ИНТЕГРАЛНО ПРЕДСТАВЯНЕ НА ЕДНА КЛАСА ФУНКЦИИ

Д. Добрев

В настоящата работа ще покажем, че изпъкналите и четно хомогенни функции на две променливи допускат следното интегрално представяне:

$$f(x, y)=\int_{-\infty}^{\infty}|y-sx|\,d\alpha(s)+A|x|,$$

където A е неотрицателна константа, $\alpha(s)$ монотонно растяща функция в $(-\infty, \infty)$, за която интегралът $\int_{-\infty}^{\infty}|s|\,d\alpha(s)$ е сходящ.

Нека K е съвкупността на функциите на две променливи, дефинирани за всяка двойка (x, y) от равнината, които са:

1) хомогенни: $f(ax, ay)=|a|f(x, y)$ за всяко реално a;

2) изпъкнали: $f(x_1+x_2, y_1+y_2)\leq f(x_1, y_1)+f(x_2, y_2)$.

Лема 1. Нека $f(x, y)\in K$. Ще покажем, че функцията $f(1, t)$ е изпъкнала функция на t в интервала $(-\infty, \infty)$, която има асимптоти за $t\to\infty$ и $t\to-\infty$.

Нека t_1 и t_2 са реални числа, а $p\geqslant 0$ и $q\geqslant 0$ са такива, че $p+q=1$. Тогава е изпълнено неравенството

$$f(1, pt_1+qt_2)=f(p+q,\ pt_1+qt_2)\leq pf(1, t_1)+qf(1, t_2),$$

което показва изпъкналостта на $f(1, t)$. Остава да докажем, че $f(1, t)$ има асимптоти за $t\to\infty$ и $t\to-\infty$. С други думи, ще покажем, че има такива числа $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$, че границите $\lim\limits_{t\to-\infty}[f(1, t)+at]$ и $\lim\limits_{t\to\infty}[f(1, t)-bt]$ да съществуват.

Ще покажем например, че $\lim\limits_{t\to\infty}[f(1, t)-bt]$ съществува. За b взимаме $b=f(0, 1)$. Тогава

$$f(1, t)-bt=f(1, t)-f(0, t) \text{ за } t\geqslant 0.$$

От неравенството

$$f(1, t+h)-f(0, t+h)\leq f(1, t)+f(0, h)-f(0, t)-f(0, h)\quad h\geqslant 0$$

се вижда, че $f(1, t)-f(0, t)$ монотонно намалява. От друга страна имаме $f(0, t) \leq f(1, t)+f(1, 0)$, т. е. $f(1, t)-f(0, t) \geq -f(1, 0)$, което показва, че функцията $f(1, t)-f(0, t)$ е ограничена отдолу и следователно има граница, когато $t \to \infty$.

По аналогичен начин се доказва, че $\lim\limits_{t \to -\infty} [f(1, t)+at]$ съществува $(a=f(0, 1))$.

С това лемата е доказана.

Като изпъкнала функция [1], $f(1, t)$ ще има във всяка точка лява и дясна производна, които ще съвпадат във всички точки с изключение евентуално на изброимо множество.

Освен това за $t_1 \leq t_2 < t_3 \leq t_4$

$$f'_-(1, t_1) \leq \frac{f(1, t_2)-f(1, t_3)}{t_2-t_3} \leq f'_+(1, t_4)$$

и най-сетне $f'_+(1, t)$ е монотонно растяща.

На всяка функция $f(x, y) \in K$ съпоставяме монотонно растящата функция $f'_+(1, t)$.

Лема 2. Ако на две функции от K $f(x, y)$ и $g(x, y)$ съответствуват равни монотонно растящи функции, то $f(x, y) = g(x, y) + c|x|$, където c е константа.

Наистина, щом $f'_+(1, t)=g'_+(1, t)$, следва, че почти навсякъде е изпълнено равенството $f'(1, t)=g'(1, t)$. От друга страна функциите $f(1, t)$ и $g(1, t)$, като изпъкнали и притежаващи асимптоти за $t \to \infty$ и $t \to -\infty$, удовлетворяват условието на Липшиц и следователно са абсолютно интегруеми.

