ВЪРХУ ЕДНО ДИФЕРЕНЦИАЛНО УРАВНЕНИЕ НА J. HALM

Бл. Долапчиев и Ив. Чобанов

1. J. Halm [1] интегрира в затворена форма линейното хомогенно диференциално уравнение от втори ред

$$(1) \qquad (1+x^2)^2\, y'' + (a\,x^2+b)\, y = 0$$

при следните условия за параметрите му a и b:

$$(2) \qquad a=0,\ b \text{ произволно,}$$

и

$$(3) \qquad 4a-4b-3=0,\ a \neq \frac{1}{4}\cdot$$

Решенията на Halm за тия случаи са съответно (вж. E. Kamke [2]; по-долу този източник е цитиран накратко с „ЕК“):

$$\frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = \begin{cases} C_1 \cos(a \operatorname{arc\,tg} x) + C_2 \sin(a \operatorname{arc\,tg} x), & \text{при } b+1=a^2>0, \\ C_1 + C_2 \operatorname{arc\,tg} x, & \text{при } b+1=0, \\ C_1 \operatorname{ch}(a \operatorname{arc\,tg} x) + C_2 \operatorname{sh}(a \operatorname{arc\,tg} x), & \text{при } b+1=-a^2<0, \end{cases}$$

(ЕК, уравнение 2.365) и

$$(4) \qquad \frac{y}{(1+x^2)^{1/4}} = \begin{cases} C_1 \cos X + C_2 \sin X \text{ при } X = \dfrac{\sqrt{4a-1}}{2} \ln(x+\sqrt{1+x^2}), \\ C_1 \operatorname{ch} X + C_2 \operatorname{sh} X \text{ при } X = \dfrac{\sqrt{1-4a}}{2} \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \end{cases}$$

(ЕК, уравнение 2.385). Освен това Halm интегрира в затворена форма и диференциалното уравнение

$$(1-x^2)^2\, y'' + by = 0$$

(ЕК, уравнение 2.369), частен случай (2) на формалния аналог

$$(5) \qquad (1-x^2)^2\, y'' + (ax^2+b)\, y = 0$$

на уравнението (1), с общ интеграл

$$v=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}\left[C_1\cos\left(a\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)+C_2\sin\left(a\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)\right] & \text{при } b-1=4a^2>0,\\ (x+1)\left[C_1\left|\frac{x+1}{x-1}\right|^{a-\frac{1}{2}}+C_2\left|\frac{x+1}{x-1}\right|^{-a-\frac{1}{2}}\right] & \text{при } b-1=-4a^2<0,\\ \sqrt{1-x^2}\left(C_1+C_2\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right) & \text{при } b=1.\end{cases}$$

Разглеждания, свързани с движението на идеален флуид при наличие на протичаща в него двустранно безкрайна, шахматна или симетрична вихрова конфигурация, наложиха [3] диференциалните уравнения:

$$4(1+x^2)^2\, y''+(ax^2+a-3)\, y=0 \tag{6}$$

с $a<\frac{1}{4}$ и

$$4(1-x^2)^2\, y''+(ax^2-a+3)\, y=0 \tag{7}$$

с $a<\frac{1}{4}$, т. е. диференциалното уравнение (1) с подслучая $a<\frac{1}{4}$ на (3) и подслучая $a<\frac{1}{4}$ на аналогичното на (3) условие

$$4a+4b-3=0$$

за параметрите a и b на диференциалното уравнение (5). Диференциалните уравнения (6) и (7) бяха получени при директното интегриране на системите диференциални уравнения на движението на флуида при протичаща в него шахматна, респ. симетрична вихрова конфигурация; уравнението (7) бе получено също така и при директното извеждане на уравненията на еквипотенциалните линии на движението на флуида както за шахматна, така и за симетрична вихрова конфигурация. По-точно, от системите диференциални уравнения на движението на флуида при наличие в него на шахматна, респ. симетрична вихрова улица, се получават рикатиевите диференциални уравнения

$$\frac{dv}{du}=\frac{m}{1+u^2}v^2+\frac{(1+2mn)u}{1+u^2}v-\frac{m+n+mn^2+mu^2}{1+u^2} \tag{8}$$

