SUR LA THERMODYNAMIQUE DES PROCESSUS IRRÉVERSIBLES — CAS DE RACINES DOUBLES DE L'ÉQUATION SÉCULAIRE

Cinquième mémoire

K. Popoff

Dans nos publications précédantes nous avons étudié les intégrales du système d'équations différentielles de la forme

(1) $$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i = g_{i1}\, x_1 + g_{i2}\, x_2 + g_{i3}\, x_3 + \ldots + g_{in}\, x_n, \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

$g_{ik} = g_{ki}$, ces intégrales s'annulant pour $t = +\infty$. Ici

$$X_i = -\frac{\partial(\Delta S)}{\partial x_i},$$

où

$$\Delta S = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} g_{ik}\, x_i\, x_k, \ (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

$\sum_{i,k} g_{ik}\, x_i\, x_k$ étant une forme quadratique positivement définie, l'intégration de ces équations par des expressions de la forme

$$x_1 = \alpha e^{rt},\ x_2 = \beta e^{rt}, \cdot \quad \cdot, x_n = \nu e^{rt}$$

conduit aux équations suivantes:

$$\begin{aligned}
&(g_{11} - r^2)\,\alpha + g_{12}\,\beta + \qquad + g_{1n}\,\nu = 0 \\
&g_{21}\,\alpha + (g_{22} - r^2)\,\beta + \quad \cdot + g_{2n}\,\nu = 0 \\
&\\
&g_{n1}\,\alpha + g_{n2}\,\beta + \cdot \quad \cdot + (g_{nn} - r^2)\,\nu = 0
\end{aligned}$$

D'ici l'on tire, pour la détermination de r, l'équation

$$\begin{vmatrix}
g_{11} - r^2 & g_{12} & g_{1n} \\
g_{21} & g_{22} - r^2 & g_{2n} \\
 & & \\
g_{n1} & g_{n2} & g_{nn} - r^2
\end{vmatrix} = 0.$$

La forme $\sum_{ck} g_{ik} x_i x_k$ étant positivement définie, n des racines de cette équation sont négatives et les n autres positives. Soient

$r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < r_n < 0$ et $r_{n+1} = -r_1$, $r_{n+2} = -r_2$, $\cdots$, $r_{2n} = -r_n$.

Les intégrales cherchées correspondent aux racines négatives $r_1, r_2, \cdots, r_n$. En formant les X_i avec les x_i, correspondant à l'une de ces racines, l'on a

$$X_1 = (g_{11}\alpha + g_{12}\beta + \cdots + g_{1n}\nu)\, e^{rt}$$
$$X_2 = (g_{21}\alpha + g_{22}\beta + \cdots + g_{2n}\nu)\, e^{rt}$$
$$\cdots$$
$$X_n = (g_{n1}\alpha + g_{n2}\beta + \cdots + g_{nn}\nu)\, e^{rt}$$
$$x_1' = r\alpha e^{rt},\; x_2' = r\beta e^{rt}, \cdots, x_n' = r\nu e^{rt}.$$

L'élimination de $\alpha, \beta, \cdots, \nu$ des expressions de $X_1, X_2, \cdots, X_n$ et de x_1' conduit à

$$\begin{vmatrix} x_1' & r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ X_1 & g_{11} & g_{12} & g_{13} & \cdots & g_{1n} \\ X_2 & g_{21} & g_{22} & g_{23} & \cdots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ X_n & g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on tire

$$x_1' = L_{11} X_1 + L_{12} X_2 + \cdots + L_{1n} X_n.$$

De même l'élimination de $\alpha, \beta, \cdots, \nu$ des expressions de $X_1, X_2, \cdots, X_n$ et de x_2' conduit à

$$x_2' = L_{21} X_1 + L_{22} X_2 + \cdots + L_{2n} X_n.$$

En tenant compte de ce que $g_{ik} = g_{ki}$ on trouve de suite qu'on a

$$L_{12} = L_{21}.$$

Ce résultat est obtenu en ne considérant que les intégrales correspondant à une valeur quelconque de la racine r. Dans le cas où les racines sont simples les intégrales générales du système (1), s'annulant pour $t = +\infty$, sont de la forme

