-1+\frac{1}{U^2}\right)=\delta\,.\,\frac{1}{\delta^2}=\frac{1}{\delta},$$

$$c_{32}=r'q=-rq',$$

$$q'=\left(z'-\frac{S^2}{2}\,.\,c\right)'=z''-SS'\,.\,e-\frac{S^2}{2}\,.\,e,$$

$$(70)\qquad c_{32}=-rq'=\delta(z-T\,.\,e+e')\left(SS'.e+\frac{S^2}{2}\,.\,e'-z''\right).$$

От

$$z^2=1,\ zz'=0,\ zz''=-z'^2=-S^2,$$

$$ez'=0,\ e'z'+ez''=0,\ T+ez''=0,$$

$$e'z''=e'^2\,.\,z'^2-(e'z')^2=\frac{S^2}{U^2}-T^2 \text{ (съгласно (28))}$$

получаваме

$$zz''=-S^2,\ ez''=-T,\ e'z''=\frac{S^2}{U^2}-T^2,$$

така че можем да изчислим и c_{32} по (70):

$$c_{32}=-\frac{S^2}{2\,\delta}.$$

Следователно, формулите на Френе за цикличната система $C(\sigma) = zerq$ са

$$
(71)\qquad
\begin{aligned}
z' &= \frac{S^2}{2}\,.\,e + q,\\
e' &= -z + T\,.\,e + \frac{1}{\delta}\,.\,r,\\
r' &= -\frac{S^2}{2\delta}\,.\,e - \frac{1}{\delta}\,.\,q,\\
q' &= -\frac{S^2}{2}\,.\,z + \frac{S^2}{2\delta}\,.\,r - T\,.\,q.
\end{aligned}
$$

С намирането на тези формули е създаден аналитичният апарат за третиране на диференциално-геометрични задачи за общите изотропни роеве прави.

От формулите на Френе, във връзка със свойствата на цикличните тетраедри от 2., следва, че естествените уравнения

$$(72)\qquad S^2 = S^2(\sigma),\ T = T(\sigma),\ U^2 = U^2(\sigma)$$

определят роя еднозначно до елиптична еднаквост. Разбира се в горните уравнения в същност функцията U^2 е почти еднаква за всички роеве, именно

$$(73)\qquad U = U_0^2\ e^{-2\sigma} = \sin^2\frac{R_0}{k}e^{-\cdot\sigma},$$

така че съществени са първите две уравнения.

Ако $S^2(\sigma)$, $T(\sigma)$. $U^2(\sigma) = U_0^2 e^{-2\sigma}$ са дадени като холоморфни функции на σ в проста област Σ, съдържаща $\sigma = 0$, линейната система диференциални уравнения (71) за четирите векторни функции $z(\sigma)$, $e(\sigma)$, $r(\sigma)$, $q(\sigma)$ има (дори безбройно много) системи решения, холоморфни в някаква околност на $\sigma = 0$. И лесно е да се провери, че оня рой, чиято произволна права $g(\sigma)$ е определена с намерените функции $z(\sigma)$, $e(\sigma)$, има естествен параметър σ и дадените функции $S^2(\sigma)$, $T(\sigma)$, $U^2(\sigma)$ като инварианти.

Значи има безбройно много роеве с дадени инварианти $S^2(\sigma)$, $T(\sigma)$, $U^2(\sigma)$. Ще докажем, че всеки два от тях са конгруентни.

Нека G и $\bar{G}$ са два изотропни роя със същите инварианти S^2, T, U^2 (или δ), така че и за $\bar{G}$ имаме уравненията (71) със същите S^2, T, U^2, като вместо z, e, r, q трябва да пишем $\bar{z}$, $\bar{e}$, $\bar{r}$, $\bar{q}$. За роя G важат развитията

$$
(74)\qquad
\begin{aligned}
z &= z(\sigma) = z_0 + \frac{z_0'}{1!}\cdot\sigma + \frac{z_0''}{2!}\,.\,\sigma^2 + \cdots\\
e &= e(\sigma) = e_0 + \frac{e_0'}{1!}\cdot\sigma + \frac{e_0''}{2!}\,.\,\sigma^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

където

$$z_0^{(k)} = z^{(k)}(0),\ e_0^{(k)} = e^{(k)}(0).$$

При това редовете (74) са сигурно сходящи в достатъчно малка околност на $\sigma=0$, тъй като $z(\sigma)$, $e(\sigma)$ са по предположение холоморфни функции на σ в околността на $\sigma=0$. От уравненията (71) на Френе можем да изчислим производните $z^{(k)}$, $e^{(k)}$, $r^{(k)}$, $q^{(k)}$ за всяко $k=1, 2, 3, \ldots$ Тези производни се представят като линейни комбинации на z, e, r, q, следователно, $z_0^{(k)}$, $e_0^{(k)}$ ще бъдат линейни комбинации на z_0, e_0, r_0, q_0. Като заместим тези линейни комбинации в (74), намираме

$$z=z(\sigma)=\lambda_0 . z_0+\lambda_1 . e_0+\lambda_2 . r_0+\lambda_3 . q_0 ,$$
$$e=e(\sigma)=\mu_0 . z_0+\mu_1 . e_0+\mu_2 . r_0+\mu_3 . q_0, \tag{75}$$

където $\lambda_0, \ldots, \mu_3$ са скаларни степенни редове по степените на σ, сходящи за достатъчно малка околност на $\sigma=0$; в коефициентите им участвуват стойностите на функциите $S^2(\sigma)$, $T(\sigma)$, $U^2(\sigma)$ и на техните производни за $\sigma=0$.

