SUR LES FONCTIONS ANALYTIQUES DE DEUX VARIABLES COMPLEXES QUI SONT PARAANALYTIQUES

par Maurice Fréchet

Rappel. Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$, n vecteurs unitaires sur n axes de l'espace E_n à n dimensions; $e_1, e_2, \ldots, e_p$, p vecteurs unitaires placés sur p axes de l'espace E_p à p dimensions, $V = X_1 f_1 + \ldots + X_n f_n$, $v = x_1 e_1 + \ldots + x_p e_p$, deux vecteurs de ces deux espaces.

Quand $V = F(v)$, $X_1, \ldots, X_n$ sont des fonctions,

$$X_1 = F_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, X_n = F_n(x_1, \ldots, x_p).$$

Dans des mémoires récents, [1] nous avons étudié les conséquences des définitions suivantes.

I. $F(v)$ est dérivable relativement à la règle R pour $v = v^0$ si

1° $F(v)$ est différentiable pour $v = v^0$.

2° Il existe un vecteur V_0', indépendant de dv, tel que pour $v = v^0$

$$dF(v) = V_0' \cdot dv \tag{1}$$

où, au second membre, le produit est effectué suivant la règle R. V_0' est de la forme $\sum_j L_j(v^0) f_j$, et $V_0' \, dv$ de la forme

$$\left(\sum_j L_j f_j\right) \cdot \left(\sum_k dx_k e_k\right) = \sum_j \sum_k L_j dx_k f_j \cdot e_k. \tag{2}$$

Pour que l'égalité (1) ait un sens, il faut évidemment que la règle soit exprimée sous la forme

$$f_j \cdot e_k = \sum_h u_{jkh} f_h \tag{3}$$

où les u_{jkh} sont des constantes qui déterminent la règle R.

Si les conditions 1°, 2° sont remplies, V_0' sera dit une dérivée de $F(v)$ pour $v = v^0$, relativement à R.

II. $F(v)$ est paraanalytique relativement à R pour $v = v^0$, si $F(v)$ est dérivable indéfiniment relativement à R au voisinage de v^0.

Dans les deux mémoires cités plus haut, nous avons donné quelques propriétés générales de ces fonctions et nous les avons appliquées à la théorie des surfaces dans le cas où $n=3$, $p=2$.

Position du problème. Nous voulons ici donner une autre application en cherchant, dans le cas où $n=2$, $p=4$, quelles sont les fonctions analytiques (au sens classique) de deux variables complexes qui „sont", en même temps, des fonctions paraanalytiques relativement à une règle R convenable, le sens précis de cette question étant formulé comme suit

Soit donc

$$f(\xi, \eta) = P_1(x_1, \ldots, x_4) + i P_2(x_1, \ldots, x_4)$$

une fonction analytique au sens classique, de

$$\xi = x_1 + i x_2, \quad \eta = x_3 + i x_4$$

pour $\xi = \xi^0$, $\eta = \eta^0$*. On peut la considérer comme déterminant un vecteur de l'espace E_2

$$F(v) = P_1 f_1 + P_2 f_2$$

fonctions du vecteur

$$v = x_1 e_1 + \ldots + x_4 e_4$$

de l'espace E_4.

Si elle est paraanalytique pour $v = v^0$ (correspondant au couple ξ^0, η^0) relativement à une règle R, elle est dérivable relativement à R pour chaque point v suffisamment voisin de v^0.