$$x_1 = C_1 \alpha_1 e^{r_1 t} + C_2 \alpha_2 e^{r_2 t} + \cdots + C_n \alpha_n e^{r_n t}$$

$$x_2 = C_1 \beta_1 e^{r_1 t} + C_2 \beta_2 e^{r_2 t} + \cdots + C_n \beta_n e^{r_n t}$$

$$x_n = C_1 \nu_1 e^{r_1 t} + C_2 \nu_2 e^{r_2 t} + \cdots + C_n \nu_n e^{r_n t}$$

L'élimination de $C_1 e^{r_1 t}$, $C_2 e^{r_2 t}, \cdots, C_n e^{r_n t}$ des expressions de $X_1, X_2, \cdots, X_n$, formées avec ces valeurs de $x_1, x_2, \cdots, x_n$ et des valeurs de x_i', respectivement de x_k', conduit, comme nous l'avons montré dans notre troisième mémoire cité, aux relations phénoménologiques de la thermodynamique des processus irréversibles de la forme

$$x_i' = L_{i1} X_1 + L_{i2} X_2 + \cdots + L_{in} X_n, \quad i = 1, 2, 3, \cdots, n,$$

où les coefficients L_{ik} ne dépendent des constantes d'intégration C. Dans le cas de $n=2$ l'on obtient facilement, comme nous l'avons fait dans notre premier mémoire qu'on a $L_{12} = L_{21}$. Dans le cas de $n=3$ et $n=4$ M. Ch. Karanikoloff a montré la symétrie du tenseur L par une méthode algébrique. M. M. E. Dimittroff et Kyrille Dotcheff ont montré cette symétrie, dans le cas de n quelconque, par le calcule des matrices.

Dans notre seconde et troisième mémoire de ZAMP nous avons considéré le cas plus générale où l'on garde tous les termes dans le développement de ΔS suivant les puissances des x_i en supposant toujours les racines distinctes. Considérons maintenant ce qui se passe dans le cas de racines multiples. Ici nous nous bornerons du cas $n=2$, mais la méthode est générale. Considérons d'abord le cas où

1°) ΔS est réduit à ces termes du second degré.

En nous bornant aux termes du second degré, nous aurons à considérer le système d'équations différentielles

$$(2) \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = a x + b y = X, \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = b x + c y = Y,$$

avec

$$a > 0, \; c > 0, \; a c - b^2 > 0,$$

où nous avons écrit x, y au lieu de x_1, x_2 et a, b, c au lieu de g_{11}, g_{12}, g_{22}.

L'intégration de ces équations par des expressions de la forme $x = \alpha e^{rt}$, $y = \beta e^{rt}$ conduit à l'équation

$$\begin{vmatrix} a - r^2 & b \\ b & c - r^2 \end{vmatrix} = r^4 - r^2(a+c) + a.c - b^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$r_{1,2}^2=\frac{a+c}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+b^2}.$$

Dans le cas de racines doubles on a

$$b=0,\quad a=c>0$$

et les équations ci-dessus se réduisent aux équations

$$\frac{d^2x}{dt^2}=a\,.\,x=X,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=a\,.\,y=Y,$$

d'où l'on tire

$$x=C_1e^{-\sqrt{a}\,t}\qquad x'=-\sqrt{a}\,C_1e^{-\sqrt{a}\,t}=-\sqrt{a}\,.x,$$

$$y=C_2e^{-\sqrt{a}\,t}\qquad y'=-\sqrt{a}\,C_2e^{-\sqrt{a}\,t}=-\sqrt{a}\,.y$$

et enfin

$$x'=\frac{X}{-\sqrt{a}},\ y'=\frac{Y}{-\sqrt{a}}.$$

Ainsi les L_{ik} des équations phénoménologiques sont ici

$$L_{11}=-\frac{1}{\sqrt{a}},\quad L_{12}=L_{21}=0,\quad L_{22}=-\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

2°) En restant toujours dans le cas de racines doubles et de $n=2$, examinons ce qui se passe lorsqu'on retient dans le développement de S autours de l'équilibre thermodynamique les termes de degré supérieur à 2.