По същия начин за роя $\overline{G}$ ще имаме

$$\overline{z}=\overline{z}(\sigma)=\lambda_0 . \overline{z} +\lambda_1 . \overline{e}_0+\lambda_2 . \overline{r}_0+\lambda_3 . \overline{q}_0 ,$$
$$\overline{e}=\overline{e}(\sigma)=\mu_0 . \overline{z}_0+\mu_1 . \overline{e}_0+\mu_2 . \overline{r}_0+\mu_3 . \overline{q}_0 . \tag{76}$$

Коефициентите пред $z_0, \ldots, \overline{q}_0$ тук са същите, както в (75), тъкмо защото за двата роя имаме едни и същи функции $\overline{S}^2=S^2$, $\overline{T}=T$, $\overline{U}^2=U^2$.

Да наречем C_0 цикличната координатна система с основни точки z_0, e_0, r_0, q_0 и единична точка $z_0+e_0+r_0+q_0$ (придружаващата система за правата $g(0)$). Също $\overline{C}_0$ е цикличната система с основни точки $\overline{z}_0$, $\overline{e}_0$, $\overline{r}_0$, $\overline{q}_0$ и единична точка $\overline{z}_0+\overline{e}_0+\overline{r}_0+\overline{q}_0$. Съгласно (75) λ_k и μ_k са координатите на векторите z, e спрямо C_0 и същевременно координатите на векторите $\overline{z}$, $\overline{e}$ спрямо $\overline{C}_0$. Съгласно 2.г) съществува елиптична еднаквост φ, която трансформира системата C_0 в $\overline{C}_0$ и при която векторът z с координати λ_k спрямо C_0 се трансформира във вектора с координати λ_k относно $\overline{C}_0$, т. е. в $\overline{z}$; по същия начин и векторът e чрез φ се трансформира в $\overline{e}$. Значи при нашата елиптична еднаквост произволната права $g=g(\sigma)$ от роя G се трансформира в правата $\overline{g}(\sigma)$ от $\overline{G}$ и двата роя са конгруентни.

4. Централната крива като линия на кривината. Ще потърсим върху повърхнината F отличните от праволинейните образуващи линии на кривината. Допирателната равнина в точката

$$y=z+v . e$$

на повърхнината F е определена с точките

$$z+v . e, \quad z'+v . e', \quad e.$$

Заместваме тук e', z' с техните изрази от (64) и намираме следните представяния на трите точки:

$$e,\ z+v.e,\ \frac{S^2}{2}.e+q+v.\left(-z+T.e+\frac{1}{\delta}.r\right).$$

Тогава допирателната равнина ще бъде определена и с трите точки

$$e,\ z,\ \delta.q+v.r, \tag{77}$$

които са линейни комбинации на предишните три. Да потърсим нормалата към F в точката y. Тя е определена с y и с полюса n на допирателната равнина спрямо J. Точката n ще намерим като линейна комбинация на z, e, r, q от условията

$$ne=0,\ nz=0,\ n(\delta.q+v.r)=0$$

за ортогоналност с трите точки (77). Лесно намираме

$$n=v.e-\delta.r. \tag{78}$$

Нека имаме една отлична от праволинейните образуващи крива l върху F; можем да считаме, че тя има уравнение $v=v(\sigma)$. За да бъде l линия на кривината на F, трябва роят на нормалите към F в точките на l да бъде развиваем. Обаче нормалата в точката

$$y=z+v.e=z(\sigma)+v(\sigma).e(\sigma)$$

на кривата се определя според горното от двете точки

$$y=z+v.e,\quad n=v.e-\delta.r$$

или все едно от точките

$$y=z+v.e,\quad t=y-n=z+\delta.r.$$

Условието за развиваемост е

$$(yt\,y'\,t')=0. \tag{79}$$

Изчисляваме

$$y'=z'+v.e'+v'.e=\frac{S^2}{2}.e+q+v\cdot\left(-z+T.e+\frac{1}{\delta}.r\right)+v'.e,$$

$$t'=z'+\delta'.r+\delta.r'=\delta'.r,$$

като сме взели пред вид формулите (71) на Френе. Тогава условието (79) се написва

$$\begin{vmatrix} 1 & v & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \delta & 0 \\ -v & \dfrac{S^2}{2}+vT+v' & \dfrac{v}{\delta} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0. \tag{80}$$

Именно $(yty't')$ е произведението от тази детерминанта по $(zerq)\neq0$. Като развием детерминантата, получаваме от (80), че трябва да имаме $v=0$. Но кривата l при $v=0$ за всяко σ е централната крива на роя, т. е. съвкупността от централните точки на всички прави от роя. Значи и в елиптичното пространство получихме за общите изотропни роеве прави същия резултат, който важи и в Евклидовото пространство: Централната крива на един общ изотропен рой прави в елиптичното пространство е единствената отлична от праволинейните образуващи линия на кривината на съответната праволинейна повърхнина F.

За Евклидовото пространство да се сравни нашата работа „Общи изотропни роеве прави в Евклидовото пространство", Годишник на Соф. унив., прир.-мат. фак., т. 44, 1947/48, кн. 1, стр. 357—394.