Il existe donc un vecteur

$$V' = L_1(v) f_1 + L_2(v) f_2$$

indépendant de dv et tel que

$$dF(v) = V' \cdot dv$$

c'est à dire

$$(4) \qquad \sum_h dP_h f_h = \Big(\sum_j L_j(v) f_j\Big) \Big(\sum_k dx_k e_k\Big) = \sum_h \Big(\sum_j \sum_k L_j dx_k u_{jkh}\Big) f_h.$$

D'où

$$(5) \qquad dP_h = \sum_k \Big(\sum_j L_j(v) u_{jkh}\Big) dx_k.$$

Or, puisque $f(\xi, \eta)$ est analytique en ξ, η, voisin de ξ^0, η^0, $f(\xi, \eta)$ est analytique en $\xi = x_1 + i x_2$, d'où

$$(6) \qquad \frac{\partial P_1}{\partial x_1} = \frac{\partial P_2}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial P_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial P_1}{\partial x_2},$$

c'est à dire d'après (5)

* Nous nous éloignons des notations ordinaires pour abréger les calculs qui suivent.

$$\sum_j L_j(v)\, u_{j11} = \sum_j L_j(v)\, u_{j22}\,,$$

$$\sum_j L_j(v)\, u_{j12} = -\sum_j L_j(v)\, u_{j21},$$

ou encore

$$(u_{111}-u_{122})\, L_1(v) = (u_{222}-u_{211}) L_2(v),$$

(7) $$(u_{112}+u_{121})\, L_1(v) = -(u_{221}+u_{212}) L_2(v).$$

De même $f(\xi, \eta)$ étant analytique en η

$$(u_{131}-u_{142})\, L_1(v) = (u_{242}-u_{231}) L_2(v),$$

(8) $$(u_{132}+u_{141})\, L_1(v) = -(u_{241}+u_{232}) L_2(v).$$

Supposons d'abord qu'une au moins des parenthèses des quatre dernières égalités soit $\neq 0$. Par exemple soit $u_{111}-u_{122} \neq 0$, on aura

$$L_1(v) = rL_2(v)$$

où $r = \dfrac{u_{222}-u_{211}}{u_{111}-u_{122}}$ est un nombre, indépendant de v et de la fonction $F(v)$, entièrement déterminé par la règle R. On aura alors

$$dF(v) = L_2(v)(rf_1+f_2)\cdot dv,$$

ou en posant

$$\mathfrak{M}(v) = (rf_1+f_2)\cdot v = \sum_j a_j(v) f_j$$

$$\left(\text{où } a_j(v) = \sum a_{jk} x_k\right) \qquad dF(v) = L_2(v)\, d\mathfrak{M}(v)$$

ou

$$\sum dP_j f_j = L_2(v) \sum_j a_j(dv) f_j\,;$$

d'où

(9) $$dP_j = L_2(v) a_j(dv) = Q(x_1, \ldots, x_4) \sum_k a_{jk} dx_k.$$

Supposons que l'un des déterminants du second ordre tiré du tableau

(10) $$\begin{Bmatrix} a_{11} \ldots a_{14} \\ a_{21} \ldots a_{24} \end{Bmatrix}$$

soit $\neq 0$, par exemple

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Alors en posant

$$y_1 = \sum a_{1k} x_k,\ y_2 = \sum a_{2k} x_k,\ y_3 = x_3,\ y_4 = x_4,$$

on pourra tirer $x_1, \ldots, x_4$ en fonctions linéaires des $y_1, \ldots, y_4$ et en portant dans les P_j, on pourra poser

$$P_j(x_1,\ldots,x_4)=p_j(y_1,\ldots,y_4);\ Q(x_1,\ldots,x_4)=q(y_1,\ldots,y_4),$$

de sorte que (9) deviendra

$$dp_j(y_1,\ldots,y_4)=q(y_1,\ldots,y_4)dy_j.$$

Donc p_j est un fonction de y_j seul, soit $p_j(y_j)$ et on aurait

$$\frac{dp_1(y_1)}{dy_1}=\frac{dp_2(y_2)}{dy_2}=q(y_1,\ldots,y_4)=L_2(v).$$

La valeur commune sera une constante μ et on aura

$$p_j(y_j)=\mu y_j+c_j,\ L_2(v)=\mu,$$

d'où

$$dF(v)=\mu(rf_1+f_2)\,.\,dv=(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)\cdot dv,$$
$$F(v)=\lambda\cdot v+c,$$

où $\lambda=\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2$, $c=c_1 f_1+c_2 f_2$ sont des vecteurs constants.

