# ВЪРХУ СЪЩЕСТВУВАНЕТО НА ПЕРИОДИЧНИ ДВИЖЕНИЯ НА ДВОЙНОТО ФИЗИЧНО МАХАЛО В РАВНИНАТА, ПРИ КРАТНИ КОРЕНИ НА ХАРАКТЕРИСТИЧНОТО УРАВНЕНИЕ

**Г. Брадистилов**

В моя предишна работа [1] доказах за едно $n$-кратно физично махало, лежащо във вертикална равнина, съществуването на $n$ фамилии периодични движения около стабилното му равновесно положение, при предположение, че корените на характеристичното уравнение не са кратни. В тази работа ще разгледам същия въпрос, и то в частен случай за двойно физично махало при предположение, че корените на характеристичното уравнение са кратни но различни.

В частност от [1, (8)] намираме непосредствено диференциалните уравнения на движението на двойното махало:

$$
(1)\quad \begin{cases}
(A_1+I_1)\psi_1''+b_1B_2[\cos\lambda(\psi_1-\psi_2)\psi_2''+\lambda\sin\lambda(\psi_1-\psi_2)\psi_2'^2] \\
\qquad = -gB_1\psi_1+\lambda gB_1\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\lambda^{2n-3}\psi_1^{2n-1}}{(2n-1)!}, \\
B_2b_1[\cos\lambda(\psi_2-\psi_1)\psi_1''+\lambda\sin\lambda(\psi_2-\psi_1)\psi_1'^2]+(A_2+I_2)\psi_2'' \\
\qquad = -gB_2\psi_2+\lambda gB_2\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\lambda^{2n-3}\psi_2^{2n-1}}{(2n-1)!},
\end{cases}
$$

където $\varphi_\nu=\lambda\psi_\nu$ е ъгълът, който сключва $\nu$-тото махало ($\nu=1,2$) с вертикалното положение, $I_\nu$ — инерчният момент на $\nu$-тото махало спрямо центъра на тежестта и

$$A_1=a_1^2m_1+b_1^2m_2,\qquad A_2=a_2^2m_2,$$

$$B_1=a_1m_1+b_1m_2,\qquad B_2=a_2m_2.$$

Тук $a_\nu$ е разстоянието между оста на въртене и центъра на тежестта на $\nu$-тото махало, а $b_1$ — разстоянието между осите на въртенето на двете махала.

При $\lambda=0$ системата (1) се свежда в линейната система диференциални уравнения

$$
(2)\qquad \begin{cases} (A_1+l_1)\psi_1''+b_1B_2\psi_2''=-gB_1\psi_1, \\ B_2b_1\psi_1''+(A_2+l_2)\psi_2''=-gB_2\psi_2, \end{cases}
$$

на която характеристичното уравнение е

$$
(3)\qquad \begin{vmatrix} (A_1+l_1)\varrho^2+gB_1 & b_1B_2\varrho^2 \\ b_1B_2\varrho^2 & (A_2+l_2)\varrho^2+gB_2 \end{vmatrix}=0.
$$

Както доказахме в работа [1], това уравнение има само чисто имагинерни корени $\pm\varrho_k i$ $(k=1,2)$. Да приемем сега, че тези корени са кратни помежду си, т. е. че $\varrho_2=k\varrho_1$, където $k$ е цяло положително число, различно от единица. Тогава общият интеграл на пораждащата система (2) е

$$
(4)\qquad \begin{cases} \psi_{\nu 0}=L_{\nu 1}(C_1\cos\varrho_1 t+C_2\sin\varrho_1 t)+L_{\nu 2}(C_3\cos k\varrho_1 t+C_4\sin k\varrho_1 t), \\ \psi'_{\nu 0}=\varrho_1 L_{\nu 1}(-C_1\sin\varrho_1 t+C_2\cos\varrho_2 t)+k\varrho_1 L_{\nu 2}(-C_3\sin k\varrho_1 t+C_4\cos k\varrho_1 t), \end{cases}
$$

$$
(\nu=1,2),
$$

където $L_{\nu k}$ удовлетворяват уравненията

$$
(5)\qquad \begin{cases} [(A_1+l_1)\varrho_k^2-gB_1]L_{1k}+b_1B_2\varrho_k^2L_{2k}=0, \\ B_2b_1\varrho_k^2L_{1k}+[(A_2+l_2)\varrho_k^2-gB_2]L_{2k}=0 \end{cases}\qquad (k=1,2)
$$

и детерминантата, образувана от тях,

$$
\Delta=\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix}
$$

е различна от нула.