5. Проективна придружаваща координатна система за един рой. От (63) и (64) знаем, че основните точки z, e, r, q на цикличната придружаваща система $C(\sigma)$ се изразяват като линейни комбинации на линейно независимите вектори e, e', z, z' и обратно, като коефициентите са инварианти на роя. Това обстоятелство ни навежда на мисълта, че в някои случаи ще бъде удобно да се работи, вместо с цикличната система $C(\sigma)$, с проективната координатна система $P(\sigma)$ с основни точки e, e', z, z'. По-точно: ако спрямо някаква ортогонална система K имаме векторите e, e', z, z', за произволна точка с вектор x относно K разглеждаме числата X_0, X_1, X_2, X_3, определени от

$$x=X_0\,.\,e+X_1\,.\,e'+X_2\,.\,z+X_3\,.\,z'. \tag{81}$$

Това са координатите на x спрямо проективната координатна система $P(\sigma)$ с основни точки e, e', z, z' и единична точка

$$e+e'+z+z'.$$

Таблицата за скаларните произведения е

(82)

	e	e'	z	z'
e	0	0	0	1
e'	0	$1:U^2$	-1	T
z	0	-1	1	0
z'	1	T	0	S^2

и от нея лесно се намира и

$$(ee'zz')^2=1-\frac{1}{U^2}=\frac{1}{\delta^2},$$

тъй че можем да положим

$$(ee'zz')=\frac{1}{\delta}=\frac{\sqrt{1-U^2}}{U}\neq 0. \tag{83}$$

И при системата $P(\sigma)$ основна роля играят формулите за производните e'', z'', които можем да наречем формули на Френе за $P(\sigma)$.

Векторите e'', z'' могат да се представят като линейни комбинации на e, e', z, z'. Например

$$e''=\alpha . e+\beta . e'+\gamma . z+\tau . z' \tag{84}$$

с неизвестни коефициенти α, β, γ, τ. За да намерим тези коефициенти, множим скаларно написаното равенство последователно с e, e', z, z' и вземаме пред вид таблицата, както и равенствата

$$\begin{aligned} &ee''=-e'^2=-\frac{1}{U^2},\ e'e''=e'^2=\frac{1}{U^2}[\text{по}\,(28)],\ e''z+e'z'=0,\ e''z=-T,\\ &e''z'=T'-e'z''=T'-e'^2z'^2+(e'z')^2\,[\text{по}\,(28)],\ e''z'=T'-\frac{S^2}{U^2}+T^2, \end{aligned} \tag{85}$$

получени чрез диференциране на скаларните произведения от таблицата. За α, β, γ, τ имаме уравнения

$$ee''=\tau,\quad e'e''=\beta\frac{1}{U^2}-\gamma+\tau T,\quad e''z=-\beta+\gamma,\quad e''z'=\alpha+\beta T+\tau S^2.$$

С очевидни изчисления оттук получаваме, като вземем пред вид стойностите на $e''e$, $e''e'$, $e''z$, $e''z'$ от (85) и $U^2=\sin^2\frac{R}{k}$:

$$\alpha=T'-\frac{T}{\cos^2\frac{R}{k}},\quad \beta=T+\frac{1}{\cos^2\frac{R}{k}},\quad \gamma=\frac{1}{\cos^2\frac{R}{k}},\quad \tau=-\frac{1}{\sin^2\frac{R}{k}},$$

така че

$$e''=\left(T'-\frac{T}{\cos^2\frac{R}{k}}\right).e+\left(T+\frac{1}{\cos^2\frac{R}{k}}\right).e'+\frac{1}{\cos^2\frac{R}{k}}.z-\frac{1}{\sin^2\frac{R}{k}}.z' \tag{86}$$

За z'' аналогично правим изчисленията:

$$z''=\alpha . e+\beta . e'+\gamma . z+\tau . z',$$

$$ez''=\tau,\quad e'z''=\frac{\beta}{\sin^2\frac{R}{k}}-\gamma+\tau . T,\quad zz''=-\beta+\gamma,\quad z'z''=\alpha+\beta T+\tau S^2,$$

$$ez'=1,\ e'z'+ez''=0,\ ez''=-T,$$

$$ez''=e'^2z'^2-(e'z')^2=\frac{1}{\sin^2\frac{R}{k}}-T^2,$$

$$zz'=0,\ zz''=-z'^2=-S^2,\ z'^2=S^2,\ z'z''=SS',$$

$$\tau=-T,\quad \frac{S^2}{\sin^2\frac{R}{k}}-T^2=\frac{\beta}{\sin^2\frac{R}{k}}-\gamma+\tau T,\quad -S^2=-\beta+\delta,\quad SS'=\alpha+\beta T+\tau S^2$$

От последните уравнения за α, β, γ, τ намираме

$$\alpha=SS',\ \beta=S^2,\ \gamma=0,\ \tau=-T.$$

Получаваме окончателно

$$z''=SS'.e+S^2.e'-T.z'. \tag{87}$$

Интересно е да се сравнят (86) и (87) с аналогичните формули в Евклидовото пространство, които са дадени на стр. 372 от работата ни, спомената в края на 4. Формулите за z'' са идентични в двете пространства. Формулата за e'' обаче в елиптичното пространство е значително по-сложна, отколкото аналогичната в Евклидовото.

Формулите на Френе, било за цикличната система $C(\sigma)$, било за проективната $P(\sigma)$, могат да бъдат използувани за изследване например на централната крива C_z на роя или на кривата C_w на, центровете на оскулачната сфера. По този начин инвариантите на роя ще се поставят във връзка с инвариантите на тези две криви.

