# НЯКОИ ГРАНИЧНИ СВОЙСТВА НА ОЙЛЕРОВАТА ГАМА-ФУНКЦИЯ

Л. Чакалов

Ако $f(x)$ е реална или комплексна функция на положителната променлива $x$, ще казваме, че тя притежава граничната стойност $\lambda$ за $x \to \infty$, ако съществува растяща редица от положителни числа $x_1, x_2, x_3, \ldots$, за която $\lim x_n = \infty$ и $\lim f(x_n) = \lambda$. Лесно е да се види, че множеството на всички гранични стойности на $f(x)$ представлява затворено множество, т. е. всяка (крайна) точка на сгъстяване на гранични стойности е също гранична стойност. И наистина нека числото $\lambda$ да е точка на сгъстяване за множеството на граничните стойности на $f(x)$ и да си изберем една безкрайна редица от гранични стойности $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, която клони към $\lambda$. Нека

$$x_{k1},\ x_{k2},\ x_{k3}, \ldots \tag{1}$$

да е растяща редица от положителни числа, за която

$$\lim_{n\to\infty} x_{kn} = \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_{kn}) = \lambda_k .$$

Да образуваме друга растяща редица $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ от положителни числа по следния начин. Избираме индекса $n_1$ тъй, че да имаме $f(x_{1n_1}) - \lambda_1| < 1$, и полагаме $x_{1n_1} = \xi_1$. След това избираме индекса $n_2$ тъй голям, че да имаме

$$x_{2n_2} > 2,\ x_{2n_2} > \xi_1 \quad \text{и} \quad |f(x_{2n_2}) - \lambda_2| < \frac{1}{2},$$

и полагаме $x_{2n_2} = \xi_2$. Изобщо, след като сме определили положителните числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}$, под $\xi_k$ ще разбираме $n_k$-тия член на редицата (1), където вторият индекс $n_k$ е тъй голям, че да имаме едновременно

$$x_{kn_k} > k,\ x_{kn_k} > \xi_{k-1}, \qquad |f(x_{kn_k}) - \lambda_k| < \frac{1}{k}.$$

Така дефинираната безкрайна редица $\left\{\xi_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ е растяща (поради $\xi_k > \xi_{k-1}$), клони към $\infty$ (поради $\xi_k > k$) и освен това от неравенствата

$$|f(\xi_k) - \lambda| \leq |f(\xi_k) - \lambda_k| + |\lambda_k - \lambda| < \frac{1}{k} + |\lambda_k - \lambda|$$

се вижда, че $\lim\limits_{k\to\infty} |f(\xi_k)-\lambda|=0$, т. е. че $\lambda$ е гранична стойност на $f(x)$.

Нашата цел тук е да определим всички гранични стойности на функциите

$$f(x)=\Gamma(x+ai):\Gamma(x) \quad \text{и} \quad g(x)=\Gamma(-x+ai):\Gamma(-x)$$

за $x\to+\infty$, където $a$ е някоя реална константа, различна от нула При това ще си служим с Гаусовата дефиниция на Ойлеровата гама. функция:

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)}(n+1)^z,$$

и със следната

**Помощна теорема.** Ако редицата $u_1$, $u_2$, $u_3,\dots$ от положителни числа клони към нула по такъв начин, че редът $\Sigma u_n$ да е разходящ, то числата

$$e^{is_1},\ e^{is},\ e^{is}$$

където $s_n=u_1+u_2+\dots+u_n$, покриват навсякъде гъсто единичната окръжност, т. е. всяка дъга от тази окръжност съдържа поне едно (а следователно и безброй много) от тези числа.

При доказателството можем да предполагаме, че всички $u_n$ са-по-малки от $2\pi$. Да означим с $a$ някое фиксирано реално число и с $n_k$ номера на най-малкия член на редицата $s_1$, $s_2$, $s_3,\dots$, който надминава $2k\pi+a$, тъй че

$$s_{n_k-1}\le 2k\pi+a<s_{n_k}.$$

От неравенствата

$$s_{n_k}<2\pi+s_{n_k-1}\le 2\pi+2k\pi+a<s_{n_{k+1}}$$

се вижда, че индексите $n_1$, $n_2$, $n_3,\dots$ образуват растяща редица от естествени числа. При това разликата $s_{n_k}-s_{n_k-1}=u_{n_k}$ клони към нула, когато $k$, а заедно с него и $n_k$ расте, тъй че можем да положим $s_{n_k}=2k\pi+a+\delta_k$, където $\delta_k$ клони към нула при $k\to\infty$. Но тогава[1]

$$\exp is_{n_k}=\exp ia\,.\exp i\delta_k\to\exp ia=e^{ia},$$

т. е. съществува растяща редица от индекси $n$, за която $\exp is_n$ клони към произволно избрана точка $e^{ia}$ върху единичната окръжност.