От цитираната работа [1] се вижда, че за корена $\varrho_2$ и за малки значения на $\lambda$ съществува за двукратното махало една фамилия периодични движения, зависеща от един параметър, на който периодът е различен от $\frac{2\pi}{\varrho_2}$ и при $\lambda\to 0$ клони към $\frac{2\pi}{\varrho_2}$. Обаче доказателството за съществуване на периодични решения за корена $\varrho_1$ престава да е приложимо, тъй като, щом $\varrho_2=k\varrho_1$, функционалната детерминанта $=\sin\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\pi\cdot\Delta$ е очевидно равна на нула.

Тук ще докажем, че и при този корен $\varrho_1$ съществуват периодични решения.

## Доказателство

При доказателството, ще се възползуваме от следното свойство [1]:

Ако двойното махало при неговото движение мине два пъти през стабилното равновесно положение, движението е периодично.

За тази цел ще разгледаме специалния частен интеграл на системата (2):

$$(6)\qquad \begin{cases} \psi_{\nu 0}(t) = L_{\nu 1}\sin\varrho_1 t + L_{\nu 2} N \sin k\varrho_1 t, \\ \psi'_{\nu 0}(t) = \varrho_1 L_{\nu 1}\cos\varrho_1 t + k\varrho_1 L_{\nu 2} N\cos k\varrho_1 t, \end{cases}$$

който има период $\frac{2\pi}{\varrho_1}$ и начални стойности

$$\psi_{\nu 0}(0) = 0, \quad \psi'_{\nu 0} = \varrho_1 L_{\nu 1} + k\varrho_1 L_{\nu 2} N,$$

където $N$ е неизвестна константа, която, както ще видим, можем да определим по такъв начин, че съответното решение на системата (1) да бъде периодично.

Интегралът на системата (1) с видоизменени начални условия

$$(7)\qquad \begin{cases} \psi_\nu(0) = 0, \\ \psi'_\nu(0) = \varrho_1 L_{\nu 1} + k\varrho_1 L_{\nu 2}(N+a), \end{cases}$$

съгласно една теорема на Poincaré може за достатъчно малки значения на $\lambda$ и $a$ да се представи със степенни редове на $\lambda$ и $a$ в следния вид:

$$(8)\qquad \begin{cases} \psi_\nu(t) = \psi_{\nu 0}(t) + P_\nu(t)a + \lambda^2[Q_\nu(t) + R_\nu(t)a + \dots], \\ \psi'_\nu(t) = \psi'_{\nu 0}(t) + P'_\nu(t)a + \lambda^2[Q'_\nu(t) + R'_\nu(t)a + \dots], \end{cases} \qquad (\nu = 1,2),$$

където $P_\nu$, $Q_\nu$, $R_\nu$ и т. н. са непознати функции на $t$, които за $t = 0$ добиват въз основа на (7) следните начални стойности:

$$P_\nu(0) = 0, \quad P'_\nu(0) = k\varrho_1 L_{\nu 2};$$

$$Q_\nu(0), = 0, \quad Q'_\nu(0) = 0;$$

$$R_\nu(0) = 0, \quad R'_\nu(0) = 0.$$

Като заместим интеграла (8) в системата (1) и приравним коефициентите пред съответните степени на $a$ и $\lambda$, ще получим за непознатите функции $P_\nu$, $Q_\nu$, $R_\nu$ и т. н. линейни системи диференциални уравнения, които ще ни позволят да ги определим напълно.

За нашите по-нататъшни разглеждания достатъчно е да определим само $P_\nu(t)$, $Q(t)$ и $R_\nu(t)$. Тези функции са интеграли на системата

$$(9)\qquad \begin{cases} (A_1 + I_1)y''_1 + b_1 B_2 y''_2 + gB_1 y_1 = F_1(t), \\ b_1 B_2 y''_1 + (A_2 + I_2)y''_2 + gB_2 y_2 = F_2(t), \end{cases}$$

където $F_1(t)$ и $F_2(t)$ за функциите $P_\nu$, $Q_\nu$ и $R_\nu$ са съответно равни на

$$(10)\qquad F_1^P(t) = 0, \quad F_2^P(t) = 0;$$

$$(11)\qquad \begin{cases} F_1^Q = gB_1\frac{\psi'^3_{10}}{6} + b_1 B_2\frac{(\psi'_{10} - \psi'_{20})^2}{2}\psi''_{20} - b_1 B_2(\psi'_{10} - \psi'_{20})\psi'^2_{20}, \\ F_2^Q = gB_2\frac{\psi'^3_{20}}{6} + b_1 B_2\frac{(\psi'_{10} - \psi'_{20})^2}{2}\psi''_{10} - b_1 B_2(\psi'_{20} - \psi'_{10})\psi'^2_{10}; \end{cases}$$

$$F_1^R=\frac{dF_1^Q}{dN}=gB_1\,\frac{\psi_{10}^2}{2}P_1+b_1B_2\Big[\frac{(\psi_{10}-\psi_{20})^2}{2}\,P_2''$$