Да отбележим също така, че и в елиптичното пространство както в Евклидовото, за рой с $S=0$ можем да получим крайно параметрично представяне чрез квадратури. В този случай именно уравненията (71) на Френе могат да се интегрират в квадратури.

6. Повърхнина на Lie за един рой прави. Както в Евклидовото пространство, и в елиптичното централната точка z е свързана с повърхнината на Lie на роя G. За да установим връзката, трябва да намерим повърхнината на Lie за произволен рой прави в проективното пространство.

Нека в комплексното триизмеримо проективно пространство е установена произволна проективна координатна система и x, p са вектори спрямо системата на две различни точки. Предполагаме ги холоморфни функции

$$x=x(u),\ p=p(u) \tag{88}$$

на комплексния параметър u в една проста област D на неговата Гаусова равнина. При предположението

$$\varDelta=(pp_1xx_1)\neq 0 \qquad \text{за всяко } u \text{ от } D \tag{89}$$

(индексите пак означават производни спрямо u) съединителната права $g=g(u)$ на x и p ще опише при изменянето на u в D един неразвиваем рой прави G; точките върху правите на G образуват неразвиваема праволинейна повърхнина F. С произволната права $g=g(u)$ от G е свързана по познат начин една неизродена повърхнина $\varLambda(u)$ от втора степен, която се нарича повърхнина на Lie на роя за правата му $g(u)$.

За произволна точка

(90) $$y = \lambda . x + \mu . p$$

от правата $g = g(u)$ да потърсим правата $m(\lambda, \mu; \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ през y, която пресича правите $g(u+\varepsilon_1)$ и $g(u+\varepsilon_2)$ от G ($\varepsilon_1 \neq 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$, $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$). Когато $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, правата $m(\lambda, \mu, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ клони към една права $m(\lambda, \mu)$ през y. Съвкупността $M(u)$ от всички прави $m(\lambda, \mu)$, когато λ, μ се менят произволно, т. е. y описва $g(u)$, се нарича **спрегнат рой на Lie за правата $g(u)$ на G**. Съвкупността $\Lambda(u)$ от точките върху правите на $M(\sigma)$ е повърхнина от втора степен и именно тя се нарича **повърхнина на Lie на G за правата му $g(u)$**. Втората система образуващи $L(u)$ на $\Lambda(u)$, към която принадлежи и $g(u)$, се нарича **рой на Lie на G за правата му $g(u)$**.

Нека

(91) $$Y = \alpha . x + \beta . p + \bar{\alpha} . x_1 + \bar{\beta} . p_1$$

е произволна втора точка на $m(\lambda, \mu; \varepsilon_1, \varepsilon_2)$; първа е y. Поради условието (89) можем да намерим достатъчно малка околност на $\varepsilon = 0$, така че за произволни $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ от нея с $\varepsilon_1 \neq 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$, $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ трите прави $g(u)$, $g(u+\varepsilon_1)$, $g(u+\varepsilon_2)$ да бъдат две по две кръстосани. Тогава $m(\lambda, \mu; \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ще бъде сигурно отлична от $g(u)$ и в (91) поне едно от числата $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ ще е отлично от 0. Задачата е при дадени λ, μ да се определят така $\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$, че правата yY да пресича $g(u+\varepsilon_1)$ и $g(u+\varepsilon_2)$; тогава тя ще бъде търсената $m(\lambda, \mu; \varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Условието за пресичането на правата yY с правата $g(u+\varepsilon_1)$ е анулирането на следното четворно произведение

$$(y, Y, x(u+\varepsilon_1), p(u+\varepsilon_1)) = \Big(\lambda x + \mu . p,\ \alpha . x + \beta p + \bar{\alpha} . x_1 + \bar{\beta} . p_1,$$

$$x + \varepsilon_1 . x_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} . x_2 + \ldots,\ p + \varepsilon_1 . p_1 + \cdot \quad \Big) = 0.$$

Развиваме и подреждаме по степените на ε_1:

(92) $$\varepsilon_1 (\mu\bar{\alpha} - \lambda\bar{\beta})(xp\,x_1 p_1) + \frac{\varepsilon_1^2}{2} . [2(\lambda\beta - \mu\alpha)(xpx_1 p_1) + \mu\bar{\alpha}(xpx_1 p_2)$$
$$+ \mu\bar{\beta}(xpp_1 p_2) + \lambda\bar{\alpha}(xpx_1 x_2) + \lambda\bar{\beta}(xpp_1 x_2)] + \ldots = 0.$$

Точките означават членовете, съдържащи степени на ε_1, по-високи от втора. Степенният ред отляво е сходящ за достатъчно малки по модул ε_1, тъй като при нашите предположения четворното произведение е холоморфна функция на ε_1 в околност на $\varepsilon = 0$. Условието за пресичане на yY с $g(u+\varepsilon_2)$ е същото, както (92), но навсякъде вместо ε_1 трябва да пишем ε_2. От двете условия, оставяйки $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, намираме за граничната права $m(\lambda, \mu)$, или по-добре за лежащата върху нея гранична точка на Y, която означаваме пак с

$$Y = \alpha . x + \beta . p + \bar{\alpha} . x_1 + \bar{\beta} . p_1,$$

условия:

$$\mu\bar{a}-\lambda\bar{\beta}=0,$$

(93) $$2(\lambda\beta-\mu a)(xpx_1p_1)+\mu\bar{a}(xpx_1p_2)+\mu\bar{\beta}(xpp_1p_2)+$$
$$+\lambda a(xpx_1x_2)+\lambda\bar{\beta}(xpp_1x_2)=0.$$