Лесно се вижда, че помощната теорема е в сила, ако всички $u_n$ са $<0$, $\lim u_n=0$ и редът $\Sigma u_n$ е разходящ.

---

1. Да изследваме най-напред как са разпределени граничните стойности на функцията

[1] За удобство при нареждането на формулите тук въвеждаме означението $\exp z$ вместо $e^z$.

$$f(x)=\Gamma(x+ai):\Gamma(x)$$

за $x\to\infty$, при което $a$ означава реална константа, различна от нула. Съгласно с Гаусовата дефиниция

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{(x+ai)(x+1+ai)\ldots(x+n+ai)}(n+1)^{ai}.$$

Както е лесно да се види, модулът на функцията

$$f_n(x)=\frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{(x+ai)(x+1+ai)\ldots(x+n+ai)}(n+1)^{ai}$$

представлява растяща функция на положителната променлива $x$ и същото важи и за $\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x)|=|f(x)|$. При това $|f_n(x)|<1$; следователно $|f(x)|<1$ и $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|$ съществува и е $\leq 1$, и то по какъвто начин и да клони $x$ към $+\infty$. Не е мъчно да се види, че тази граница е равна на 1. И наистина, когато $n$ пробягва редицата на естествените числа, изразът

$$n^{-ai}\frac{\Gamma(n+ai)}{\Gamma(n)}=\frac{ai(ai+1)\ldots(ai+n-1)}{(n-1)!}n^{-ai}\Gamma(ai) \tag{2}$$

клони към $\Gamma(ai):\Gamma(ai)=1$. Следователно граничните стойности на $f(x)$ могат да бъдат само числа с модул 1.

Нека $\lambda$ да е произволно комплексно число с модул 1. Да означим с $1-\varepsilon_n$ дясната част на (2), тъй че

$$f(n)=\frac{\Gamma(n+ai)}{\Gamma(n)}=(1-\varepsilon_n)\,n^{ai},$$

където $\varepsilon_n$ клони към нула. Ако положим в помощната теорема

$$u_1=0,\quad u_n=a\,[\ln n-\ln(n-1)]\ \text{ за } n>1,\qquad s_n=a\ln n,$$

то $e^{is_n}=n^{ai}$ и лесно се проверява, че предположенията за нейната валидност са изпълнени, откъдето заключаваме, че $n^{ai}$ може да клони към $\lambda$, когато $n$ пробягва подходяща растяща редица от естествени числа. Към същата граница ще клони тогава и $f(n)=(1-\varepsilon_n)\,n^{ai}$. Така ние доказахме следната

**Теорема I.** Множеството, което се състои от всички гранични стойности на функцията $\Gamma(x+ai):\Gamma(x)$ за $x\to\infty$, съвпада с множеството на всички комплексни числа с модул 1.

Да образуваме функцията

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\Gamma(x)}\{e^{\alpha i}\Gamma(x+ai)+e^{-\alpha i}\Gamma(x-ai)\},$$

където $a\neq 0$ и $\alpha$ означават реални константи. Очевидно $\varphi(x)$ е реална функция на реалната променлива $x$. Според теорема I ние можем да оставим $x$ да клони към $+\infty$ по такъв начин, че

$\Gamma(x+ai):\Gamma(x)$ да клони към $e^{\beta i}$, където под $\beta$ разбираме произволно избрана реална константа. По този начин функцията $\varphi(x)$ ще има за гранична стойност $\cos(\alpha+\beta)$, откъдето заключаваме, че всяко число от затворения интервал $[-1, +1]$ представлява гранична стойност на $\varphi(x)$ за $x \to \infty$. От друга страна от неравенството

$$\left|\frac{\Gamma(x \pm ai)}{\Gamma(x)}\right| < 1 \quad \text{за } x > 0$$

следва, че $|\varphi(x)| < 1$ за $x > 0$, което показва, че $\varphi(x)$ не може да има други гранични стойности.

Нека $b$ да е произволно число между $-1$ и $+1$. Тъй като всяко от неравенствата $\varphi(x) < b$ и $\varphi(x) > b$ е удовлетворено за безброй много положителни значения на $x$, между които има и произволно големи, явно е, че уравнението $\varphi(x) = b$ има безброй много положителни корени $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \to \infty$; напротив, то няма нито един положителен корен, ако $b \leq -1$ или $b \geq 1$. Ако означим с $F_1(x)$ и $F_2(x)$ мероморфните функции

$$F_1(x) = \frac{1}{2}\{\Gamma(x+ai) + \Gamma(x-ai)\}, \quad F_2(x) = \frac{1}{2i}\{\Gamma(x+ai) - \Gamma(x-ai)\}$$

и с $A$, $B$, $C$ три реални константи, $A^2+B^2>0$, този резултат може да се изкаже така:

**Теорема II.** Уравнението

$$AF_1(x) + BF_2(x) = C\Gamma(x)$$

има безброй много положителни корени, ако $A^2+B^2>C^2$; напротив, то няма нито един положителен корен, ако $A^2+B^2 \leq C^2$.