Ainsi $F(v)$ est une fonction vectorielle linéaire de v. On a

$$P_1 f_1+P_2 f_2=(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)(x_1 e_1+\ldots+x_4 e_4)+c_1 f_1+c_2 f_2$$
$$=\sum_h\left(\sum\sum \lambda_j x_k u_{jkh}+c_h\right)f_h,$$

d'où

$$P_h=\sum_k\left(\sum_j \lambda_j u_{jkh}\right)x_k+c_h=\sum_k \beta_{kh}\, x_k+c_h$$

avec

$$\beta_{11}=\frac{\partial P_1}{\partial x_1}=\frac{\partial P_2}{\partial x_2}=\beta_{22},\ \beta_{12}=\frac{\partial P_2}{\partial x_1}=-\frac{\partial P_1}{\partial x_2}=-\beta_{21}$$

et de même

$$\beta_{33}=\beta_{44},\quad \beta_{34}=-\beta_{43}\,.$$

D'où

$$f(\xi,\eta)=\sum_k(\beta_{k1}+i\beta_{k2})\,x_k+c_1+ic_2=(\beta_{11}+i\beta_{12})\,x_1$$
$$+(-\beta_{12}+i\beta_{11})x_2+\ldots+c_1+ic_2=(\beta_{11}+i\beta_{12})(x_1+ix_2)+\ldots+c_1+ic_2.$$

De sorte que $f(\xi,\eta)$ est de la forme

(11) $$f(\xi,\eta)=w\xi+t\eta+\gamma$$

où w, t, γ sont trois constantes complexes: $f(\xi,\eta)$ est une fonction linéaire du couple (ξ,η).

D'ailleurs, la règle devra être (quand $L_1(v)$ et $L_2(v)$ ne sont pas constamment nuls au voisinage de v^0, c'est à dire quand $f(\xi,\eta)$ n'est pas une constante dans ce voisinage), telle que l'on ait, au moins,

$$
(12) \qquad \begin{aligned}
u_{222} &= u_{211} + r(u_{111} - u_{122}) \\
u_{221} &= -u_{212} - r(u_{112} + u_{121}) \\
u_{242} &= u_{231} + r(u_{131} - u_{142}) \\
u_{241} &= -u_{232} - r(u_{132} + u_{141}).
\end{aligned}
$$

Considérons maintenant le cas où les déterminants du second ordre du tableau (10) sont nuls; mais supposons d'abord qu'un des éléments de ce tableau soit $\neq 0$; par exemple $a_{11} \neq 0$.

Alors, comme

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{2k} \end{vmatrix} = 0
$$

$$
a_{2k} = a_{1k} \frac{a_{21}}{a_{11}} \quad \text{ou} \quad a_{2k} = s\, a_{1k} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)
$$

$$
dP_2 = Qs \sum a_{1k} dx_k = s dP_1,
$$

$$
\frac{\partial P_1}{\partial x_1} = \frac{\partial P_2}{\partial x_2} = s \frac{\partial P_1}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial P_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial P_2}{\partial x_1} = -s \frac{\partial P_1}{\partial x_1}
$$

$$
\frac{\partial P_1}{\partial x_1} - s \frac{\partial P_1}{\partial x_2} = 0, \quad s \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_1}{\partial x_2} = 0.
$$

Le déterminant de ces deux équations en $\dfrac{\partial P_1}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial P_1}{\partial x_2}$ est $1 + s^2 \neq 0$.