От първото условие, понеже поне едно от числата λ, μ не е 0, намираме

(94) $$\bar{a}=\lambda\varrho,\ \bar{\beta}=\mu\varrho$$

с някакво число $\varrho \neq 0$. Тези стойности на $\bar{a}$, β заместваме във второто условие (93) и то добива вида

(95) $$2(\mu a-\lambda\beta).\Delta+(A_1\lambda^2+A_2\lambda\mu+A_3\mu^2)\varrho=0,$$

където

(96) $$\Delta=(pp_1xx_1),\ A_1=(xpx_1x_2),\ A_2=(xpx_1p_2)+(xpp_1x_2),$$
$$A_3=(xpp_1p_2).$$

Така получихме: правата $m(\lambda, \mu)$ от спрегнатия рой $M(u)$ на Lie, минаваща през точката $y=\lambda.x+\mu.p$, съдържа и точката

(97) $$Y=a.x+\beta.p+\varrho.(\lambda.x_1+\mu.p_1),$$

като между a, β, ϱ съществува линейната хомогенна връзка (95). В същност ако посредством (95) изразим един от параметрите a, β, ϱ чрез другите два и го заместим в (97), ще имаме параметрично представяне чрез останалите два параметра на правата $m(\lambda, \mu)$.

Да въведем проективната координатна система $P(u)$, спрямо която произволната точка t да има координати, определени от

(98) $$t=X_0.p+X_1.p_1+X_2.x+X_3.x_1$$

и да намерим уравнението на повърхнината $\Lambda(u)$ на Lie спрямо тази система. От (97), като сравним с (98), виждаме, че произволната точка t от повърхнината на Lie има координати

(99) $$\tau X_0=\beta,\ \tau X_1=\varrho\mu,\ \tau X_2=a,\ \tau X_3=\varrho\lambda,\ (\tau\neq 0)$$

като между a, β, ϱ съществува връзката (95). Трябва да изключим от (99) и (95) параметрите τ, ϱ, a, β, λ, μ. Това става веднага, като определим от (99) параметрите a, β, λ, μ и ги заместим в (95). Получаваме уравнение

(100) $$A_1X_3^2+A_2X_1X_3+A_3X_1^2+2\Delta(X_1X_2-X_0X_3)=0$$

на $\Lambda(u)$ спрямо $P(u)$.

7. Повърхнина на Lie при общ изотропен рой в елиптичното пространство. Да се върнем сега към нашия общ изотропен рой G в елиптичното пространство и да намерим повърхнината $\Lambda(\sigma)$ на *Lie* за правата му $g=g(\sigma)$. Използуваме координатната система $P(\sigma)$ от 5. Прилагаме резултатите от 6., като вместо u, x, p сега имаме v, z, e. Изчисляваме детерминантите A_1, A_2, A_3:

$$A_1=(zez'z'')=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ SS' & S^2 & 0 & -T \end{vmatrix}=\Delta=-S^2\Delta,$$

$$A_2=(zez'e'')+(zee'z'')=\Delta\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ T'-\dfrac{T}{\cos^2\dfrac{R}{k}} & T+\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{R}{k}} & \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{R}{k}} & -\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{R}{k}} \end{vmatrix}+$$

$$+\Delta\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ SS' & S^2 & 0 & -T \end{vmatrix}=-\Delta\left(2T+\frac{1}{\cos^2\dfrac{R}{k}}\right),$$

$$A_3=(zee'e'')=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{R}{k}} \end{vmatrix}\Delta=-\Delta\cdot\frac{1}{\sin^2\dfrac{R}{k}}.$$

Тук, разбира се, са използувани формулите (86), (87) за e'' и z'', за да имаме векторите във всяко четворно произведение като линейни комбинации на основните e, e', z, z.

Тогава съгласно (97) правата $m(\lambda, \mu)$ от спрегнатия рой $M(\sigma)$ на Lie, отговарящ на правата $g(\sigma)$ на G, ще има параметрично уравнение

(101) $$Y=\alpha\,.\,z+\beta\,.\,e+\varrho\,.\,(\lambda\,.\,z'+\mu\,.\,e'),$$

в което параметрите α, β, ϱ са свързани с условието

(102) $$2(\mu\alpha-\lambda\beta)-\left[S^2\lambda^2+\left(2T+\frac{1}{\cos^2\dfrac{R}{k}}\right)\lambda\mu+\frac{1}{\sin^2\dfrac{R}{k}}\mu^2\right]\varrho=0,$$

което пишем накратко

(103) $$2\mu\alpha-2\lambda\beta-A\varrho=0$$

със

(104) $$A=S^2\lambda^2+\left(2T+\frac{1}{\cos^2\dfrac{R}{k}}\right)\lambda\mu+\frac{1}{\sin^2\dfrac{R}{k}}\mu^2.$$

Уравнението (100) на повърхнината $\Lambda(\sigma)$ на Lie с намерените стойности за A_1, A_2, A_3 става

$$(105)\quad S^2 X_3^2+\left(2T+\frac{1}{\cos^2\frac{R}{k}}\right)X_1 X_3+\frac{1}{\sin^2\cdot\frac{R}{k}}X_1^2-2(X_1X_2-X_0X_3)=0;$$

разбира се, имаме уравнение спрямо системата $P(\sigma)$, в която произволната точка t има координати X_0, X_1, X_2, X_3, определени от

$$(106)\qquad t=X_0.e+X_1.e'+X_2.z+X_3.z'.$$

От (101) и (103) имаме параметрично представяне на $\Lambda(\sigma)$:

$$(107)\qquad \tau X_0=\beta,\ \tau X_1=\varrho\mu,\ \tau X_2=\alpha,\ \tau X_3=\varrho\lambda\ (\tau\neq 0),$$

като α, β, ϱ са свързани със (103).