и

$$\frac{dv}{du}=\frac{m}{1-u^2}v^2-\frac{(1+2m\sqrt{1+n^2})u}{1-u^2}v+\frac{mn^2+\sqrt{1+n^2}+mu^2}{1-u^2}, \tag{9}$$

с

$$u=\sin\frac{\pi}{l}\xi,\quad v=\mathrm{sh}\frac{\pi}{l}\eta,\quad m=-\frac{2lU}{\Gamma\sqrt{1+n^2}}$$

за уравнението (8) и с

$$u=\cos\frac{\pi}{l}\xi,\quad v=\mathrm{ch}\frac{\pi}{l}\eta,\quad m=\frac{-2lU}{n\Gamma}$$

за уравнението (9), при

$$n = \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} h$$

за уравненията (8) и (9), където U = скорост на вихровата улица, h = широчина на вихровата улица, l = разстояние между два съседни вихра, Γ = вихрова циркулация, а с ξ и с η са означени координатите на произволна невихрова флуидна частица спрямо координатната система $[\Omega]$, неизменно свързана с вихровата конфигурация.

Чрез известната трансформация рикатиевите диференциални уравнения (8) и (9) бяха преобразувани съответно в линейните хомогенни диференциални уравнения от втори ред (6) и (7). Обстоятелството, че общият интеграл (4) на Halm'овото диференциално уравнение (1) с (3) е известен, позволи директното интегриране на системите диференциални уравнения на движението на флуида при протичащ в него шахматна вихрова улица, тъй като от (4) чрез обратната на въпросната трансформация се получава общият интеграл на (8).

Обратно, от обстоятелството, че общите интеграли на (8) и (9) са познати поради хидродинамични съображения (интеграли на комплексния потенциал в стационарния случай = линии на тока на движението на флуида), следва възможността, пак чрез въпросната трансформация, да се получат и общите интеграли на диференциалните уравнения (6) и (7) при $a < \frac{1}{4}$. Оказа се даже, че преходът от рикатиевите диференциални уравнения с познати общи интеграли към съответните линейни хомогенни диференциални уравнения от втори ред позволява при съображения от формален характер досежно вида на функциите, фигуриращи в рикатиевите уравнения, тези функции да се подберат по подходящ начин така, че да се получат нови случаи на релации между параметрите на хомогенните линейни диференциални уравнения от втори ред, в които рикатиевите уравнения се трансформират и в които случаи хомогенните линейни уравнения се интегрират в затворена форма. Този именно подход в настоящата работа илюстрираме върху диференциалното уравнение (1) на Halm. Да отбележим при това, че обикновено е възприета точно обратната практика — прави се обикновено опит именно рикатиевите диференциални уравнения да се интегрират, като се сведат към линейни хомогенни диференциални уравнения от втори ред, основавайки се на обстоятелството, че интегрирането на последните обикновено е свързано с по-малки затруднения.

2. Нека е известен интегралът $\varphi(\theta)$ на диференциалното уравнение

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = f_1(\theta)\varphi^2 + f_2(\theta)\varphi + f_3(\theta) \tag{10}$$

и нека $\theta = \lambda\psi$ (λ = константа, $\psi = \psi(x)$). При

$$\varphi(\theta) = z(x)\frac{d\psi}{dx}, \tag{11}$$

получаваме

$$\frac{d}{dx}\varphi(\theta)=\frac{d\varphi}{d\theta}\lambda\frac{d\psi}{dx}=\left[f_1(\theta)z^2\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2+f_2(\theta)z\frac{d\psi}{dx}+f_3(\theta)\right]\lambda\frac{d\psi}{dx}$$

$$=z'\frac{d\psi}{dx}+z\frac{d^2\psi}{dx^2}$$

или

$$z'=\lambda f_1(\theta)\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 z^2+\left[\lambda f_2(\theta)\frac{d\psi}{dx}-\frac{\frac{d^2\psi}{dx^2}}{\frac{d\psi}{dx}}\right]z+\lambda f_3(\theta). \tag{12}$$

Интегралът $z(x)$ на изобщо рикатиевото диференциално уравнение (12) е известен, стига $\psi(x)$ да е известна функция на x.