Donc

$$
\frac{\partial P_1}{\partial x_1} = \frac{\partial P_1}{\partial x_2} = 0
$$

et par suite

$$
\frac{\partial P_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial P_2}{d x_1} = 0.
$$

Donc P_1 et P_2 sont indépendants de x_1 et x_2. On verrait de même qu'ils sont indépendants de x_3 et de x_4. P_1 et P_2 se réduisent à deux constantes c_1, c_2. Finalement $f(\xi, \eta) = c_1 + ic_2$ se réduit dans ce cas à une constante complexe et $F(v) = c_1 f_1 + c_2 f_2$ se réduit à un vecteur constant. Il en est encore évidemment de même, d'après (9), quand tous les a_{jk} sont nuls.

Supposons maintenant nuls tous les coefficients de $L_1(v)$ et de $L_2(v)$ dans (7) et (8). On aura

$$
(13) \qquad \begin{aligned}
&u_{122} = u_{111}; \quad u_{222} = u_{211}; \quad u_{121} = -u_{112}; \quad u_{221} = -u_{212}; \\
&u_{142} = u_{131}; \quad u_{242} = u_{231}; \quad u_{141} = -u_{132}; \quad u_{241} = -u_{232}.
\end{aligned}
$$

D'où d'après (5) et (13)

$$dP_1+idP_2=L_1\left(\sum_k u_{1k1}dx_k+i\sum_k u_{1k2}dx_k\right)$$
$$+L_2\left(\sum_k u_{2k1}\,dx_k+i\sum_k u_{2k2}dx_k\right)$$
$$=L_1[u_{111}\,dx_1+u_{121}\,dx_2+\ldots+iu_{112}dx_1+iu_{122}dx_2+\ldots]+L_2[\ldots]$$
$$=L_1[(u_{111}+iu_{112})(dx_1+idx_2)+\ldots]+L_2[(u_{211}$$
$$+iu_{212})(dx_1+idx_2)+\ldots],$$

d'où

$$df(\xi,\eta)=[M_1(v)+iN_1(v)]d\xi+[M_2(v)+iN_2(v)]d\eta.$$

Ainsi

$$f'_\xi=M_1+iN_1=L_1(u_{111}+iu_{112})+L_2(u_{211}+iu_{212})=L_1w_1+L_2w_2,$$
$$f'_\eta\ \ M_2+iN_2=L_1(u_{131}+iu_{132})+L_2(u_{231}+iu_{232})=L_1t_1+L_2t_2.$$

Donc

$$(14)\qquad \begin{aligned} t_2f'_\xi-w_2f'_\eta&=L_1(t_2w_1-w_2t_1)=L_1\Delta,\\ t_1f'_\xi-w_1f'_\eta&=L_2(t_1w_2+w_1t_2)=-L_2\Delta.\end{aligned}$$

Quand $\Delta\neq 0$, si l'on pose $g(\xi,\eta)=\dfrac{f(\xi,\eta)}{\Delta}$, on a

$$t_2g'_\xi-w_2g'_\xi=[\text{une quantité réelle, fonction de } v]=L_1(v),$$
$$t_1g'_\xi-w_1g'_\eta=[\text{une quantité réelle, fonction de } v]=-L_2(v).$$

Posons

$$\xi=t_1\xi'+t_2\eta',$$
$$\eta=-w_1\xi'-w_2\eta'.$$

Puisque $\Delta\neq 0$, on peut en tirer ξ', η' en fonction de ξ, η et, d'autre part, poser

$$h(\xi',\eta')=g(\xi,\eta).$$

Puisque g, comme f, est analytique en ξ, η et alors h est analytique en ξ', η', on aura

$$(15)\qquad \frac{\partial h}{\partial\xi'}=t_1\frac{\partial g}{\partial\xi}-w_1\frac{\partial g}{\partial\eta}=-L_2(v);$$
$$\frac{\partial h}{\partial\eta'}=t_2\frac{\partial g}{\partial\xi}-w_2\frac{\partial g}{\partial\eta}=L_1(v),$$

si l'on pose

$$\xi'=y_1+iy_2,\quad \eta'=y_3+iy_4,$$

on peut écrire

$$h(\xi',\eta')=p(y_1,y_2,y_3,y_4)+iq(y_1,y_2,y_3,y_4).^*$$

* Il ne peut y avoir de confusion entre cette fonction $q(y_1,\ldots,y_4)$ et celle de la p. 6.