Ние ще потърсим общите точки на произволната права $m(\lambda, \mu)$ от спрегнатия рой $M(\sigma)$ на Lie с абсолютната повърхнина J. Уравнението на последната спрямо системата $P(\sigma)$ е $t^2=(X_0.e+X_1.e'+$ $+X_2.z+X_3.z')^2=0$ или развито

$$(108)\qquad \frac{X_1^2}{\sin^2\frac{R}{k}}+X_2^2+S^2X_3^2+2X_0X_1-2X_1X_2+2TX_1X_3)=0;$$

при развиването е използувана таблицата (82).

За намиране въпросните общи точки заместваме X_i от (107) в (108), като третираме λ, μ като дадени константи и помним, че между α, β, ϱ има връзката (103). Получаваме

$$\frac{\varrho^2\mu^2}{\sin^2\frac{R}{k}}+\alpha^2+S^2\varrho^2\lambda^2+2T\varrho^2\lambda\mu-2\varrho(\alpha\mu-\lambda\beta)=0$$

и заместваме тук $\alpha\mu-\lambda\beta=\frac{A\varrho}{2}$ от (103). След опростявания, като вземем пред вид пълния израз (104) за A, намираме

$$\alpha^2-\frac{\lambda\mu}{\cos^2\frac{R}{k}}\varrho^2=0.$$

Оттук следва

$$(109)\qquad \varrho=\varkappa.\cos\frac{R}{k},\quad \alpha=\varepsilon\sqrt{\lambda\mu}.\varkappa,$$

където ε е $+1$ или -1 и $\varkappa\neq 0$, понеже ϱ беше $\neq 0$. Заместваме ϱ и α в (103):

$$\left(2\varepsilon\mu\sqrt{\lambda\mu}-A\cos\frac{R}{k}\right).\varkappa-2\lambda\beta=0$$

и оттук следва

$$\beta = 2\,\varepsilon\mu\sqrt{\lambda\mu} - A\cos\frac{R}{k},\quad \varkappa = 2\,\lambda.$$

Поставяме полученото $\varkappa$ в (109) и така окончателно за пресечните точки на $m(\lambda, \mu)$ с J имаме

$$\alpha = 2\,\varepsilon\lambda\sqrt{\lambda\mu},\quad \beta = 2\,\varepsilon\mu\sqrt{\lambda\mu} - A\cos\frac{R}{k},\quad \varrho = 2\,\lambda\cos\frac{R}{k}. \tag{110}$$

С оглед на (101) добиваме: всяка образуваща $m(\lambda, \mu)$ на повърхнината $\Lambda(\sigma)$ на Lie от системата $M(\sigma)$ има в общия случай две пресечни точки с J, именно

$$Y_{1,2} = 2\,\varepsilon\,\lambda\sqrt{\lambda\mu}\,.\,z + \left(2\,\varepsilon\mu\sqrt{\lambda\mu} - A\cos\frac{R}{k}\right).\,e + 2\,\lambda\cos\frac{R}{k}.\,(\lambda\,.\,z' + \mu\,.\,e') \tag{111}$$

при $\varepsilon = +1$ и $\varepsilon = -1$.

Двете пресечни точки се сливат тогава и само тогава, когато $\sqrt{\lambda\mu} = 0$ и тогава съответните прави $m(\lambda, \mu)$ от $M(\sigma)$ ще бъдат изотропни прави.

При $\lambda = 0$, $\mu = 1$ точката $y = \lambda z + \mu\,.\,e$ е безкрайната точка e на $g(\sigma)$ и с нея се сливат Y_1 и Y_2; значи минаващата през безкрайната точка e на $g(\sigma)$ образуваща на $\Lambda(\sigma)$ от системата $M(\sigma)$ е изотропна. При $\lambda = 1$, $\mu = 0$ точката y е централната точка z и съответната образуваща $m(\lambda, \mu)$ от $M(\sigma)$ пресича J в точка $Y_1 = Y_2$, съвпадаща с точката $q = z' - \frac{S^2}{2}.\,e$ от 3; значи и минаващата през централната точка z на $g(\sigma)$ образуваща на $\Lambda(\sigma)$ от системата $M(\sigma)$ е също изотропна. И споменатите са единствените прави от системата $M(\sigma)$, които са изотропни.

Или иначе казано: централната точка z върху правата g от роя G е оная единствена крайна точка върху g, за която минаващата през нея образуваща $m(\lambda, \mu)$ от спрегнатия рой на Lie е изотропна права.

Тази геометрична характеристика на централната точка важи и за общ изотропен рой в Евклидовото пространство, както установихме в цитираната в края на 4. работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Петканчин, Върху изотропните роеве прави в елиптичното пространство, Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., XLII (1950—1952), кн. I, ч. I, стр. 93—105.