Както се знае от теорията на диференциалните уравнения, общото рикатиево диференциално уравнение

$$z'=F_1(x)z^2+F_2(x)z+F_3(x) \tag{13}$$

се преобразува чрез трансформацията

$$y(x)=e^{-\int F_1(x)z(x)dx+\frac{1}{2}\int F_4(x)dx} \tag{14}$$

с

$$F_4(x)=-\left\{\frac{F_1'(x)}{F_1(x)}+F_2(x)\right\}$$

в линейното хомогенно диференциално уравнение от втори ред

$$y''+\left[F_1(x)F_3(x)-\frac{1}{4}F_4^2(x)-\frac{1}{2}F_4'(x)\right]y=0, \tag{15}$$

което е еквивалентно с уравнението (13) в смисъл, че всеки интеграл на (13) се трансформира чрез (14) в нетривиален интеграл на (15) и обратно, на всеки нетривиален интеграл на (15) съответствува чрез обратната трансформация на (14) интеграл на (13).

За уравнението (12) имаме

$$F_1(x)=\lambda f_1(\theta)\left(\frac{d\psi}{ax}\right)^2,\qquad F_2(x)=\lambda f_2(\theta)\frac{d\psi}{dx}-\frac{\frac{d^2\psi}{dx^2}}{\frac{d\psi}{dx}},\qquad F_3(x)=\lambda f_3(\theta).$$

Тогава

$$F_4(x)=-\left[\lambda\frac{\frac{df_1(\theta)}{d\theta}}{f_1(\theta)}\frac{d\psi}{dx}+\frac{\frac{d^2\psi}{dx^2}}{\frac{d\psi}{dx}}+\lambda f_2(\theta)\frac{d\psi}{dx}\right]$$

и

$$F_4'(x) = -\left[\lambda^2 \frac{\frac{d^2 f_1(\theta)}{d\theta^2} f_1(\theta) - \left(\frac{d f_1(\theta)}{d\theta}\right)^2}{f_1^2(\theta)} \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \lambda \frac{\frac{d f_1(\theta)}{d\theta}}{f_1(\theta)} \frac{d^2\psi}{dx^2}\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{d^3\psi}{dx^3}\frac{d\psi}{dx} - \left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2} + \lambda^2 \frac{d f_2(\theta)}{d\theta}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \lambda f_2(\theta)\frac{d^2\psi}{dx^2}\right].$$

Така уравнението (15), съответно на уравнението (12) чрез (14), става

$$y'' + y\left\{\lambda^2 f_1(\theta) f_3(\theta)\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 - \frac{3}{4}\lambda^2\left[\frac{\frac{d f_1(\theta)}{d\theta}}{f_1(\theta)}\right]^2\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{\frac{d^2\psi}{dx^2}}{\frac{d\psi}{dx}}\right)^2\right.$$

$$(16)\qquad -\frac{\lambda^2}{4} f_2^2(\theta)\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{2}\cdot\frac{\frac{d f_1(\theta)}{d\theta}}{f_1(\theta)} f_3(\theta)\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{2}\cdot\frac{d^2 f_1(\theta)}{d\theta^2}\cdot\frac{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2}{f_1(\theta)}$$

$$\left. + \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{d^3\psi}{dx^3}}{\frac{d\psi}{dx}} + \frac{\lambda^2}{2}\cdot\frac{d f_2(\theta)}{d\theta}\left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2\right\} = 0.$$

В уравнението (16) можем да разполагаме с функциите $f_i(\theta)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ и $\psi(x)$ по такъв начин, че (16) евентуално да принадлежи към отнапред избрана класа линейни хомогенни диференциални уравнения от втори ред. По-специално $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ могат да бъдат произволни, ако $f_3(\theta)=0$, понеже в този случай уравнението (10) е бернулиево или линейно и следователно винаги можем да намерим негов интеграл $\varphi(\theta)$. Ако напротив, $f_3(\theta) \neq 0$, функциите $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ могат да бъдат произволни дотолкова, доколкото е известен интеграл на уравнението (10).

3. Ще покажем, че е възможно функциите $f_i(\theta)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ и $\psi(x)$ да се подберат по такъв начин, че уравнението (16) да принадлежи към класата на Halm'овите диференциални уравнения (1) при някои нови връзки между параметрите a и b.