$$+(P_1-P_2)(\psi_{10}-\psi_{20})\,\psi_{20}''\Big]-b_1B_2\,[2(\psi_{10}-\psi_{20})\,\psi_{20}'P_2'+(P_1-P_2)\,\psi_{20}'^2],$$

$$F_2^R=\frac{dF_2^Q}{dN}=gB_2\,\frac{\psi_{20}^2}{2}P_2+b_1B_2\Big[\frac{(\psi_{10}-\psi_{20})^2}{2}\,P_1''$$

$$+(P_1-P_2)(\psi_{10}-\psi_{20})\,\psi_{10}''\Big]-b_1B_2\,[2(\psi_{20}-\psi_{10})\,\psi_{10}'P_1'+(P_2-P_1)\,\psi_{10}'^2].$$

Хомогенната система диференциални уравнения на (9) е точно ₋мата (2). Следователно общият ѝ интеграл е (4). Тогава, като ем предвид началните условия на функциите $P_\nu(t)$:

$$P_\nu(0)=0,\quad P_\nu'(0)=k\varrho_1 L_{\nu 2}$$

тези функции са частен интеграл на (2), намираме

$$P_\nu(t)\quad L_{\nu 2}\sin k\varrho_1 t\qquad (\nu=1,2).$$

Функциите $Q_\nu(t)$ и $R_\nu(t)$ ще се получат също като частни грали на системата (9) с начални условия $y_\nu(0)=y_\nu'(0)=0$ и при ветни десни страни. За да намерим частния интеграл на (9) тези начални условия, ще постъпим по метода на вариране на тантите. Този интеграл ще бъде от вида (4), където производ- на $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$ и $C_4(t)$ удовлетворяват системата урав- я

$$L_{11}\,(C_1'\cos\varrho_1 t+C_2'\sin\varrho_1 t)+L_{12}\,(C_3'\cos k\varrho_1 t+C_4'\sin k\varrho_1 t)=0,$$

$$L_{21}\,(C_1'\cos\varrho_1 t+C_2'\sin\varrho_1 t)+L_{22}\,(C_3'\cos k\varrho_1 t+C_4'\sin k\varrho_1 t)=0,$$

$$kL_{11}\,(-C_1'\sin\varrho_1 t+C_2'\cos\varrho_1 t)+L_{12}\,(-C_3'\sin k\varrho_1 t+C_4'\cos k\varrho_1 t)$$

$$=\frac{\varrho_1 k}{gB_1}\,F_1(t),$$

$$kL_{21}\,(-C_1'\sin\varrho_1 t+C_2'\cos\varrho_1 t)+L_{22}\,(-C_3'\sin k\varrho_1 t+C_4'\cos k\varrho_1 t)$$

$$=\frac{\varrho_1 k}{gB_2}\,F_2(t).$$

Детерминантата, образувана от коефициентите пред неизвест- , е

$$=\begin{vmatrix} L_{11}\cos\varrho_1 t & L_{11}\sin\varrho_1 t & L_{12}\cos k\varrho_1 t & L_{12}\sin k\varrho_1 t\\ L_{21}\cos\varrho_1 t & L_{21}\sin\varrho_1 t & L_{22}\cos k\varrho_1 t & L_{22}\sin k\varrho_1 t\\ -kL_{11}\sin\varrho_1 t & kL_{11}\cos\varrho_1 t & -L_{12}\sin k\varrho_1 t & L_{12}\cos k\varrho_1 t\\ -kL_{21}\sin\varrho_1 t & kL_{21}\cos\varrho_1 t & -L_{22}\sin k\varrho_1 t & L_{22}\cos k\varrho_1 t \end{vmatrix}$$

За да пресметнем детерминантата $D$, ще установим най-напред, че тя е константа. Наистина системата (2), представена в нормален вид,

$$\begin{cases} \psi_1' = 0\,.\,\psi_1 + \tau_1, \\ \psi_2' = 0\,.\,\psi_2 + \tau_2, \\ \tau_1' = 0\,.\,\tau_1 + \ldots \\ \tau_2' = 0\,.\,\tau_2 + \ldots \end{cases}$$

показва, че в десните страни на тези уравнения коефициентите пред $\psi_1$, $\psi_2$, $\tau_1$ и $\tau_2$ съответно в първото, второто, третото и четвъртото уравнение са нули. Следователно

$$D = \text{const.}\ e^{\int_0^t 0.dt} = \text{const.}$$

Прочее стойността на детерминантата $D$ може да се пресметне, като се положи $t=0$:

$$(15)\qquad D = \begin{vmatrix} L_{11} & 0 & L_{12} & 0 \\ L_{21} & 0 & L_{22} & 0 \\ 0 & kL_{11} & 0 & L_{12} \\ 0 & kL_{21} & 0 & L_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} kL_{11} & L_{12} \\ kL_{21} & L_{22} \end{vmatrix} = -k\Delta^2 \neq 0.$$