1. B. Petkantschin, Über die isotropen Regelscharen im elliptischen Raum, Ann. de l'Université de Sofia, Fac. d. Sc., XLVII (1950—1952), livre 1, par. 1, p. 93—105 (bulgarisch mit deutscher Zusammenfassung).

2. A. Duschek, Über die Krümmungslinien der Mongeschen Flächen. Stzgber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, math.-naturwiss. Kl., Abt. IIa, 136 (1927), S. 407—412.

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ИЗОТРОПНЫХ ПРЯМЫХ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Б. Петканчин

РЕЗЮМЕ

Настоящая статья является продолжением начатого в статье [1] исследования однопараметрических систем изотропных прямых в эллиптическом пространстве.

Мы обозначаем через N_3 комплексное трехмерное эллиптическое пространство радиуса кривизны k. Абсолютная поверхность J пространства выражается уравнением (1) относительно любой ортогональной координатной системы. Скалярное произведение xy векторов x, y двух точек имеет вид (3); расстояние точек определяется формулой (7).

Пусть две точки x и p являются голоморфными функциями $x(u)$ и $p(u)$ комплексного переменного u. Если выполняются условия (19), прямая $g(u)=xp$ — изотропна, т. е. касательная к абсолютной поверхности. При изменении u в данной области D прямая $g(u)$ образует однопараметрическую систему прямых G. Мы предполагаем, что неравенства

(20) $$\Delta=(pp_1\,xx_1)\neq 0,$$

$$\left[p_1=\frac{dp}{du},\ x_2=\frac{d^2x}{du^2},\ \ldots\right]$$

(23) $$px_1\,.\,p_1p_2-p_1^2(p_1x_1+px_2)\neq 0$$

имеют место для любого u и называем тогда G **общей изотропной системой**. В статье [1] мы ввели для G инвариантную центральную точку

(25) $$z=x+\frac{p_1^2\,.\,x_1^2+p_1x_1\,.\,px_2-px_1\,.\,p_1x_2}{px_1\,.\,p_1p_2-p_1^2(p_1x_1+px_2)}\,.\,p$$

на $g(u)$, инвариантный параметр

(26) $$\sigma=\int\limits_{u_0}^{u}\frac{px_1\,.\,p_1p_2-p_1^2(p_1x_1+px_2)}{p_1^2\,.\,px_1}\,du$$

и инвариантное нормирование

$$(27) \qquad e=\frac{p}{pz'} \qquad \left[{}'=\frac{d}{d\sigma}\right].$$

Если G задана уравнениями $z=z(\sigma)$, $e=e(\sigma)$, существенные инварианты системы суть

$$(35) \qquad U^2=\frac{1}{e'^2}=\sin^2\frac{R}{k}=\sin^2\frac{R_0}{k}.e^{-2\sigma}, \quad T=e'z', \quad S^2=z'^2.$$

В **2.** мы определяем циклические координатные системы в N_3 и изучаем их свойства. Проективная координатная система $a_0a_1a_2a_3f$ в N_3 называется циклической, если: 1) точки a_1 и a_3 лежат на J; 2) точки a_0 и a_2 ортогональны и принадлежат абсолютной поляре прямой a_1a_3; 3) полярные плоскости точки f относительно тетраэдра $a_0a_1a_2a_3$ и относительно J совпадают.

В **3.** мы связываем инвариантным образом с каждой прямой $g(\sigma)$ системы G сопутствующую циклическую координатную систему $a_0a_1a_2a_3$, $a_0+a_1+a_2+a_3$; ее точки a_0, a_1, a_2, a_3 определяются формулами (63). Деривационные формулы для этой системы имеют вид:

$$(71) \qquad \begin{aligned} z'&=\frac{1}{2}S^2.e+q, \quad e'=-z+T.e+\frac{1}{\delta}.r, \\ r'&=-\frac{S^2}{2\delta}.e-\frac{1}{\delta}.q, \quad q'=-\frac{S^2}{2}.z+\frac{S^2}{2\delta}.r-T.q. \end{aligned} \qquad \left[\delta=\frac{U}{\sqrt{1-U^2}}=\operatorname{tg}\frac{R}{k}\right].$$

В **4.** доказывается следующий аналог одной теоремы А. Душека [2]: центральная линия $z=z(\sigma)$ на поверхности F, образованной из точек прямых системы G, является единственной линией кривизны, отличающейся от изотропных прямых системы G.

В **5.** связывается с прямой $g(\sigma)$ проективная координатная система e, e', z, z', $e+e'+z+z'$. Мы находим ее деривационные формулы (86), (87).

В **6.** и **7.** исследуется поверхность Ли для прямых поверхности F. Оказывается, что центральная точка $z(\sigma)$ является единственной точкой прямой $g(\sigma)$, для которой изотропна отличающаяся от $g(\sigma)$ и проходящая через $z(\sigma)$ образующая той поверхности Ли, которая соответствует прямой $g(\sigma)$.

REGELSCHAREN ISOTROPER GERADEN IM ELLIPTISCHEN RAUM

B. Petkantschin

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit stellt eine Weiterführung der in unserem Aufsatz [1] begonnenen Untersuchung der im Titel erwähnten Regelscharen dar.