Alors

$$\frac{\partial p}{\partial y_1}+i\frac{\partial q}{\partial y_1}=-i\left(\frac{\partial p}{\partial y_2}+i\frac{\partial q}{\partial y_2}\right)=\frac{\partial h}{\partial \xi'}=-L_2(v).$$

Donc au voisinage de v^0, puisque $L_2(v)$ est réelle:

$$\frac{\partial q}{\partial y_1}=\frac{\partial p}{\partial p_2}=0.$$

Ainsi p ne dépend pas de y_2, ni q de y_1. De même, on verrait que p ne dépend pas de y_4, ni q de y_3:

$$p=p(y_1,y_3);\quad q=q(y_2,y_4).$$

Or on a

$$\frac{\partial p(y_1,y_3)}{\partial y_1}=\frac{\partial q(y_2,y_4)}{\partial y_2};$$

la valeur commune des deux membres est une constante δ

$$p=\delta y_1+p_1(y_3);\quad q=\delta y_2+q_1(y_4).$$

Mais on a aussi

$$\frac{\partial p}{\partial y_3}=\frac{\partial q}{\partial y_4}.$$

soit

$$\frac{dp_1(y_3)}{dy_3}=\frac{dq_1(y_4)}{dy_4};$$

ici encore la valeur commune des deux membres doit être constante et on a

$$p=\delta y_1+\mu y_3+\nu_1,\quad q=\delta y_2+\mu y_4+\nu_2,$$

$$g(\xi,\eta)=h(\xi',\eta')=p+iq=[\delta(y_1+iy_2)+\mu(y_3+iy_4)]+\nu_1+i\nu_2,$$

$$g(\xi,\eta)=\delta\xi'+\mu\eta'+\nu.$$

Par suite $f(\xi,\eta)=\Delta g(\xi,\eta)$ est une fonction linéaire de ξ',η', donc de ξ,η.

D'ailleurs, s'il est ainsi $\frac{\partial g}{\partial \xi}$, $\frac{\partial g}{\partial \eta}$ seront des constantes et par suite, d'après (15) L_1 et L_2 seront des constantes. Et alors d'après (4) $F(v)$ sera une fonction linéaire de v.

Il reste le cas où $\Delta=0$.

$$0=t_1w_2-t_2w_1=(u_{131}+iu_{132})(u_{211}+iu_{212})-(u_{231}+iu_{232})(u_{111}+iu_{112}).$$

Dans ce cas, si l'un des termes de Δ est $\neq 0$, par exemple $w_2\neq 0$, on aura d'après (14)

$$f'_\eta=\frac{t_2}{w_2}f'_\xi,\quad df=f'_\xi\left(d\xi+\frac{t_2}{w_2}d\eta\right).$$

Puisque df est différentiable près de v^0, avec

$$df = \frac{1}{w_2} f'_t d(w_2\xi + t_2\eta).$$

c'est que $f(\xi, \eta)$ est une fonction analytique d'une fonction linéaire de ξ, η, à savoir $z = w_2\xi + t_2\eta$ près de $z_0 = w_2\xi^0 + t_2\eta^0$ soit la fonction

$$f(\xi, \eta) = \varphi(z),$$

où

$$z = w_2\xi + t_2\eta = (u_{211} + iu_{212})(x_1 + ix_2) + (u_{231} + iu_{232})(x_3 + ix_4)$$

ou en posant $z = x + iy$

$$x = u_{211}x_1 - u_{212}x_2 + u_{231}x_3 - u_{232}x_4,$$

$$y = u_{211}x_2 + u_{212}x_1 + u_{231}x_4 + u_{232}x_3.$$

Le cas où tous les termes de Δ seraient nuls, ne peut se présenter puisqu'alors les $f_j . e_k$ seraient tous nuls, cas qu'il faut evidemment exclure.