Числителите на решенията на (14) са следните детерминанти

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & L_{11}\sin\varrho_1 t & L_{12}\cos k\varrho_1 t & L_{12}\sin k\varrho_1 t \\ 0 & L_{21}\sin\varrho_1 t & L_{22}\cos k\varrho_1 t & L_{22}\sin k\varrho_1 t \\ f_1 & kL_{11}\cos\varrho_1 t & -L_{12}\sin k\varrho_1 t & L_{12}\cos k\varrho_1 t \\ f_2 & kL_{21}\cos\varrho_1 t & -L_{22}\sin k\varrho_1 t & L_{22}\cos k\varrho_1 t \end{vmatrix},$$

$$D_2 \quad \begin{vmatrix} L_{11}\cos\varrho_1 t & 0 & L_{12}\cos k\varrho_1 t & L_{12}\sin k\varrho_1 t \\ L_{21}\cos\varrho_1 t & 0 & L_{22}\cos k\varrho_1 t & L_{22}\sin k\varrho_1 t \\ -kL_{11}\sin\varrho_1 t & f_1 & -L_{12}\sin k\varrho_1 t & L_{12}\cos k\varrho_1 t \\ -kL_{21}\sin\varrho_1 t & f_2 & -L_{22}\sin k\varrho_1 t & L_{22}\cos k\varrho_1 t \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} L_{11}\cos\varrho_1 t & L_{11}\sin\varrho_1 t & 0 & L_{12}\sin k\varrho_1 t \\ L_{21}\cos\varrho_1 t & L_{22}\sin\varrho_1 t & 0 & L_{22}\sin k\varrho_1 t \\ -kL_{11}\sin\varrho_1 t & kL_{11}\cos\varrho_1 t & f_1 & L_{12}\cos k\varrho_1 t \\ -kL_{22}\sin\varrho_1 t & kL_{21}\cos\varrho_1 t & f_2 & L_{22}\cos k\varrho_1 t \end{vmatrix},$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} L_{11}\cos\varrho_1 t & L_{11}\sin\varrho_1 t & L_{12}\cos k\varrho_1 t & 0 \\ L_{21}\cos\varrho_1 t & L_{22}\sin\varrho_1 t & L_{22}\cos k\varrho_1 t & 0 \\ -kL_{11}\sin\varrho_1 t & kL_{11}\cos\varrho_1 t & -L_{12}\sin k\varrho_1 t & f_1 \\ -kL_{22}\sin\varrho_1 t & kL_{21}\cos\varrho_1 t & -L_{22}\sin k\varrho_1 t & f_2 \end{vmatrix},$$

където $\quad f_1 = \dfrac{\varrho_1 k}{gB_1} F_1 \quad$ и $\quad f_2 = \dfrac{\varrho_1 k}{gB_2} F_2.$

Като развием $D_1$, $D_2$, $D_3$ и $D_4$ съответно по елементите на първата, втората, третата и четвъртата колона, намираме, че тези детерминанти имат следните стойности:

$$(16)\qquad \begin{cases} D_1 = [L_{22} f_1(t) - L_{12} f_2(t)]\,\Delta \sin\varrho_1 t, \\ D_2 = -[L_{22} f_1(t) - L_{12} f_2(t)]\,\Delta \cos\varrho_1 t, \\ D_3 = [L_{11} f_2(t) - L_{21} f_1(t)]\,\Delta k \sin k\varrho_1 t, \\ D_4 = -[L_{11} f_2(t) - L_{21} f_1(t)]\,\Delta k \cos k\varrho_1 t. \end{cases}$$

Прочее решенията на (14) са

$$(17)\qquad \begin{cases} C_1' = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{L_{22} f_1(t) - L_{12} f_2(t)}{k\Delta} \sin\varrho_1 t, \\[2ex] C_2' = \dfrac{D_2}{D} = -\dfrac{L_{22} f_1(t) - L_{12} f_2(t)}{k\Delta} \cos\varrho_1 t, \\[2ex] C_3' = \dfrac{D_3}{D} = -\dfrac{L_{11} f_2(t) - L_{21} f_1(t)}{\Delta} \sin k\varrho_1 t, \\[2ex] C_4' = \dfrac{D_4}{D} = \dfrac{L_{11} f_2(t) - L_{21} f_1(t)}{\Delta} \cos k\varrho_1 t. \end{cases}$$