Es sei N_3 der *komplexe* dreidimensionale *elliptische* Raum mit dem Krümmungsradius k. Bezüglich eines orthogonalen Systems hat die absolute Fläche J die Gleichung (1). Dabei hat das Skalarprodukt xy der Vektoren x, y zweier Punkte die Form (2); der Abstand δ der Punkte wird durch (7) definiert.

Es seien jetzt die beiden Punkte x und p als holomorphe Funktionen $x(u)$ und $p(u)$ des komplexen Parameters u gegeben. Falls $x(u)$ und $p(u)$ den Bedingungen (19) genügen, ist die Gerade $g(u)=xp$ isotrop, d. h. eine eigentliche Tangente von J; x ist ein endlicher, p — ein unendlicher Punkt. Wenn sich u in einem einfachzusammenhängenden Gebiet D ändert, beschreibt $g(u)$ eine Regelschar G. Wir nehmen an, dass für jedes u aus D die Ungleichungen

(20) $$\Delta=(pp_1\,xx_1)\neq 0,$$

$$\left[p_1=\frac{dp}{du},\ p_2=\frac{d^2p}{du^2},\ldots,\right]$$

(23) $$px_1\,.\,p_1p_2-p_1^2\,(p_1x_1+px_2)\neq 0$$

gelten und bezeichnen dann G als eine **allgemeine isotrope Regelschar**. In [1] haben wir für G einen invarianten Zentralpunkt

(25) $$z=x+\frac{p_1^2\,.\,x_1^2+p_1x_1\,.\,px_2-px_1\,.\,p_1x_2}{px_1\,.\,p_1p_2-p_1^2\,(p_1x_1+px_2)}\,.\,p$$

auf $g(u)$, einen invarianten Parameter

(26) $$\sigma=\int_{u_0}^{u}\frac{px_1\,.\,p_1p_2-p_1^2\,(p_1x_1+px_2)}{p_1^2\,.\,px_1}\,du$$

und eine invariante Normierung

(27) $$e=\frac{p}{pz'}\qquad\left[z'=\frac{dz}{d\sigma}\right]$$

eingeführt.

Im Folgenden setzen wir voraus, dass G durch $z=z(\sigma)$, $e=e(\sigma)$ definiert ist; dann bestehen für jedes σ die Gleichungen (28). Die Grundinvarianten der Regelschar sind

$$(35) \quad U^2 = \frac{1}{e'^2} = \sin^2 \frac{R}{k} = \sin^2 \frac{R_0}{k} . e^{-2\sigma}, \quad T = e' z', \quad S^2 = z'^2.$$

In 2. definieren wir die zyklischen Koordinatensysteme in N_3. Ein projektives Koordinatensystem $a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ f$ in N_3 wird **zyklisch** genannt falls: 1) a_1 und a_3 Punkte von J sind; 2) a_0 und a_2 zwei endliche orthogonale Punkte auf der absoluten Polare der Geraden $a_1 a_3$ sind; 3) die Polarebenen des Einheitspunktes f bez. des Tetraeders $a_0\ a_1\ a_2\ a_3$ und bez. J zusammenfallen. Es werden verschiedene Eigenschaften der zyklischen Systeme angegeben, z. B.: Falls a_0, a_1, a_2, a_3 die Vektoren von 4 Punkten bez. eines orthogonalen Koordinatensystems sind, ist das durch die Grundpunkte a_0, a_1, a_2, a_3 und den Einheitspunkt $a_0+a_1+a_2+a_3$ bestimmte projektive System genau dann zyklisch, wenn die Skalarprodukte von a_k untereinander die Werte (49) haben.

In 3. verbinden wir invariant mit jeder Geraden $g(\sigma)$ von G ein begleitendes zyklisches Koordinatensystem a_0, a_1, a_2, a_2, a_0+a_1+ $+a_2+a_3$; die Grundpunkte sind (65). Die Frenetschen Formeln für dieses System lauten:

$$(71) \quad \begin{aligned} z' &= \frac{1}{2} S^2 . e + q, \quad e' = -z + T . e + \frac{1}{\delta} . r, \qquad \left[\delta = \frac{U}{\sqrt{1-U^2}} = \operatorname{tg} \frac{R}{k}\right] \\ r' &= -\frac{S^2}{2\delta} . e - \frac{1}{\delta} . q, \quad q' = -\frac{S^2}{2} . z + \frac{S^2}{2\delta} . r - T . q. \end{aligned}$$

In 4. wird für den elliptischen Raum das Analogon zu einem Satz von A. Duschek [2] im Euklidischen Raum bewiesen: auf der Fläche F, die von den Punkten auf alle $g(\sigma)$ gebildet wird, ist die **Zentralkurve** $z = z(\sigma)$ die einzige von den isotropen Geraden von F verschiedene Krümmungslinie.

In 5. betrachtet man ein anderes spezielles, mit $g(\sigma)$ invariant verbundenes, projektives Koordinatensystem e, e', z, z', $e+e'+z+z'$. Die Frenetschen Formeln für dieses System sind (86) und (87).

In 7. untersucht man die Liesche Fläche für die Geraden von F, nachdem in 6. allgemein die Liesche Fläche einer beliebigen Linienfläche in N_3 gefunden ist. Es ergibt sich: der Zentralpunkt $z(\sigma)$ ist der einzige auf $g(\sigma)$ gelegene endliche Punkt, für welchen die durch denselben gehende und von $g(\sigma)$ verschiedene Erzeugende der zu $g(\sigma)$ gehörigen Lieschen Fläche isotrop ist.