Нека

$$(17)\qquad f_1(\theta) = f_3(\theta) = 1, \quad f_2(\theta) = 0.$$

В този случай уравнението (10) се удовлетворява от функцията

$$\varphi(\theta) = \operatorname{tg}\theta.$$

Тогава уравнението (15) става

$$y''+y\left\{\lambda^2\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2-\frac{3}{4}\left(\frac{\frac{d^2\psi}{dx^2}}{\frac{d\psi}{dx}}\right)^2+\frac{1}{2}\,\frac{\frac{d^3\psi}{dx^3}}{\frac{d\psi}{dx}}\right\}=0. \tag{18}$$

Ако положим

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{1}{\sqrt{px^2+qx+r}}, \tag{19}$$

уравнението (18) приема вида

$$4\,(px^2+qx+r)^2y''+\left[\mu\,(px^2+qx+r)+\frac{3}{4}\,(q^2-4\,pr)\right]y=0, \tag{20}$$

дето

$$\mu=p+4\lambda^2>p. \tag{21}$$

Нека

$$-f_1(\theta)=f_3(\theta)=1,\quad f_2(\theta)=0. \tag{22}$$

В този случай уравнението (10) се удовлетворява от функцията

$$\varphi(\theta)=th\,\theta.$$

Тогава уравнението (15) става

$$y''+y\left\{-\lambda^2\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2-\frac{3}{4}\left(\frac{\frac{d^2\psi}{dx^2}}{\frac{d\psi}{dx}}\right)^2+\frac{1}{2}\,\frac{\frac{d^3\psi}{dx^3}}{\frac{d\psi}{dx}}\right\}=0. \tag{23}$$

Уравнението (23) се получава формално от уравнението (18) със смяна на константата λ^2 с $-\lambda^2$. При условието (19) следователно уравнението (23) приема вида (20), но при новото условие

$$\mu=p-4\lambda^2<p. \tag{24}$$

Нека

$$f_1(\theta)=-1,\quad f_2(\theta)=f_3(\theta)=0. \tag{25}$$

В този случай уравнението (10) се удовлетворява от функцията

$$\varphi(\theta)=\frac{1}{\theta}. \tag{26}$$

Сега уравнението (15) става

$$y''+y\left[-\frac{3}{4}\left(\frac{\frac{d^2\psi}{dx^2}}{\frac{d\psi}{dx}}\right)^2+\frac{1}{2}\,\frac{\frac{d^3\psi}{dx^3}}{\frac{d\psi}{dx}}\right]=0. \tag{27}$$

Ако положим

$$\frac{d\psi}{dx}=(px^2+qx+r)^{\nu}, \tag{28}$$

уравнението (27) приема вида

$$4(px^2+qx+r)^2y''+\Big[-4p\nu(\nu+1)(px^2+qx+r) \tag{29}$$
$$+\nu(\nu+2)(4pr-q^2)\Big]y=0.$$

Общите интеграли на уравненията (20) с връзките (21) и (24), и на уравнението (29) се получават поради условието (11) от интегралите

$$z(x)=\sqrt{px^2+qx+r}\,\mathrm{tg}\,(\lambda\psi),$$
$$z(x)=\sqrt{px^2+qx+r}\,\mathrm{th}\,(\lambda\psi),$$

с

$$\psi=\int\frac{dx}{\sqrt{px^2+qx+r}}$$

на рикатиевото уравнение (12) съответно с условията (17) и (22), т. е. на уравненията

$$z'=\frac{\lambda}{px^2+qx+r}z^2+\frac{1}{2}\,\frac{2px+q}{px^2+qx+r}z\pm\lambda$$