On aura à étudier ici les intégrales du système d'équations différentielles

$$\frac{d^2x}{dt^2}=ax+ex^2+2fxy+gy^2+\ldots=X+\varphi(x,y),$$

(3)

$$\frac{d^2y}{dt^2}=ay+fx^2+2gxy+hy^2+\ldots=Y+\psi(x,y),$$

avec

$$X=a\,x,\ Y=a\,y,\ a>0,$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$\frac{dx}{\xi}=\frac{d\xi}{X+\varphi}=\frac{dy}{\eta}=\frac{d\eta}{Y+\psi}=dt. \tag{4}$$

Par une substitution linéaire de la forme

$$u=a_{11}\xi+a_{12}x+a_{13}\eta+a_{14}y,\ w=a_{31}\xi+a_{32}x+a_{33}\eta+a_{34}y,$$

(5)

$$v=a_{21}\,\xi+a_{22}\,x+a_{23}\,\eta+a_{24}\,y,\quad z=a_{41}\,\xi+a_{42}\,x+a_{43}\,\eta+a_{44}\,y$$

on aurait pu aissayer, comme nous l'avons fait dans notre second mémoir cité, ramener le système (4) à un système de la forme

$$\frac{du}{r_1\,u+\ldots}=\frac{dv}{r_2\,v+\ldots}=\frac{dw}{r_3\,v+\ldots}=\frac{dz}{r_4\,z+\ldots}$$

où les points $(\ldots)$ remplacent des termes de degré suppérieur à *un*. Mais cela ne donne pas directement des résultats dans le cas de racines doubles, puisque dans ce cas on aura

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=0$$

et la substitution (5) ne définit plus x, ξ, y, η au moyen de u, v, w, z.

Dans ce qui va suivre nous montrons que le système (3) admet des intégrales de la forme

$$x=C_1\,e^{-\sqrt{a}\,t}+\Xi\left(e^{-\sqrt{a}\,t},\ te^{-\sqrt{a}\,t}\right),$$

$$y=C_2\,e^{-\sqrt{a}\,t}+H\left(e^{-\sqrt{a}\,t},\ te^{-\sqrt{a}\,t}\right)$$

où Ξ et H sont des fonctions holomorphes de $e^{-\sqrt{a}\,t}$, $te^{-\sqrt{at}}$, s'annulant pour $t=+\infty$, et dont les développements en séries suivant ces quantités commencent par des termes de seconde degré au moins et que dans ce cas l'on a

$$\lim L_{12}=\lim L_{21}=0 \text{ pour } t\to+\infty\,.$$

Pour ariver ce résultat faisons d'abord le changement de variable définit par

$$at=\frac{d\tau}{-\sqrt{a}\,\tau},\quad \tau=e^{-\sqrt{a}\,t}\qquad \lim \tau=0 \text{ pour } t=+\infty.$$

On a ainsi

$$\frac{dx}{dt}=-\sqrt{a}\left(\tau\,\frac{dx}{d\tau}\right),\quad \frac{a^2\,x}{at^2}=a\left(\tau\,\frac{dx}{d\tau}+\tau^2\,\frac{d^2\,x}{d\tau^2}\right)$$

et des expressions analogues pour les dérivées de y.

Avec cela le système (3) s'écrit

$$a\left[\tau\,\frac{dx}{d\tau}+\tau^2\,\frac{d^2\,x}{d\tau^2}\right]\quad ax+\varphi\,(x,\,y),$$

$$a\left[\tau\,\frac{dy}{d\tau}\quad \tau^2\,\frac{d^2\,y}{d\tau^2}\right]\quad ay\quad \psi\,(x,y).$$