От тези разсъждения по една теорема от теорията на Лебег'овия интеграл [2] следва, че $f(1, t)=g(1, t)+c$, където c е константа.

Нека за $x \neq 0$ положим в горното равенство $t=\frac{y}{x}$ Умножавайки двете страни на полученото равенство x и използувайки хомогенността, получаваме:

$$f(x, y)=g(x, y)+c|x| \qquad \text{за } x \neq 0.$$

От непрекъснатостта на функциите $f(x, y)$, $g(x, y)$ и $|x|$ следва, че $f(x, y)=g(x, y)+c|x|$ за всяка двойка (x, y).

Лема 3. Нека $f(x, y) \in K$. Ще покажем, че интегралът $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |s| \, df'_+(1, s)$ е сходящ.

На първо време ще покажем, че $\int\limits_0^{\infty} s df'_+(1, s)$ е сходящ. Образуваме си интеграла $\int\limits_0^{\varrho} s d f'_+(1, s)$ (той има смисъл, защото границите му са крайни, s е непрекъсната функция, а $f'_+(1, s)$ монотонно расте). Интегрираме по части:

$$\int_0^p s df'_+(1, s) = sf'_+(1, s)\Big|_0^p - \int_0^p f'_+(1, s)ds = pf'_+(1, p) - \int_0^p f'_+(1, s)\, ds.$$

Тъй като $f'_+(1, t) = f'(1, t)$ почти навсякъде, следва, че

$$\int_0^p f'_+(1, s)\, ds = f(1, p) - f(1, 0),$$

тогава
$$\int_0^p s df'_+(1, s) = pf'_+(1, p) - f(1, p) + f(1, 0).$$

Но $f'_-(1, t) \leq \frac{f(1, s)}{s}$ за $t \leq s$, а $\frac{f(1, s)}{s} \to f(0, 1)$, когато $s \to \infty$, следователно $f'_-(1, t) \leq f(0, 1)$. Но $f'_+(1, t)$ е монотонно растяща и почти навсякъде $f'_+(1, t) = f'_-(1, t)$, следователно $f'_+(1, t) \leqq f(0, 1)$.

Тогава

$$\int_0^p s df'_+(1, s) < pf(0, 1) - f(1, p) + f(1, 0).$$

От неравенството $f(0, p) < f(1, p) + f(-1, 0)$ следва, че $pf(0,1) - f(1, p)$ е ограничена отгоре и следователно интегралът $\int_0^\infty s df'_+(1, s)$ е сходящ. По аналогичен начин се доказва, че и интегралът $-\int_{-\infty}^0 s df'_+(1, s)$ е сходящ, откъдето следва сходимостта на търсения интеграл $\int_{-\infty}^\infty s\, |df'_+(1, s)$.

От сходимостта на този интеграл следва сходимостта на интеграла $\int_{-\infty}^\infty |y - sx|\, df'_+(1, s)$ за всяка двойка (x, y).

Очевидно е, че функцията

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^\infty |y - sx|\, d\, \frac{f'_+(1, s)}{2}$$

принадлежи на K.

Образуваме си израза

$$\frac{g(1, u + \varepsilon) - g(1, u)}{\varepsilon} = \frac{1}{2}\, \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^\infty \Big[|u + \varepsilon - s| - |u - s|\Big] df'_+(1, s)$$

$$= \int_{-\infty}^u \frac{1}{2} df'_+(1, s) + \frac{1}{\varepsilon} \int_u^{u+\varepsilon} \frac{1}{2} \Big[2(u - s) + \varepsilon\Big] df'_+(1, s) - \int_{u+\varepsilon}^\infty \frac{1}{2} df'_+(1, s)$$