и от интеграла

$$z=\frac{1}{\lambda\psi\,(px^2+qx+r)^\nu}$$

с

$$\psi=\int(px^2+qx+r)^\nu dx$$

на бернулиевото диференциално уравнение (12) с условието (25), т. е. на уравнението

$$z'=-\lambda(px^2+qx+r)^{2\nu}z^2-\frac{\nu(2px+q)}{px^2+qx+r}z.$$

Тези общи интеграли са съответно

$$y=(C_1\cos\lambda\psi+C_2\sin\lambda\psi)(px^2+qx^2+r)^{\frac{1}{4}},$$
$$y=(C_1\,\mathrm{ch}\,\lambda\psi+C_2\,\mathrm{sh}\,\lambda\psi)(px^2+qx+r)^{\frac{1}{4}},$$
$$y=\Big[C_1\int(px^2+qx+r)^\nu dx+C_2\Big](px^2+qx+r)^{-\frac{\nu}{2}}.$$

4. От уравнението (20) с условията (21) и (24) се получава при $p=r=1$ и $q=0$ разгледаният от Halm случай (3) на уравнението (1), т. е. уравнението

$$4(x^2+1)^2y''+(\mu x^2+\mu-3)y=0 \tag{30}$$

с общ интеграл (4) при $4a=\mu$.

От уравнението (29) се получава при $p=r=1$, $q=0$ уравнението

(31) $$(1+x^2)^2y''+[-\nu(\nu+1)x^2+\nu]y=0,$$

т. е. неразгледаният от Halm случай на връзката

(32) $$a+b+b^2=0$$

между параметрите на уравнението (1). Общият интеграл на уравнението (31) е

(33) $$y=(1+x^2)^{-\frac{\nu}{2}}\left[C_1\int(1+x^2)^\nu\,dx+C_2\right].$$

Специално при $\nu=-\frac{1}{2}$ от уравнението (31) се получава диференциалното уравнение

(34) $$4(1+x^2)^2y''+(x^2-2)y=0,$$

т. е. изключеният от Halm случай $a=\frac{1}{4}$ в уравнението (1) с (3), с общ интеграл

(35) $$y=(1+x^2)^{\frac{1}{4}}\left[C_1\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C_2\right].$$

При $\nu=-\frac{1}{2}$ от уравнението (29) се получава неразгледаният случай $\mu=p$ в уравнението (20) с общ интеграл

$$y=(px^2+qx+r)^{\frac{1}{4}}\left[C_1\int\frac{dx}{\sqrt{px^2+qx+r}}+C_2\right].$$

От уравнението (20) при $p=-r=1$, $q=0$ се получава уравнението

(36) $$(x^2-1)^2y''+[-\nu(\nu+1)x^2-\nu]y=0,$$

т. е. случаят

(37) $$a-b+b^2=0$$

на уравнението (5) с общ интеграл

(38) $$y=(x^2-1)^{-\frac{\nu}{2}}\left[C_1\int(x^2-1)^\nu\,dx+C_2\right].$$

При $-p=r=1$, $q=0$ от уравнението (20) се получава пак уравнението (36) с условието (37), при общ интеграл

(39) $$y=(1-x^2)^{-\frac{\nu}{2}}\left[C_1\int(1-x^2)^\nu\,dx+C_2\right].$$

Случаите $|x|>1$ и $|x|<1$, т. е. (38) и (39) могат да се обединят така:

$$y=|1-x^2|^{-\frac{\nu}{2}}\left[C_1\int|1-x^2|^{\nu}dx+C_2\right].$$

За $p=-r=1$ и $q=0$ от уравнението (20) с условията (21) и (24) се получава аналогът

$$4(x^2-1)^2y''+(\mu x^2-\mu+3)y=0 \tag{40}$$

на уравнението (30), който се яви при разглеждане линиите на тока за движение на флуид с протичаща в него двустранно безкрайна симетрична вихрова улица, както и при еквипотенциалните линии за движението на флуид при наличие на протичаща в него симетрична и шахматна вихрова улица. Общият интеграл на уравнението (40) при $|x|>1$ е

$$\frac{y}{(x^2-1)^{1/4}}=\begin{cases} C_1\cos\lambda\psi+C^2\sin\lambda\psi & \text{за } \mu>1,\\ C_1\psi+C_2 & \text{за } \mu=1,\\ C_1\operatorname{ch}\lambda\psi+C_2\operatorname{sh}\lambda\psi & \text{за } \mu<1,\end{cases} \tag{41}$$

с

$$\psi=\ln(x+\sqrt{x^2-1}).$$

При $|x|<1$ общият интеграл на уравнението (40) е пак (41), но с $(1-x^2)^{\frac{1}{4}}$ вместо с $(x^2-1)^{\frac{1}{4}}$ и с $\mu\leq 1$ вместо с $\mu\gtreqless 1$, при

$$\psi=\arcsin x.$$

Аналогията между диференциалните уравнения (30) и (40) се простира и до интегралите им (4) и (41) и се дължи очевидно на общото уравнение (20), от което (30) и (40) са частни случаи, което има отражение и в свързаната с уравненията (30) и (40) хидродинамична задача.