Remarque. Les cas où $f(\xi, \eta)$ se réduit à une fonction linéaire ou à une constante, rentrent dans le cas général où $f(\xi, \eta)$ est de la forme $\varphi(w\zeta + t\eta)$, en prenant pour $\varphi(z)$ dans ces deux premiers cas $\varphi(z) = = pz + q$ où p et q sont deux constantes complexes.

Problème inverse. Donnons-nous à priori, une fonction $\varphi(z)$ analytique au point $z^0 = x^0 + iy^0$ et une forme linéaire $w\xi + t\eta$ de deux variables complexes $\xi = x_1 + ix_2$, $\eta = x_3 + ix_4$. La fonction

$$f(\xi, \eta) = \varphi(w\xi + t\eta) - P_1(x_1, \ldots, x_4) + iP_2(x_1, \ldots, x_4)$$

sera évidemment une fonction analytique des deux variables complexes ξ, η pour $\xi = \xi^0$, $\eta = \eta^0$, pourvu que $w\xi^0 + t\eta^0 = z^0$.

Nous voulons démontrer qu'il existe au moins une règle R relativement à laquelle soit paraanalytique pour $v = v^0 = x_1{}^0 e_1 + \ldots + x_4{}^0 e_4$, (avec $\xi^0 = x_1{}^0 + ix_2{}^0$, $\eta^0 = x_3{}^0 + ix_4{}^0$) la fonction vectorielle associée à $f(\xi, \eta)$, soit

$$F(v) = P_1(x_1, \ldots, x_4) f_1 + P_2(x_1, \ldots, x_4) f_2.$$

Démonstration. Pour des raisons indiquées plus loin, prenons à priori les coefficients u_{jkh} de la règle R tels que

$$(16)\quad \begin{cases} u_{111} + iu_{112} = w,\ u_{221} + iu_{222} = -w;\ u_{131} + iu_{132} = t,\ u_{241} + iu_{242} = -t; \\ u_{121} + iu_{122} = iw = u_{211} + iu_{212};\ u_{141} + iu_{142} = it = u_{231} + iu_{232}. \end{cases}$$

Il s'agit de savoir s'il existe $L_1(v)$, $L_2(v)$ tels qu'en posant $F'(v) = L_1(v) f_1 + L_2(v) f_2$ on ait

$$dF = F' . dv$$

ou

$$dP_1 f_1 + dP_2 f_2 = \sum \sum \sum L_j \cdot dx_k u_{jkh} f_h$$

ou

$$dP_h = \sum\sum L_j . dx_k u_{jkh}.$$

D'où

$$d\varphi(z) = dP_1 + idP_2 = \sum\sum L_j . dx_k(u_{jk1} + iu_{jk2}) = L_1 dx_1 w + L_1 dx_2 iw$$
$$+ L_1 dx_3 t + L_1 dx_4 it + \ldots = L_1(w d\xi + t d\eta) +$$

ou

$$\varphi'_z dz = (L_1 + iL_2) dz.$$

Ainsi $F(v)$ est dérivable puisqu'il suffit de prendre $L_1 + iL_2 = \varphi'_z$, c'est à dire de prendre pour $F'(v) = L_1 f_1 + L_2 f_2$, la fonction vectorielle associée à φ'_z.

Mais alors, de même, puisque φ'_z est aussi analytique pour $z = z^0$, $F'(v)$ est dérivable et on obtient $F''(v)$ en la prenant égale à la fonction vectorielle associée à $\varphi''(z)$, etc.