От очевидните гранични преходи (за u точка на непрекъснатост на) $f'_+(1, s)$

$$\frac{g(1, u+\varepsilon)-g(1, u)}{\varepsilon} \underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}{\longrightarrow} g'_+(1, u)$$

$$\int_{-\infty}^{u}\frac{1}{2}\,df'_+(1, s) = \frac{1}{2}f'_+(1, u)-\frac{1}{2}f'_+(1, -\infty)$$

$$-\int_{u+\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{2}\,df'_+(1, s) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}f'_+(1, u)-\frac{1}{2}f'_+(1, \infty)$$

$$\left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{\varepsilon}\int_{u}^{u+\varepsilon}\Big[2(u-s)+\varepsilon\Big]df'_+(1, s)\right| \le \frac{1}{\varepsilon}\int_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon}|u-s|\,df'_+(1, s)$$

$$+\frac{1}{2}\int_{u}^{u+\varepsilon}df'_+(1, s) \le \int_{u}^{u+\varepsilon}df'_+(1, s) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

получаваме, че $g'_+(1, u)=f'_+(1, u)-\frac{1}{2}[f'_+(1, -\infty)+f'_+(1, \infty)]$ (почти навсякъде). Тъй като функцията $f(1, t)$ при $t\to\infty$ и $t\to-\infty$ има съответно асимптоти $f(0, 1)t+l_1$ и $-f(0, 1)t+l_2$, получаваме, че $f'_+(1, \infty)+f'_+(1, -\infty)=f(0, 1)+(-f(0, 1))=0$.

Тогава $f'_+(1, u)=g'_+(1, u)$ и по лема 2

$$f(x, y)=\int_{-\infty}^{\infty}|y-sx|\,d\,\frac{f'_+(1, s)}{2}+A\,|x|.$$

Остава да покажем, че константата A е неотрицателна. За целта използуваме изпъкналостта на функцията $f(x, y)$.

Нека $x>0$. Очевидно поради изпъкналостта на функцията $f(x, y)$ имаме неравенството

$$f(x, 1)+f(-x, 1)-f(0, 2)=\int_{-\infty}^{\infty}|1-sx|\,d\,\frac{f'_+(1, s)}{2}+A\,|x|$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}|1+sx|\,d\,\frac{f'_+(1, s)}{2}+A\,|x|\geqslant 0,$$

т. е.
$$2A\geqslant\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2-|1-sx|-|1+sx|}{x}\,d\,\frac{f'_+(1, s)}{2}.$$

Да положим

$$J(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2}{x}-\left|\frac{1}{x}-s\right|-\left|\frac{1}{x}+s\right|\right]d\,\frac{f'_+(1, s)}{2} \quad \text{и} \quad \frac{f'_+(1, s)}{2}=\alpha(s).$$

В такъв случай

$$J(x)=\int_{-\infty}^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{2}{x}+2s\right)d\alpha(s)+\int_{-\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x}}0\,d\alpha(s)+\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\left(\frac{2}{x}-2s\right)d\alpha(s).$$

Да оставим $x\to 0$; $x>0$, тогава $\int_{-\infty}^{-\frac{1}{x}} s d\alpha(s)$ и $\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} s d\alpha(s)$ клонят към нула поради сходимостта на интеграла $\int_{-\infty}^{\infty}|s|\,d\alpha(s)$. От друга страна $0\leq p[\alpha(\infty)-\alpha(p)]\leq\int_{p}^{\infty}s d\alpha(s)$, т. е. $p(\alpha(\infty)-\alpha(p))\underset{p\to\infty}{\longrightarrow}0$

и $0\geqslant -p[\alpha(-p)-\alpha(-\infty)]\geqslant\int_{-\infty}^{-p}s d\alpha(s)$, т. е. $-p[\alpha(-p)-\alpha(-\infty)]\underset{p\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Следователно $J(x)\to 0$ за $x\to$; $x>0$, откъдето следва, че $A\geqslant 0$.

Получените резултати могат да се формулират кратко в следната

Теорема. Всяка функция на две реални променливи $f(x,y)$, дефинирана за всяка двойка (x,y) от равнината и удовлетворяваща условията :

1) $$f(ax,ay)=|a|f(x,y)$$

за произволна двойка (x,y) и всяко реално a;

2) $$f(x_1+x_2,\ y_1+y_1)\leq f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2),$$

каквито и да са двойките (x_1,y_1) и (x_2,y_2),
допуска интегралното представяне

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}|y-sx|\,d\alpha(s)+A\,|x|,$$

където A е неотрицателна константа, а $\alpha(s)$ е монотонно растяща функция в интервала $(-\infty,\infty)$, за която интегралът $\int_{-\infty}^{\infty}|s|\,d\alpha(s)$ е сходящ.