Интегрирането на уравнението (40) може да се постигне и като се съобрази, че трансформацията

$$y(x)=(x^2-1)^{\frac{1}{4}}w(s),\quad s=\frac{x+1}{2} \text{ при } |x|>1$$

свежда уравнението (40) до хипергеометричното диференциално уравнение

$$H\left(\varrho,-\varrho,\frac{1}{2};\ w,s\right)=0 \tag{42}$$

(означение по ЕК, уравнение 2.260), в който случай (42) се интегрира в затворена форма.

5. Ако в случаите (17) и (22) се положи

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{1}{px^2+qx+r},$$

от уравненията (18) и (23) се получава диференциалното уравнение

$$(px^3+qx+r)^2y''+\tau y=0 \tag{43}$$

при

(44) $$\tau = \pm \lambda^2 + \frac{1}{4}(q^2 - 4pr)$$

с общ интеграл съответно

$$\frac{y}{\sqrt{px^2+qx+r}} = \begin{cases} C_1 \cos \lambda\psi + C_2 \sin \lambda\psi & \text{при } \tau > \frac{1}{4}(q^2 - 4pr), \\ C_1 \operatorname{ch} \lambda\psi + C_2 \operatorname{sh} \lambda\psi & \text{при } \tau < \frac{1}{4}(q^2 - 4pr), \end{cases}$$

и при

$$\psi = \int \frac{dx}{px^2+qx+r}.$$

Случаят

(45) $$\tau = \frac{1}{4}(q^2 - 4pr)$$

с общ интеграл

$$y = (px^2+qx+r)^{\frac{1}{2}}\left[C_1 \int \frac{dx}{px^2+qx+r} + C_2\right]$$

се получава от уравнението (29) при $\nu = -1$.

Уравнението (43) с (44) включва както уравненията ЕК 2.382 (Halphen) и 2.369, така и уравненията (1) с (2) и

$$(1-x^2)^2 y'' + by = 0$$

на Halm. Последните две уравнения се получават от (43) съответно при $p = r = 1$, $q = 0$ и при $p = -r = 1$, $q = 0$.

6. При (26), но с

(46) $$\frac{d\psi}{dx} = (x^2+\varepsilon)^{\nu} x^{-2}, \quad \varepsilon = \pm 1$$

вместо с (28) получаваме диференциалното уравнение

(47) $$(x^2+\varepsilon)^2 y'' + y\,[\nu(\nu-1)x^2 + 3\varepsilon\nu] = 0,$$

с общ интеграл

(48) $$y = (x^2+\varepsilon) \quad x \left[C_1 \int (x^2+\varepsilon)^{\nu} x^{-2} dx + C_2\right]$$

за $|x| > 1$ при $\varepsilon = -1$. При $\varepsilon = -1$, но $|x| < 1$, интегрирането на уравнението (47) се постига при

(49) $$\frac{d\psi}{dx} = (1-x^2)^{\nu} x^{-2}$$

вместо при (46). В този случай общият интеграл на уравнението (47) е

$$y = (1-x^2)^{-\frac{\nu}{2}} x \left[C_1 \int (1-x^2)^{\nu} x^{-2} dx + C_2\right].$$

Следователно случаите $|x|>1$ и $|x|<1$ при $\varepsilon=-1$ могат да се обединят по отношение на общия интеграл така

$$y=|1-x^2|^{-\frac{\nu}{2}}|x|\left[C_1\int|1-x^2|^{\nu}x^{-2}dx+C_2\right]. \tag{50}$$

При $\varepsilon=1$ уравнението (48) е от Halm'ов тип (1) с

$$9a-3b+b^2=0, \tag{51}$$

а при $\varepsilon=-1$ — от тип (5) с $9a+b^2+3b=0$.