Тогава интегралът на системата (9) с начални условия

$$y_1(0) = y_2(0) = 0 \quad \text{и} \quad y_1'(0) = y_2'(0) = 0$$

е

$$y_\nu = L_{\nu 1} \frac{\int_0^t [L_{22} f_1(u) - L_{12} f_2(u)]\,[\cos\varrho_1 u \sin\varrho_1 t - \sin\varrho_1 u \cos\varrho_1 t]\,du}{k\Delta}$$

$$+ L_{\nu 2} \frac{\int_0^t [L_{11} f_2(u) - L_{21} f_1(u)]\,[\sin k\varrho_1 t \cos k\varrho_1 u - \sin k\varrho_1 u \cos k\varrho_1 t]\,du}{\Delta}$$

или

$$(18)\qquad y_\nu = \frac{1}{k\Delta} \int_0^t \left\{ \begin{array}{l} L_{\nu 1}\,[L_{22} f_1(u) - L_{12} f_2(u)] \sin\varrho_1 (t-u) \\ + k\, L_{\nu 2}\,[L_{11} f_2(u) - L_{21} f_1(u)] \sin k\varrho_1 (t-u) \end{array} \right\} du.$$

Следователно търсените функции $Q_\nu$ и $R_\nu$ ще се дадат от (18), като заместим най-напред $f_\nu$ с $\frac{\varrho_1 k}{g B_\nu} F_\nu$ и след това $F_\nu$ съответно с изразите от (11) и (12).

Сега ще търсим условието, кога интегралът (8) е периодична функция.

Този интеграл ще има за достатъчно малки стойности на $\lambda$ и $\alpha$ видоизменен период $\frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1}$ на периода $\frac{2\pi}{\varrho_1}$ на интеграла (6), ако

$$\psi_\nu\left(\frac{\pi+\delta}{\varrho_1}\right) = 0 \qquad (\nu = 1,2),$$

т. е. ако

$$L_{\nu 1} \sin\delta \pm L_{\nu 2} N \sin k\delta \pm \alpha L_{\nu 2} \sin k\delta - \lambda^2 \left[ Q_\nu\left(\frac{\pi+\delta}{\varrho_1}\right) + R_\nu\left(\frac{\pi+\delta}{\varrho_1}\right)\alpha + \cdots \right] = 0$$

Знаците $\pm$ отговарят съответно на $k$ нечетно или четно.

Като развием по степените на $\delta$, получаваме

$$(19) \qquad \begin{cases} \delta\,[L_{11} \pm k L_{12} N \pm k L_{12} \alpha + \cdots] - \lambda^2 \left[ Q_1\left(\frac{\pi}{\varrho_1}\right) + R_1\left(\frac{\pi}{\varrho_1}\right)\alpha + \cdots \right] = 0, \\ \delta\,[L_{21} \pm k L_{22} N \pm k L_{22} \alpha + \cdots] - \lambda^2 \left[ Q_2\left(\frac{\pi}{\varrho_1}\right) + R_2\left(\frac{\pi}{\varrho_1}\right)\alpha + \cdots \right] = 0, \end{cases}$$

където ненаписаните членове съдържат $\delta$ най-малко от първа степен.

Системата (19) по $\delta$ и $\lambda^2$ ще бъде удовлетворена, ако е изпълнено условието

$$(20) \qquad [L_{11} \pm k L_{12} N \pm k L_{12} \alpha + \cdots] \left[ Q_2\left(\frac{\pi}{\varrho_1}\right) + R_2\left(\frac{\pi}{\varrho_1}\right)\alpha + \cdots \right]$$
$$- [L_{21} \pm k L_{22} N \pm k L_{22} \alpha + \cdots] \left[ Q_1\left(\frac{\pi}{\varrho_1}\right) + R_1\left(\frac{\pi}{\varrho_1}\right)\alpha + \cdots \right] = 0.$$

Обаче ясно е, че последното равенство ще бъде удовлетворено за достатъчно малки значения на $\alpha(\lambda)$, ако свободният му член е равен на нула, т. е. ако

$$(21) \qquad (L_{11} \pm k L_{12} N)\, Q_2\left(\frac{\pi}{\varrho_1}\right) - (L_{21} \pm k L_{22} N)\, Q_1\left(\frac{\pi}{\varrho_1}\right) = 0$$

и ако коефициентът пред $\alpha$ е различен от нула:

$$(22) \qquad (L_{11} \pm k L_{12} N)\, R_2\left(\frac{\pi}{\varrho_1}\right) - (L_{21} \pm k L_{11} N)\, R_1\left(\frac{\pi}{\varrho_1}\right)$$
$$\pm k L_{12} Q_2\left(\frac{\pi}{\varrho_1}\right) \mp k L_{22} Q_1\left(\frac{\pi}{\varrho_1}\right) \neq 0.$$