*

Дължа да изкажа дълбоката си благодарност на моя учител проф. Я. Тагамлицки за интереса, който той събуди в мен към подобни въпроси, и за ценните напътствия, които ми даде в работата.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. L. W. V. Jensen. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta Math. 30, 1906, p. 175—193.
2. Вж. например И. П. Натансон. Теория функции вещественной переменной, Москва—Ленинград, 1950, Глава IX, § 2, стр. 216, теорема 2.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ

Д. Добрев

РЕЗЮМЕ

Пусть K множество функций двух переменных заданных во всей плоскости, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $f(ax, ay) = |a| f(x,y)$ (a — любое действительное число),

2) $f(x_1+x_2, y_1+y_2) \leq f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$.

Автор доказывает, что каждая функция $f(x, y)$, принадлежащая конусу K, представима в форме

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} |y - sx| \, d\alpha(s) + A|x|,$$

где A неотрицательная постоянная, а $\alpha(s)$ некоторая возрастающая в $(-\infty, \infty)$ функция, для которой интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |s| \, d\alpha(s)$ сходится. Здесь интегралы понимаются как несобственные.

Эта теорема дает решение в двуизмеримом случае едного вопроса Я. Тагамлицкого.

INTEGRALDARSTELLUNG EINER KLASSE VON FUNKTIONEN

D. Dobrev

ZUSAMMENFASSUNG

Es sei K die Menge aller in der ganzen Ebene definierten Funktionen zweier Veränderlichen, die homogen und konvex sind und folglich die Bedingungen.

$$f(ax, ay) = |a| f(x, y) \qquad (a \text{ reell})$$

und $f(x_1+x_2, y_1+y_2) \leqq f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$ erfüllen.

Es wird bewiesen, daß jede Funktion $f(x, y)$ aus K die Integraldarstellung

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} |y - sx| \, d\alpha(s) + A|x| \tag{1}$$

zuläß, wobei A eine nichtnegative reelle Konstante und $\alpha(s)$ eine nichtabnehmende Funktion in $(-\infty, \infty)$ ist, die die Bedingung $\int_{-\infty}^{\infty} |s| d\alpha(s) < \infty$ erfüllt. Das Stieltjes'sche Integral (1) ist in uneigentlichem Sinne zu verstehen.

Trivialerweise sind die Funktionen aus K nicht negativ.

Daß Funktionen die, die Darstellung (1) zulassen, zu K gehören, ist auch richtig, aber trivial.

Zum Beweis des Satzes wird die Funktion $\varphi(t) = f(1, t)$ studiert wobei $f(x, y) \epsilon K$. Diese Funktion ist konvex, also besitzt sie eine nicht abnehmende rechte Ableitung. Sie besitzt auch Asympthoten, sowohl bei $t \to \infty$, als auch bei $t \to -\infty$, woraus $\int_{-\infty}^{\infty} |s| d\varphi'_{+}(s) < \infty$ folgt.

Weiter wird bewiesen: wenn $f(x, y) \epsilon K$; $g(x, y) \epsilon K$ und $f'_{+}(1, t) = g'_{+}(1, t) + a$, dann ist $f(x, y) = g(x, y) + c|x|$ (a und c sind Konstanten).

Die beiden Funktionen $f(x,y)$ und $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |y-sx|\, da(s)$, wobei $a(s)=\frac{f'_{+}(1,s)}{2}$ ist, gehören zu K und die rechte Ableitungen von $f(1,t)$ und $\int\limits_{-\infty}^{\infty} t-s\; da(s)$ sind bis auf eine additive Konstante gleich.

Somit gelangt der Verfasser zur Darstellung:

$$f(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} |y-sx|\, da(s)+A\,|x|\,. \tag{1}$$

Endlich wird bewiesen, daß die Konstante A nicht negativ ist.

Zu besonderem Dank ist der Verfasser seinem Lehrer, Prof. J. Tagamlizki, verpflichtet, der in ihm Interesse für diese Probleme erweckt hat.