Разглежданията в настоящата точка могат да се обобщят по начин, който едновременно дава резултатите (48) за $\varepsilon=1$ и (50) за $\varepsilon=-1$. За целта е достатъчно да се положи

$$\frac{d\psi}{dx}=(px^2+qx+r)^{\nu}(2px+q)^{-2}$$

при (26). Тогава се получава диференциалното уравнение

$$\begin{aligned}4(px^2+qx+r)^2y''+y\,[4p\nu(1-\nu)(px^2+qx+r)\\+\nu(\nu+2)(4pr-q^2)]=0,\end{aligned} \tag{52}$$

от което при $p=1$, $q=0$, $r=\varepsilon$ се получава уравнението (47). Същото уравнение се получава от горното и при $p=-1$, $q=0$, $r=1$, с които полагания си служим при интегрирането за $|x|<1$.

Общият интеграл на уравнението (52) е

$$y=(px^2+qx+r)^{-\frac{\nu}{2}}(2px+q)\left[C_1\int(px^2+qx+r)^{\nu}(2px+q)^{-2}\,dx+C_2\right],$$

от който при горните стойности на p, q, r се получават интегралите на уравнението (47)

7. Halm интегрира диференциалните уравнения

$$y''+Ay'\operatorname{th}x+By=0 \tag{53}$$

и

$$y''+Ay'\operatorname{tg}x+By=0 \tag{54}$$

(ЕК, уравнения 2.64 и 2.70) съответно за $A=2$ и за $A=-2$.

Посредством субституциите

$$y(x)=\eta(\xi),\quad \xi=\operatorname{sh}x \tag{55}$$

и респ.

$$y(x)=\eta(\xi),\quad \xi=\sin x, \tag{56}$$

уравненията (53) и (54) се трансформират съответно в

$$(\xi^2+1)\eta''+(A+1)\xi\eta'+B\eta=0 \tag{57}$$

и

$$(\xi^2-1)\eta''+(1-A)\xi\eta'-B\eta=0. \tag{58}$$

При

$$\eta=\zeta e^{-\frac{A+1}{2}\int\frac{\xi d\xi}{\xi^2+1}}=\zeta(1+\xi^2)^{-\frac{A+1}{4}} \tag{59}$$

диференциалното уравнение (57) става

(60) $$4(\xi^2+1)^2\,\zeta''+\zeta\,\left[(1+4B-A^2)\,\xi^2+(1+4B-2A)-3\right]=0,$$

което е от типа на Halm'овото диференциално уравнение (1).

Вижда се, че при $A=2$ уравнението (60) става

(61) $$4(\xi^2+1)^2\,\zeta''+(\beta\,\xi^2+\beta-3)\,\zeta=0,$$

т. е. точно (1) с (3), при

$$\beta=4B-3.$$

Понеже интегралът на (61) в този случай е познат, в състояние сме да намерим и интеграла на (53) посредством (59) и (55). Този интеграл е

$$y\operatorname{ch}x=\begin{cases}C_1\cos\alpha x+C_2\sin\alpha x & \text{при } B-1=\alpha^2>0,\\ C_1\operatorname{ch}\alpha x+C_2\operatorname{sh}\alpha x & \text{при } B-1=-\alpha^2<0.\end{cases}$$

Случаят $\alpha=0$, т. е. $B=1$ в уравнението (53) при $A=2$ в решението на Halm не е разгледан. Да припомним, че този случай беше пропуснат и в дадения от Halm интеграл (4) на уравнението (1) с (3). Но съгласно намереното в т. 4 интегралът на (61) в този случай е (срв. (34)).

$$\zeta=(1+\xi^2)^{\frac{1}{4}}\left[C_1\ln(\xi+\sqrt{1+\xi^2})+C_2\right]$$

Съгласно (59) получаваме

$$\eta=(1+\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\left[C_1\ln(\xi+\sqrt{1+\xi^2})+C_2\right],$$