Nous allons exprimer x et y comme fonctions de τ au moyen de

$$u = -\tau, \quad v = \tau \log \tau,$$

considérés pour un instant comme des variables indépendantes. On a ainsi

$$\tau \frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial x}{\partial u} u + \frac{\partial x}{\partial v} v - \frac{\partial x}{\partial v} u,$$

$$\tau^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} = -\frac{\partial x}{\partial v} u + \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} u^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} u (v-u) + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} (v-u)^2$$

ce qui donne en définitive

$$(6) \quad \begin{aligned} a \left[\frac{\partial x}{\partial u} u + \frac{\partial x}{\partial v} (v-2u) + \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} u^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} u (v-u) + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} (v-u)^2 \right] &= \\ = ax + \varphi(x, y), & \\ a \left[\frac{\partial y}{\partial u} u + \frac{\partial y}{\partial v} (v-2u) + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} u^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} u (v-u) + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} (v-u)^2 \right] &= \\ = ay + \psi(x, y). & \end{aligned}$$

Montrons que ce système admet des intégrales x, y qu'on peut développer suivant les puissances positives et entières de u et de v.

On voit d'abord qu'on peu calculer de proche en proche toutes les dérivées partielles de x et de y pour $x=y=u=v=0$, à l'exception de

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}$$

qui restent arbitraires et jouent le rôle des constantes d'intégration C_1, C_2. En effet, l'on peut exprimer les dérivées partielles d'ordre p par les dérivées partielles d'ordre inférieur à p. Pour le montrer faisons une remarque préliminaire.

Les premières membres de (6) contiennent les dérivées premières de x et de y, multipliées par u et v, et les dérivées secondes, multipliées par les carés de u et de v. En différentiant p fois par rapport à u et v il reste dans les premiers membres, après avoir mis $x=y=u=v=0$, des dérivées d'ordre p seulement, ef dans les seconds membres des dérivées d'ordre inférieur à p, provenant de φ et de ψ. Cela permet d'exprimer toutes les dérivées partielles de x et de y d'ordre p (pour $x=y=u=v=0$) au moyen des dérivées partielles d'ordre inférieur à p.

Ainsi la première des équations (6) donne, en différetiant une fois par rapport à u ou à v respectivement et en posant ensuite $x \;\; y=u=v=0$,

$$\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \text{arbitraire}.$$

Une nouvelle différentiation par rapport à u et v conduit, après avoir mis $x=y=u \;\; v=0$, à trois relations distinctes ne contenant aux premiers membres que des dérivées partielles secondes de x et aux seconds membres les dérivées partielles du premier ordre de x et de y, provenant de $\varphi(x, y)$ et calculées par les operations précédentes. On a ainsi

$$3\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}-8\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+2\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=f_1\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right),$$

$$3\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}-4\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=f_2\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right),$$

$$3\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=f_3\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right),$$

avec

$$\begin{vmatrix} 3 & -8 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27 \neq 0,$$

ce qui permet la détermination des dérivées secondes.

San faire des calculs il est facile de se rendre compte que le déterminant des coefficients du système, contenant les dérivées partielles d'ordre $p>1$, n'est pas nul. En effet, dans le cas où φ et ψ seraient identiquement nuls, on aura $x=C_1 u$, $y=C_2 u$ et toutes les dérivées de x et de y d'ordre $p>1$ seront nulles. Par coséquent les déterminants des coefficients d'ordre p, étant les mêmes dans les deux cas, seront diférents de zéro, ce qui permet la détermination des dérivées d'ordre $p>1$ dans le cas où φ et ψ ne sont pas identiquement nuls.

Il rest à montrer que les séries suivant les puissances positives et entières de u et v, ainsi obtenues, sont convergentes. Il va sans dire que les équations du système (3) doivent être traitées conjointement.

Pour montrer la convergence, écrivons les équations (3), en introduisant un paramètre μ, sous la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2}=ax+\mu\,\varphi_2(x,y)+\mu^2\,\varphi_3(x,y)+\cdots,$$