2. Да изследваме на второ място разпределението на граничните стойности за $x \to +\infty$ на функцията[1]

$$g(x) = \frac{\Gamma(-x+ai)}{\Gamma(-x)} \quad (a \text{ реално и} \neq 0).$$

За тази цел ще използуваме функционалното уравнение

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

въз основа на което $g(x)$ може да се представи така:

$$g(x) = \frac{\Gamma(1+x)}{\Gamma(1+x-ai)} \cdot \frac{\sin \pi x}{\sin \pi(x-ai)} = g_1(x) \cdot g_2(x).$$

Но според доказаното в точка 1 $|g_1(x)| = \Gamma(1+x) : |\Gamma(1+x-ai)|$ намалява и клони към 1, когато $x$ расте от 0 до $+\infty$, а от равенството

[1] Функцията $g(x)$ е дефинирана и непрекъсната за всяко реално $x$, ако се условим под $g(x)$ да разбираме числото 0, когато $x$ е цяло положително число или нула.

$$|g_2(x)|^2=\frac{2(1-\cos 2\pi x)}{e^{2a\pi}+e^{-2a\pi}-2\cos 2\pi x}$$

се вижда, че максимумът на $|g_2(x)|$ е равен на $M=\frac{2}{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}$. Следователно всяка гранична стойност на $g(x)$ за $x\to+\infty$ трябва да бъде по абсолютна стойност $\leq M$. Както ще видим, всяко комплексно число, чийто модул не надминава $M$, е гранична стойност на $g(x)$. За да докажем това, да си изберем числото $R$ между 0 и $M$ и да определим $x_0$ в интервала $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ тъй, че да имаме

$$R^2=\frac{2(1-\cos 2\pi x_0)}{e^{2a\pi}+e^{-2a\pi}-2\cos 2\pi x_0}, \text{ т. е. } |g_2(x_0)|=R, \ g_2(x_0)=Re^{i\alpha}.$$

Да оставим след това $x$ да пробягва безкрайната аритметична прогресия

(3) $$x_0,\ x_0+1,\ x_0+2,\ldots,\ x_0+n,\ldots$$

Предвид на това, че функцията $g_2(x)$ е периодична с период 1, тази функция запазва постоянната стойност $Re^{i\alpha}$, когато $x$ пробягва прогресията (3). От друга страна, като се възползуваме от граничното съотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(n)}n^{-z}=1$$

и представим $n^{-ai}g_1(x_0+n)$ във вида

$$n^{-x_0-1}\frac{\Gamma(1-x_0+n)}{\Gamma(n)}\quad n^{-x_0-1+ai}\frac{\Gamma(1+x_0+n-ai)}{\Gamma(n)},$$

явно е, че $n^{-ai}g_1(x_0+n)$ клони към 1. Полагайки

$$n^{-ai}g_1(x_0+n)=1+\varepsilon_n,\qquad \varepsilon_n\to 0,$$

и прилагайки помощната теорема за редицата с $n$-ти член $n^{-ai}$, лесно се убеждаваме, че при произволен избор на числото $\lambda$ с модул равен на 1 съществува растяща редица от цели положителни числа $n_1, n_2, n_3,\ldots$ тъй, че когато $n$ пробягва тази редица, $n^{-ai}g_1(x_0+n)$ да клони към $\lambda$, а следователно $g(x_0+n)$ да клони към $Re^{i\alpha}\lambda$. Понеже $\lambda$ може да бъде избрано така, че $Re^{i\alpha}\lambda$ да съвпада с произволно избрана точка върху окръжността $|z|=R$, с това е доказано, че всяка точка върху тази окръжност е гранична стойност на функцията $g(x)$. Като държим сметка още за това, че множеството на граничните стойности е затворено, можем да произнесем следната

**Теорема III.** *Множеството на граничните стойности за $x\to+\infty$ на функцията $\Gamma(-x+ai):\Gamma(-x)$ се състои от всички комплексни числа с модули $\leq\frac{2}{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}$.*