Finalement on voit qu'il existe une règle R, définie par les relations (16) et, par suite, dépendante des coefficients w, t de la forme $w\xi + t\eta$, mais indépendante de la fonction $\varphi(z)$ (supposée analytique pour $z = z_0$), règle R telle que la fonction vectorielle $F(v) = P_1 f_1 + P_2 f_2$ associée à la fonction $\varphi(w\xi + t\eta) = P_1 + iP_2$ soit paraanalytique pour $v = v^0$ en posant

$$v^0 = \sum x_k^0 e_k \quad \text{où} \quad w(x_1^0 + ix_2^0) + t(x_3^0 + ix_4^0) = z^0.$$

Généralisation. Pour démontrer la proposition inverse, il suffisait, comme nous l'avons fait à l'instant, de prouver qu'il existe au moins une règle R, pour laquelle $F(v)$ soit paraanalytique pour $v = v^0$.

On peut cependant se poser la question de déterminer les règles R pour lesquelles il en est ainsi. Nous nous contenterons de dire que 1° si $\varphi(z)$ est constant, toutes les règles conviennent, 2° si $\varphi(z)$ est linéaire, sans être constant, on obtient facilement deux formes de règles, qui dépendent d'un assez grand nombre de paramètres arbitraires, 3° enfin, dans le cas le plus intéressant où $\varphi(z)$ est analytique pour $z = z^0$, sans être constante ni linéaire, la règle la plus générale cherchée dépend de deux paramètres réels arbitraires: a et b, tels que $a + ib \neq 0$, en prenant pour les u_{jkh}:

$$\begin{aligned}
&u_{111} + iu_{112} = s + in\,; \quad u_{221} + iu_{222} = -(s + in)\,; \\
&u_{121} + iu_{122} = i(s + in) = u_{211} + u_{212}\,; \\
(17) \qquad &u_{131} + iu_{122} = s' + in'\,; \quad u_{241} + iu_{242} = -(s' + in')\,; \\
&u_{231} + iu_{232} = i(s' + in') = u_{141} + iu_{142}\,; \\
&\text{avec } s + in = (a + ib)w, \quad s' + in' = (a + ib)t.
\end{aligned}$$

La règle examinée plus haut est celle qui correspond au cas où $a = 1$, $b = 0$.

Cas particulier. Lorsque $\varphi(z) = e^z$, il est clair qu'on aura $F(v) = F'(v) = \ldots$

Reçu le 10. 10. 1955

LITTÉRATURE

1. M. Fréchet. Les surfaces dérivables relativement à une règle de multiplication: mémoire préliminaire. Verhandelingen kon. Nederlandse Ak. v. Wetens. Eerste Reeks, Deel XXI, № 1 (1954), p. 1—44. Second mémoire: Ann. Ec. Norm. Sup. (3) LXXI, 1954, p. 29—85.

ВЪРХУ АНАЛИТИЧНИТЕ ФУНКЦИИ НА ДВЕ КОМПЛЕКСНИ ПРОМЕНЛИВИ, КОИТО СА ПАРААНАЛИТИЧНИ

Морис Фреше (Париж)

РЕЗЮМЕ

Нека $f_1, f_2, \dots, f_n$ са n единични вектори върху n оси от пространството E_n с n измерения; $e_1, e_2, \dots, e_p$ p единични вектори, поставени върху осите на пространството E_p с p измерения и $V = X_1 f_1 + \dots + X_n f_n$ и $v = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p$ два вектора от тези две пространства. Когато $V = F(v)$, то $X_1, X_2, \dots, X_n$ са функции на $x_1, x_2, \dots, x_p$,

$$X_1 = F_1(x_1, \dots, x_p), \quad X = F_2(x_1, \dots, x_p), \dots, X_n = F_n(x_1, \dots, x_p).$$

В две свои неотдавнашни публикации авторът е въвел и изучил някои приложения на следните дефиниции:

I. $F(v)$ е диференцируема относно правилото R за $v = v^0$, ако $1^0 F(v)$ е диференцируема за $v - v^0$ и 2^0 съществува един вектор V_0', независим от dv, така че за $v = v^0$ да имаме

$$dF(v) = V_0' dv, \tag{1}$$

където в дясната част произведението е извършено съгласно правилото R. V_0' има вида $\sum_j L_j(v^0) f_j$, а $V_0' dv$ има вида

$$\left(\sum_j L_j f_j\right) \cdot \left(\sum_k dx_k e_k\right) = \sum_j \sum_k L_j dx_k f_j \cdot e_k. \tag{2}$$

За да има равенството (2) смисъл, трябва очевидно правилото за умножение да се изразява във формата

$$f_j \cdot e_k = \sum_h u_{jkh} f_h,$$

където u_{jkh} са константи, определящи правилото R.

Ако условията 1^0 и 2^0 са изпълнени, V_0' се нарича производна на $F(v)$ за $v = v^0$ относно R.

II. $F(v)$ е парааналитична относно R за $v = v^0$, ако $F(v)$ е диференцируема неограничено пъти относно R в околността на V^0.

В цитираните две работи авторът е установил някои общи свойства на тези функции и ги е приложил в теорията на повърхнините в случая, където $n = 3$, $p = 2$. В настоящата работа авторът дава ново приложение, като изследва в случая, където $n = 2$, $p = 4$, кои са аналитичните функции (в класичен смисъл) на две комплексни променливи, които са в същото време парааналитични функции относно едно подходящо правило R.

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ПАРААНАЛИТИЧЕСКИМИ

Морис Фреше (Париж)

РЕЗЮМЕ

Допустим, что $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — n единичные векторы пространства E_n n измерений; $e_1, e_2, \ldots, e_p$ — p единичные векторы пространства E_p p измерений и $V = X_1 f_1 + \ldots + X_n f_n$ и $v = x_1 e_1 + \ldots + x_p e_p$ — два вектора этих двух пространств. Когда $V = F(v)$, то $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — функции $x_1, x_2, \ldots, x_p$;

$$X_1 = F_1(x_1 \ldots, x_p), \quad X_2 = F_2(x_1, \ldots, x_p), \ldots, \quad X_n = F_n(x_1, \ldots, x_p).$$

В двух недавно опубликованных своих работах автор ввел и изучил ряд случаев применения следующих определений:

I. $F(v)$ диференцируема относительно правила R для $v = v^0$, если 1° $F(v)$ диференцируема для $v = v^0$ и 2° существует вектор v_0', независимый от dv, так что для $v = v^0$

$$dF(v) = V_0' dv, \tag{1}$$

где в правой части произведение осуществлено согласно правилу R.

V_0' имеет вид $\sum L_f(v^0) f_j$ и $V_0' dv$ имеют вид

$$\left(\sum L_j f_j\right) \cdot \left(\sum_k dx_k e_k\right) = \sum_j \sum_k L_j dx_k f_j \cdot e_k. \tag{2}$$

Для того, чтобы равенство (2) имело определенный смысл, очевидно необходимо, чтобы правило умножения выражалось формой:

$$f_j \cdot e_k = \sum_h u_{jkh} f_h,$$

где u_{jkh} являются константами, определяющими правило R.

Если условия 1° и 2° выполнены, то V_0' называется производной $F(v)$ для $v = v^0$ относительно R.

II. $F(v)$ — парааналитична относительно R для $v = v^0$, если $F(v)$ неограниченно диференцируема относительно R в окрестности v^0.

В цитированных выше двух работах автор установил некоторые общие свойства этих функций и применил их в теории поверхностей в случае $n = 3$, $p = 2$. В настоящей работе автор дает новое применение, исследуя (в случае $n = 2$, $p = 4$) — каковы аналитические функции двух комплексных переменных, являющихся в то же время и парааналитическими функциями относительно одного подходящего правила R.