(7)

$$\frac{d^2y}{dt^2}=ay+\mu\,\psi_2(x,y)+\mu^2\,\psi_3(x,y)+\cdots,$$

où les φ_p et les ψ_p sont des fonctions homogènes en x, y de degré p. Les seconds membres de ces équations sont des fonctions holomorphes de μ pour $|\mu|\leqslant 1$. D'après un théorème fondamental de Poincaré, les intégrales du système (7) peuvent être développées suivant les puissances positives et entières de μ. Mais aux équations (7) correspondent maintenant les équations

$$a\left[\frac{\partial x}{\partial u}u+\frac{\partial x}{\partial v}(v-2u)+\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}u^2+2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}u(v-u)+\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}(v-u)^2\right]=$$

$$=ax+\mu\varphi_2+\mu^2\varphi_3+\cdots,$$

$$a\left[\frac{\partial y}{\partial u}u+\frac{\partial y}{\partial v}(v-2u)+\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}u^2+2\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}u(v-u)+\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}(v-u)^2\right]=$$

$$=ay+\mu\psi_2+\mu^2\psi_3+\cdots,$$

Or en traitant ces équations comme nous l'avons fait pour les équations (6), on constate aisement que les dérivées partielles de x et de y d'ordre p, prises pour $x=y=u=v=0$, contiennent μ^{p-1} en facteur. On obtient ainsi

$$x=C_1u+\mu\xi_2(u,v)+\mu^2\xi_3(u,\ v)+\cdots$$

$$y=C_2u+\mu\eta_2(u,v)+\mu^2\eta_3(u,\ v)+\cdots$$

où $\xi_p(u,v)$, $\eta_p(u,v)$ sont des fonctions holomorphes de degré p en u et v. Pour $\mu=1$ ces séries coïncident avec celles, obtenues auparavant pour le système (3); elles convergent pourvu que les valeurs de

$$u=-\tau=-e^{-\sqrt{a}\,t},\quad v=\tau\log\tau=-\sqrt{a}\ t\ e^{-\sqrt{a}\,t}$$

soient suffisamment petites, c. q. f. d.

Reçu le 30. IX. 1954

NOTICES BIBLIOGRAPHIQUES

1. Kyrille Popoff, Sur la thermodynamique des processus irréversibles. Journal de Mathématiques et de Physique appliquées (Z. A. M. P.) Ier mémoire, **3** (1952), p. 42—51 ; 2ème mémoire **3** (1952), p. 440—448 ; 3ème mémoire **5** (1954), p. 67—83. ; 4ème mémoire **6** (1955), p. 378—386.
2. Kyrille Popoff, Comptes rendus Acad. Sc. Paris.
   Sur les relations phénoménologiques d'Onsager. T. **235** (1952), p. 648—649.
   Sur l'échange de chaleur par conduction d'un système à un autre. T. **236** (1953), p. 785—786.
   Sur la conduction de la chaleur dans une barre homogène. T. **236** (1953), p. 1640—1641.
   Sur la thermodynamique des processus irréversibles dans le cas où la température et la pression restent constantes. T. **237** (1953), p. 698—700.
   Sur la thermodynamique des processus irréversibles et la théorie des phases. T. **238** (1954), p. 331—333.
3. Kyrille Popoff, L'osmose à la lumière de la théorie des processus thermodynamiques irréversibles. Annales de Physique. 12ème série. T. **9** (1954), p. 261—268.

ТЕРМОДИНАМИКА НЕОБРАТИМЫХ ПРОЦЕССОВ. СЛУЧАЙ КОГДА ВЕКОВОЕ УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ ДВОЙНОЙ КОРЕНЬ

Кирил А. Попов

В нашых предидущих публикациях о термодинамике необратимых процессов мы изучали интегралы системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2}=g_{i1}x_1+g_{i2}x_2+\cdots+g_{in}x_n \quad (i=1,\ 2,\cdots,\ n),$$

где $\sum\limits_{i,\,k} g_{ik}x_i x_k$ положительно определеная квадратичная форма и где корни векового уравнения

$$\begin{vmatrix} g_{11}-r^2 & g_{12} & & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22}-r^2 & & g_{2n} \\ & & & \\ & & & \\ g_{n1} & g_{n2} & & g_{nn}-r^2 \end{vmatrix}=0$$

еднократны. Здесь мы изучаем систему

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2}=g_{11}x_1+g_{12}x_2+\varphi(x_1,\ x_2),$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2}=g_{21}x_1+g_{22}x_2+\psi(x_1,\ x_2),$$