Както и по-горе, да си образуваме реалната функция на положителната променлива $x$:

$$G(x)=\frac{1}{2\Gamma(-x)}\{\Gamma(-x+ai)\,e^{\alpha i}+\Gamma(-x-ai)\,e^{-\alpha i}\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\Gamma(1+x)}{\Gamma(1+x-ai)}\cdot\frac{\sin\pi x}{\sin\pi(x-ai)}\,e^{\alpha i}+\frac{\Gamma(1+x)}{\Gamma(1+x+ai)}\cdot\frac{\sin\pi x}{\sin\pi(x+ai)}\,e^{-\alpha i}\right\},$$

където $\alpha$ и $a \neq 0$ са реални константи. При $x=n+\frac{1}{2}$, където $n$ е цяло неотрицателно число, имаме

$$\frac{\sin\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sin\pi\left(n+\frac{1}{2}\pm ai\right)}=\frac{2}{e^{a\pi}+e^{-a\pi}},$$

$$G\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}\left\{\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}-ai\right)}\,e^{\alpha i}+\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}+ai\right)}\,e^{-\alpha i}\right\}$$

и тъй като множеството на граничните стойности на редицата с $n$-ти член $\frac{\Gamma(x_0+n)}{\Gamma(x_0+n+ai)}$ съвпада с множеството на всички точки върху единичната окръжност, то при произволен избор на реалното число $\beta$ съществува една частична редица от естествени числа тъй, че когато $n$ пробягва тази редица, $\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}-ai\right)}$ да клони към $e^{i\beta}$ и следователно $G\left(n+\frac{1}{2}\right)$ да клони към $\frac{2}{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}.\cos(\alpha+\beta)$. Оттук следва, че всяко число от затворения интервал $\left[\frac{-2}{e^{a\pi}+e^{-a\pi}},\ \frac{2}{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}\right]$ е гранична стойност на $G(x)$ за $x\to\infty$. Ако $b$ е произволно число вътре в този интервал, то съществуват безброй много произволно големи значения на $x$, за които $G(x)<b$, а също тъй и друго безкрайно множество от произволно големи $x$, за които $G(x)>b$. Оттук заключаваме [поради непрекъснатостта на $G(x)$], че уравнението $G(x)=b$ притежава при $\frac{-2}{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}<b<\frac{2}{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}$ безброй много положителни корени. Напротив, ако $b<\frac{-2}{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}$ или $b>\frac{2}{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}$, това уравнение не може да има безброй много положителни корени, защото за $x>0$

$$\left|\frac{\sin\pi x}{\sin\pi(x\pm ai)}\right|\leq\frac{2}{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}$$

и при произволен избор на положителното число $\varepsilon$ и за всички достатъчно големи $x$ имаме

$$\left|\frac{\Gamma(1+x)}{\Gamma(1+x\pm ai)}\right|<1+\varepsilon,$$

тъй че за такива значения на $x$

$$|G(x)|\leq\frac{1}{2}\left\{\frac{2(1+\varepsilon)}{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}+\frac{2(1+\varepsilon)}{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}\right\}=(1+\varepsilon)\cdot\frac{2}{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}<b.$$

Ако въведем реалните мероморфни функции

$$G_1(x)=\frac{1}{2}\left\{\Gamma(-x+ai)+\Gamma(-x-ai)\right\},$$

$$G_2(x)=\frac{1}{2i}\left\{\Gamma(-x+ai)-\Gamma(-x-ai)\right\},$$

горните резултати могат да се формулират така:

**Теорема IV.** Уравнението

$$A\,G_1(x)+B\,G_2(x)=C\,\Gamma(-x)$$

има безброй много положителни корени, ако

$$A^2+B^2>\frac{C^2}{4}(e^{a\pi}+e^{-a\pi})^2.$$

Напротив, то може да има само краен брой положителни корени, ако

$$A^2+B^2<\frac{C^2}{4}(e^{a\pi}+e^{-a\pi})^2.$$

*Постъпила на 5. I. 1955*

## ЛИТЕРАТУРА

Tchakaloff, L., Sur quelques propriétés de la fonction gamma. Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. **207** (1938), p. 963.

# НЕКОТОРЫЕ ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА

Л. Чакалов

РЕЗЮМЕ

В этой работе доказываются некоторые свойства граничных значений функций $\Gamma(x+ai):\Gamma(x)$ и $\Gamma(-x+ai):\Gamma(-x)$ для $x \to +\infty$.

# QUELQUES PROPRIÉTÉS LIMITES DE LA FONCTION $\Gamma(x)$

L. Tchakaloff

RÉSUMÉ

Dans ce travail on démontre quelques propriétés des valeurs limites des fonctions $\Gamma(x+ai):\Gamma(x)$ et $\Gamma(-x+ai):\Gamma(-x)$ pour $x \to +\infty$