Като заместим в (21) и (22) $Q_1$, $Q_2$ и $R_1$, $R_2$ съответно с изразите, дадени от формула (18), намираме

$$(21\,\text{а})\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{\varrho_1}}\Big\{[L_{11}\,B_1F_2^Q(u)-L_{21}\,B_2\,F_1^Q(u)]\sin k\varrho_1 u \mp N[L_{22}\,B_2\,F_1^Q(u)$$

$$-L_{12}\,B_1\,F_2^Q(u)]\sin\varrho_1 u\Big\}\,du=0.$$

и

$$(22\,\text{а})\int\limits_0^{\frac{\pi}{\varrho_1}}\Big\{[L_{11}\,B_1\,F_2^R(u)-L_{21}\,B_2\,F_1^R(u)]\sin k\,\varrho_1\,u\mp N[L_{22}\,B_2\,F_1^R(u)$$

$$-L_{12}\,B_1\,F_2^R(u)]\sin\varrho_1\,u\Big\}\,du$$

$$\mp\int\limits_0^{\frac{\pi}{\varrho_1}}[L_{22}\,B_2\,F_1^Q(u)-L_{12}\,B_1\,F_2^Q(u)]\sin\varrho_1\,u\,du\neq 0.$$

Лявата страна на последното неравенство представлява производната по $N$ на лявата страна на уравнението (21 а).

В (21 а) и (22 а) полагаме $z=\varrho_1 u$ и получаваме

$$(21\,\text{в})\quad\int\limits_0^{\pi}\Big\{\Big[L_{11}\,B_1\,F_2^Q\Big(\frac{z}{\varrho_1}\Big)-L_{21}\,B_2\,F_1^Q\Big(\frac{z}{\varrho_1}\Big)\Big]\sin k\,z\mp N\Big[L_{22}\,B_2\,F_1^Q\Big(\frac{z}{\varrho_1}\Big)$$

$$-L_{12}\,B_1\,F_2^Q\Big(\frac{z}{\varrho_1}\Big)\Big]\sin z\Big\}\,dz=0$$

и

$$(22\,\text{в})\int\limits_0^{\pi}\Big\{\Big[L_{11}\,B_1\,F_2^R\Big(\frac{z}{\varrho_1}\Big)-L_{21}\,B_2\,F_1^R\Big(\frac{z}{\varrho_1}\Big)\Big]\sin k\,z\mp N\Big[L_{22}\,B_2\,F_1^R\Big(\frac{z}{\varrho_1}\Big)$$

$$-L_{12}\,B_1\,F_2^R\Big(\frac{z}{\varrho_1}\Big)\Big]\sin z\Big\}\,dz$$

$$\mp\int\limits_0^{\pi}\Big[L_{22}\,B_2\,F_1^Q\Big(\frac{z}{\varrho_1}\Big)-L_{12}\,B_1\,F_2^Q\Big(\frac{z}{\varrho_1}\Big)\Big]\sin z\,dz\neq 0.$$

Като се пресметнат интегралите на равенство (21 в), се вижда, че то представлява уравнение на трета степен спрямо $N$:

$$(23)\qquad aN^3+bN^2+cN+d=0.$$

Един подробен анализ за установяване броя на реалните корени на уравнението (23) е доста труден, тъй като коефициентите на това уравнение са сложни изрази. Обаче при все това могат да се дадат следните изводи:

1. При $k\neq 3$ коефициентите $b$ и $d$ на уравнението (23) са нули, което показва, че това уравнение има един корен нула. За този корен неравенството (22 в) е изпълнено. Това се проверява чрез непосредствено пресмятане. Оттук можем да заключим, че при $k\neq 3$ съществува една фамилия периодични движения на двойното махало в околността на равновесното положение с видоизменен период $\frac{2\pi}{\varrho_1}$, които движения се изразяват с приблизителните уравнения

$$(24)\qquad \begin{cases} \varphi_\nu(t) = \lambda\,\psi_\nu(t) \approx \lambda\, L_{\nu 1} \sin \varrho_1 t, \\ \varphi'_\nu(t) = \lambda\,\psi'_\nu(t) \approx \lambda\, \varrho_1 L_{\nu 1} \cos \varrho_1 t, \end{cases} \qquad (\nu = 1,2)$$

Ако останалите два корена на уравнението (23) са реални и за тях е изпълнено неравенството (22 в), т. е. ако тези корени са прости, за корена $\varrho_1 i$ съществуват още две фамилии периодични движения на двойното махало, които движения се изразяват с приблизителните уравнения

$$(25)\qquad \begin{cases} \varphi_\nu(t) \approx \lambda\, L_{\nu 1} \sin \varrho_1 t + \lambda\, L_{\nu 2} N \sin k \varrho_1 t, \\ \varphi'_\nu(t) \approx \lambda\, \varrho L_{\nu 1} \cos \varrho_1 t + \lambda\, k \varrho_1 L_{\nu 2} N \cos k \varrho_1 t. \end{cases}$$