вековое уравнение которой имеет двойной корень и интегралы которой стремятся к нулю для $t\to+\infty$. С этой целью рассматривая $x_1,\ x_2$ как функции $u=-\tau$, $v=\tau\log\tau$, где $\tau=e^{-\sqrt{g_{11}}\,t}$ мы приводим эту систему к системе

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}u+\frac{\partial x_1}{\partial v}(v-2u)+\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}u^2+2\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v}u(v-u)+\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2}(v-u)^2=$$

$$=x_1+\varphi_1(x_1,\ x_2),$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial u}u+\frac{\partial x_2}{\partial v}(v-2u)+\frac{\partial^2 x_2}{\partial u^2}u^2+2\frac{\partial^2 x_2}{\partial u\,\partial v}u(v-u)+\frac{\partial^2 x_2}{\partial v^2}(v-u)^2=$$

$$x_2+\varphi_2(x_1,\ x_2)$$

и устанавливаем существование интегралов вида

$$x_1 = C_1 u + \xi_2(u, v) + \xi_3(u, v) + \cdots,$$
$$x_2 = C_2 u + \eta_2(u, v) + \eta_3(u, v) + \cdots,$$

где ξ, η принимают значение нуль при $u=0$, $v=0$ и где $u = -e^{-\sqrt{g_{11}}\,t}$, $v = -\sqrt{g_{11}}\,t\,e^{-\sqrt{g_{11}}\,t}$

ВЪРХУ ТЕРМОДИНАМИКАТА НА НЕОБРАТИМИТЕ ПРОЦЕСИ — СЛУЧАЙ НА ДВОЙНИ КОРЕНИ НА ХАРАКТЕРИСТИЧНОТО УРАВНЕНИЕ

Кирил А. Попов

РЕЗЮМЕ

В нашите по-раншни публикации по термодинамика на необратимите процеси ние изучавахме интегралите на системи диференциални уравнения

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = g_{i1} x_1 + g_{i2} x_2 + \cdots + g_{in} x_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

гдето $\sum\limits_{i,k} g_{ik} x_i x_k$ е положително дефинитна квадратична форма и гдето корените на характеристичното уравнение

$$\begin{vmatrix} g_{11} - r^2 & g_{12} & & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} - r^2 & & g_{2n} \\ & & & \\ & & & \\ g_{n1} & g_{n2} & & g_{nn} - r^2 \end{vmatrix} = 0$$

са прости. В тази работа изучаваме системата

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = g_{11} x_1 + g_{12} x_2 + \varphi(x_1, x_2),$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt} = g_{21} x_1 + g_{22} x_2 + \psi(x_1, x_2),$$

чието характеристично уравнение има двоен корен и интегралите на която клонят към 0, когато $t \to \infty$. За тая цел разглеждаме x_1, x_2 като функции на $u = -\tau$, $v = \tau \log \tau$, гдето $\tau = e^{-\sqrt{g_{11}}t}$, и свеждаме горната система към системата

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}u+\frac{\partial x_1}{\partial v}(v-2u)+\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}u^2+2\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v}u(v-u)+\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2}(v-u)^2=$$

$$=x_1+\varphi_1(x_1,\ x_2),$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial u}u+\frac{\partial x_2}{\partial v}(v-2u)+\frac{\partial^2 x_2}{\partial u^2}u^2+2\frac{\partial^2 x_2}{\partial u\,\partial v}u(v-u)+\frac{\partial^2 x_2}{\partial v^2}(v-u)^2=$$

$$=x_2+\varphi_2(x_1,\ x_2).$$

Установяваме съществуването на интеграли от вида

$$x_1=C_1u+\xi_2(u,\ v)+\xi_3(u,\ v)+\cdots,$$

$$x_2=C_2u+\eta_2(u,\ v)+\eta_3(u,\ v)+\cdots,$$

гдето ξ, η се анулират при $u=0$, $v=0$ и гдето $u=-e^{-\sqrt{g_{11}}\,t}$, $v=-\sqrt{g_{11}}\,t\ e^{-\sqrt{g_{11}}\,t}$.