ВЪРХУ ПРОЕКЦИИТЕ НА ДВУМЕРНИ ДИСКРЕТНИ РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ

Б. Пенков

В 1936 г. Крамер и Волд [1] доказаха с помощта на характеристични функции следната теорема: всяко вероятностно разпределение в равнината се определя еднозначно с проекциите си върху всички прави през началото. Доказателства на тази теорема, неизползуващи характеристични функции, дадоха Костелянец и Решетняк [3] и Хачатуров [4]. Някои частни случаи бяха разгледани по-рано от Рени и Хайош [2]. В това съобщение се доказва елементарно теоремата на Крамер и Волд за случая на дискретно разпределение.

Нека е дадено едно двумерно дискретно разпределение F, гдето

$$M_1, M_2, \ldots, M_\nu, \ldots$$

са точките с положителни вероятности, съответно равни на

$$p_1, p_2, \ldots, p_\nu, \ldots, \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu = 1, \; p_\nu > 0.$$

Нека по-нататък l_φ е една ориентирана права през началото, чийто положителен лъч сключва с положителната ос x ъгъл φ, $0 < \varphi <$ Всяка точка P върху l_φ се определя с една координата ϱ, която е равна на разстоянието на P до началото, взето със знак $+$ или $-$ в зависимост от това, дали P се намира над или под оста x (върху самата ос x ϱ е равно на абсцисата на P). Нека m е права през P, перпендикулярна на l_φ В точката P функцията $F_\varphi(\varrho)$ се дефинира с

$$F_\varphi(\varrho) = \Sigma' p_\nu$$

гдето Σ' означава сумиране по всички точки с положителна вероятност, лежащи в отворената полуравнина, определена от m и съдържаща отрицателната полуправа на l_φ. Очевидно $F_\varphi(\varrho)$ е функция на разпределение спрямо ϱ.

Разпределението $F_\varphi(\varrho)$ се нарича проекция на F върху l_φ

Ще докажем следното:

Разпределението F се определя еднозначно със своите проекции върху правите през началото.

Доказателство. Ясно е, че една функция F_φ е прекъсната в една точка P тогава и само тогава, когато върху правата през P, перпендикулярна на l_φ, лежи поне една точка M_ν.

Нека M е произволна точка в равнината. Да разгледаме снопа прави през M. В тоя сноп съществува поне една права (всъщност безбройно много), която не минава през никоя точка M_ν (отлична от M, ако евентуално M е точка с положителна вероятност). В противен случай точките M_ν нямаше да образуват изброимо множество.

Да означим с (m, l_φ) пресечната точка на една права m от горния сноп с перпендикулярната ѝ l_φ. Ако M е точка с положителна вероятност, (m, l_φ) за всяко m, ще бъде точка на прекъснатост за F_φ. Обратно, ако за всички m, F_φ е прекъсната в (m, l_φ), върху всяко m ще лежи поне една точка с положителна вероятност. През M минава обаче поне една права, която не съдържа точки с положителна вероятност, отлични от M. Значи M е точка с положителна вероятност.

Така получаваме следното характерно за точките M_ν свойство. $M = M_\nu$ тогава и само тогава, когато за всяко m, (m, l_φ), $0 \leq \varphi < \pi$, е точка на прекъснатост за F_φ. Или, M не е точка с положителна вероятност тогава и само тогава, когато през M съществува поне една права m, за която (m, l_φ) е точка на непрекъснатост за F_φ.

Познаването на F_φ, $0 \leq \varphi < \pi$ определя обаче не само положението на точките с положителна вероятност, но и съответните вероятности p_ν. През M_ν минава, както видяхме, поне една права m, която не минава през други точки с положителна вероятност освен M_ν. В (m, l_φ) F_φ ще бъде прекъсната. Ясно е, че

$$p_\nu = F_\varphi(\varrho+0) - F_\varphi(\varrho).$$

С това всичко е доказано.

Ако точките M_ν са само n на брой, същия начин на разсъждение ни дава възможност да дадем друго доказателство на един резултат на Хайош [2], който гласи, че едно дискретно разпределение, състоящо се от n на брой точки с положителна вероятност, е напълно определено с $n+1$ различни проекции през началото. Доказателството се основава на факта, че ако спуснем от една точка M перпендикуляри върху $n+1$ прави през началото, поне един от тия перпендикуляри не минава през други точки с положителна вероятност освен евентуално самата точка M.

Постъпила на 24. II. 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Cramer, H. and Wold, H. Some theorems on distribution functions. Journal London Math. Soc. 11 (1936), p. 290—294.
2. Renyi, A. On projections of probability distributions. Acta Math. Acad. sci. Hungaricae, vol. III. 3 (1952), p. 131—141.
3. Костелянец, П. О. и Решетняк, Ю. Г. Определение вполне аддитивной функции её значениями на полупространствах. Успехи мат. наук, т. 9, 3 (1954), стр. 135—140.
4. Хачатуров, А. А. Определение значения меры для области n-мерного пространства по её значениям для всех полупространств. Успехи мат. наук, т. 9 3, (1954), стр. 205—212.

О ПРОЕКЦИЯХ ДВУМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ РАЗПРЕДЕЛЕНИИ

Б. Пенков

РЕЗЮМЕ

Дается элементарное доказательство теоремы Крамера — Вольда для случая дискретного разпределения.

ÜBER PROJEKTIONEN ZWEIDIMENSIONALER DISKRETER VERTEILUNGEN

B. Penkov

Zusammenfassung

Die Arbeit enthält einen elementaren Beweis des Satzes von Cramer und Wold für den Fall diskreter Verteilung.