2. При $k = 3$ свободният член на уравнението (23) е

$$\frac{B_2}{48}\left\{ B_1 g L_{11} L_{21} (L_{11}^2 - L_{21}^2) + 3\, b_1 \varrho_1^2 (L_{11} - L_{21}) \left[3 (B_1 L_{11}^3 - B_2 L_{21}^3) + L_{11} L_{21} (B_1 L_{11} - B_2 L_{21})\right]\right\},$$

който изобщо е различен от нула. Това показва, че при този случай кубичното уравнение (23) има поне един реален корен, различен от нула. Следователно, ако за този корен неравенството (22 в) е изпълнено, т. е. ако коренът е прост, съществува една фамилия периодични движения на двойното махало около стабилното равновесно положение с видоизменен период $\frac{2\pi}{\varrho_1}$, на който приблизителните уравнения са от вида (25). Ако и останалите корени на кубичното уравнение са също реални и освен това прости, ще имаме две фамилии периодични движения на двойното махало, на които приблизителните уравнения са също от вида (25).

И тъй, можем да заключим, че при кратни корени съществуват изобщо фамилии периодични движения на двойното махало с видоизменен период $\frac{2\pi}{\varrho_1}$ около стабилното равновесно положение.

Само при $k = 3$ и $N = 0$ приблизителните уравнения на периодичните движения могат да се изразят с уравненията (24), както обикновено на практика се прави. В останалите случаи приблизителните уравнения се изразяват изобщо с уравненията (25).

*Постъпила на 18. 4. 1956.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. G. Bradistilov. Über periodische und asymptotische Lösungen beim n-fachen Pendel in der Ebene, Math. Annalen 116 (1938), S. 181—203.

# О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ДВОЙНОГО ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА В ПЛОСКОСТИ, КОГДА ОДИН КОРЕНЬ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЯВЛЯЕТСЯ КРАТНЫМ ДРУГОГО

Г. Брадистилов

## РЕЗЮМЕ

В одной своей предыдущей работе [1] для $n$-кратного физического маятника я доказал существование $n$ семейств периодических движений вокруг положения устойчивого равновесия при предположении, что ни один корень характеристического уравнения не является кратным другого. В настоящей работе я рассматриваю тот же вопрос по отношению к двойному физическому маятнику, предполагая, что корни характеристического уравнения кратны друг другу относительно корня мы доказываем, что в окрестности положения устойчивого равновесия при начальных условиях

$$\psi_\nu(0) = 0$$

$$\psi'_\nu(0) = \varrho_1 L_{\nu 1} + k \varrho_1 L_{\nu 2} (N + a),$$

где $\psi_\nu = \lambda \varphi_\nu$ отклонение маятника $\nu$ от вертикального положения, если $N$ реальный и простой корень кубического уравнения

(1) $$a N^3 + b N^2 + c N + d = 0$$

для двойного физического маятника существуют семейства периодических движений.

Подробный анализ с целью установления реальных корней уравнения (1) весьма труден, так как коэффициенты этого уравнения — сложные выражения. Однако, несмотря на это, можно сделать следующие выводы:

При $k \neq 3$ уравнение (1) приводится к уравнению

$$a N^3 + c N = 0,$$

т. е. обладает одним простым корнем, что показывает, что в окрестности положения устойчивого равновесия существует одно семейство периодических движений двойного физического маятника с

видоизмененным периодом. Эти уравнения выражаются приближенными уравнениями:

$$\begin{cases} \varphi_\nu(t) = \lambda\, \psi_\nu(t) \approx \lambda\, L_{\nu 1}\ \text{in}\, \varrho_1 t, \\ \varphi'_\nu(t) = \lambda\, \psi'_\nu(t) \approx \lambda\, \varrho_1 L_{\nu 1} \cos \varrho_1 t. \end{cases} \qquad (\nu = 1{,}2)$$

Если остальные два корня реальные и простые, то существуют для корня $\varrho_1$ еще два семейства периодических движений, которые выражаются приближенными уравнениями

$$\begin{cases} \varphi_\nu(t) \approx \lambda\, L_{\nu 1} \sin \varrho_1 t + \lambda\, L_{\nu 2} N \sin k \varrho_1 t, \\ \varphi'_\nu(t) \approx \lambda\, \varrho_1 L_{\nu 1} \cos \varrho_1 t + \lambda\, k\, \varrho_1 L_{\nu 2} N \cos k \varrho_1 t. \end{cases}$$

При $k = 3$ свободный член уравнения (1) вообще не равен нулю. Это показывает, что в последнем случае кубическое уравнение (1) имеет по крайней мере один реальный корень, не равный нулю. Если этот корень простой, то существует семейство периодических движений двойного маятника вокруг положения устойчивого равновесия с видоизмененным периодом $\dfrac{2\pi}{\varrho_1}$, приближенные уравнения которого имеют вид (2). Если остальные корни кубического уравнения также вещественные и простые, то двойной физический маятник будет иметь еще два семейства периодических движений с приближенными уравнениями вида (2).

## ÜBER DIE EXISTENZ PERIODISCHER BEWEGUNGEN EINES ZWEIFACHEN PHYSISCHEN IN EINER SENKRECHTEN EBENE LIEGENDEN PENDELS BEI UNTEREINANDER TEILBAREN WURZELN DER CHARAKTERISTISCHEN GLEICHUNG

G. Bradistilov

### ZUSAMMENFASSUNG

In einer früheren Arbeit [1] hat der Verfasser das Bestehen von *n* Scharen periodischer Bewegungen um die stabile Gleichgewichtslage eines $n$-fachen in einer senkrechten Ebene liegenden physischen Pendels nachgewiesen, unter der Annahme, daß die Wurzeln der charakteristischen Gleichung nicht untereinander teilbar sind. In der vorliegenden Arbeit wird dieselbe Frage behandelt, und zwar in dem Sonderfall für ein zweifaches physisches Pendel, unter der Annahme, daß die Wurzeln der charakteristischen Gleichung untereinander teilbar, jedoch verschieden sind: $\varrho_2 \quad k\varrho_1$. Für die Wurzel $\varrho_1 i$ wird bewiesen, daß in der Umgebung des stabilen Gleichgewichts Scharen periodischer Bewegungen für das zweifache physische Pendel mit folgenden Anfangs bedingungen bestehen:

$$\varphi_\nu(0) \quad \lambda\psi_\nu(0) \quad 0,$$

$$\varphi'_\nu(0) \quad \lambda\psi_\nu(0) \quad \varrho_1 L_{\nu 1} + k\varrho_1 L_{\nu 1}(N+a),$$

in denen $\varphi_\nu$ die Abweichung des $\nu$-ten Pendels von der senkrechten Lage ist, wenn $N$ eine reelle und einfache Wurzel einer kubischen Gleichung

$$aN^3 + bN^2 + cN + d = 0 \tag{1}$$

ist.

Eine eingehende Analyse zwecks Feststellung der reellen Wurzeln der Gleichung (1) ist ziemlich schwer, da die Koeffizienten dieser Gleichung komplizierte Ausdrücke sind. Trotzdem könnte daraus folgende Schlußfolgerungen gezogen werden:

Bei $k \neq 3$ läßt sich die Gleichung (1) reduzieren in

$$aN^3 + cN = 0.$$

Sie besitzt, folglich, eine einfache Wurzel Null, ein Zeichen dafür, daß in der Umgebung der stabilen Gleichgewichtslage von veränderter

Periode $\frac{2\pi}{\varrho_1}$ eine Schar periodischer Bewegungen des zweifachen Pendels existiert, die durch die annähernden Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_\nu(t) = \lambda\,\psi_\nu(t) \quad \lambda\,L_{\nu 1} \sin \varrho_1 t \\ \varphi'_\nu(t) = \lambda\,\psi'_\nu(t) \quad \lambda\,\varrho_1\,L_{\nu 1} \cos \varrho_1 t \end{array}\right. \qquad (\nu = 1,2)$$

ausgedrückt werden.

Wenn die übrigen zwei Wurzeln von (1) reell und einfach sind, so existieren für die Wurzel $\varrho_1 i$ noch zwei Scharen periodischer Bewegungen, welche durch folgende angenäherten Gleichungen zum Ausdruck kommen:

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi_\nu(t) \quad \lambda\,L_{\nu 1} \sin \varrho_1 t + \lambda\,L_{\nu 2}\,N \sin k\,\varrho_1 t, \\ \varphi'_\nu(t) \quad \lambda\,\varrho_1\,L_{\nu 1} \cos \varrho_1 t + \lambda\,k\,\varrho_1\,L_{\nu 2} \cos k\,\varrho_1 t. \end{array}\right.$$

Bei $k = 3$ ist das freie Glied von (1) überhaupt von Null verschieden. Das beweist, daß in diesem Falle die kubische Gleichung (1) wenigstens eine reelle, von Null verschiedene Wurzel hat. Ist diese Wurzel einfach, so besteht eine Schar periodischer Bewegungen des zweifachen Pendels um die stabile Gleichgewichtslage mit veränderter Periode $\frac{2\pi}{\varrho_1}$, deren annähernde Gleichungen von der Art (2) sind. Sind auch die übrigen Wurzeln der kubischen Gleichung ebenso reell und einfach, so wird das zweifache physische Pendel noch zwei Scharen periodischer Bewegungen mit annähernden Gleichungen dieser Art (2) haben.