което поради (55) дава общия интеграл на уравнението (53) и за случая $A=2$, $B=1$:

$$y=(\operatorname{ch}x)^{-1}\,(C_1x+C_2).$$

Да приложим върху уравнението (60) резултата на Halm за интегрирането на уравнението (1) с (2). Полагаме

$$1+4B-A^2=0,\ \text{т. е.}\ B=\frac{A^2-1}{4}$$

Тогава уравнението (60) става

(62) $$(1+\xi^2)^2\zeta''+D\,\zeta=0$$

при

$$D=\frac{A^2-2A-3}{4},$$

т. е. за $D\geqq-1$ при реални стойности на A. В този случай общият интеграл на уравнението (62) е

$$\frac{\zeta}{\sqrt{1+\xi^2}}=\begin{cases}C_1\cos(\alpha\operatorname{arc\,tg}\xi)+C_2\sin(\alpha\operatorname{arc\,tg}\xi)\\ \qquad\qquad\text{при } \alpha^2=D+1>0\\ C_1+C_2\operatorname{arc\,tg}\xi \ \text{ при } D=-1.\end{cases}$$

Поради (59) имаме

$$\frac{\eta}{(1+\xi^2)^{\frac{1-A}{4}}} = \begin{cases} C_1 \cos(\alpha \operatorname{arc\,tg} \xi) + C_2 \sin(\alpha \operatorname{arc\,tg} \xi) \\ \qquad \text{при } \alpha^2 = D+1 > 0, \\ C_1 + C_2 \operatorname{arc\,tg} \xi \ \text{ при } D = -1. \end{cases} \tag{63}$$

От (63) въз основа на (55) получаваме интеграла

$$y = (\operatorname{ch} x)^{\frac{1-A}{2}} \begin{cases} C_1 \cos(\alpha \operatorname{arc\,tg} \operatorname{sh} x) + C_2 \sin(\alpha \operatorname{arc\,tg} \operatorname{sh} x) \\ \qquad \text{при } \alpha^2 = D+1 > 0, \\ C_1 + C_2 \operatorname{arc\,tg} \operatorname{sh} x \ \text{ при } D = -1, \text{ т. е. } A = 1 \end{cases}$$

на (53) и при връзката

$$1 + 4B - A^2 = 0$$

между параметрите A и B на това уравнение.

8. Обстоятелството, че в т. 4 и 6 получихме общите интеграли на уравнението (1) при връзките

$$a + b + b^2 = 0 \tag{32}$$

и

$$9a + b^2 - 3b = 0 \tag{51}$$

между параметрите a и b на уравнението (1), а именно (33) и (48) с $\varepsilon = 1$, позволява да се получат общите интеграли на уравнението (53) на Halm и за други случаи освен разгледаните $A = 2$ и $1 + 4B - A^2 = 0$. На връзката (32) съответствува релацията

$$B + B^2 - AB = 0, \text{ т. е. } B = 0 \text{ и } 1 + B - A = 0 \tag{64}$$

между параметрите A и B на уравнението (53), а на връзката (51)— релацията

$$4 + 5B - 2A^2 + B^2 - AB + 2A = 0. \tag{65}$$

В случая (64) общият интеграл на уравнението (60) съгласно (33) е

$$\zeta = (1+\xi^2)^{\frac{1}{4}(1+A-2B)} \left[C_1 \int (1+\xi^2)^{\frac{1}{2}(2B-A-1)} \, d\xi + C_2 \right],$$

следователно съгласно (59)

$$\eta = (1+\xi^2)^{-\frac{B}{2}} \left[C_1 \int (1+\xi^2)^{\frac{1}{2}(B-A-1)} \, d\xi + C_2 \right]$$

и съгласно (55)

$$y = (\operatorname{ch} x)^{-B} \left[C_1 \int (1+\xi^2)^{\frac{1}{2}(B-A-1)} \, d\xi + C_2 \right]$$

с $\xi = \operatorname{sh} x$.

В случая (65) общият интеграл на уравнението (60) съгласно (48) с $\varepsilon = 1$, е

$$\zeta=|\xi|\ (1+\xi^2)^{-\frac{3}{2}B}\left[C_1\int(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}(2B-A-1)}\ \xi^{-2}\,d\,\xi+C_2\right],$$

следователно съгласно (59)

$$\eta=|\xi|\ (1+\xi^2)^{-\frac{3}{2}B-\frac{A+1}{4}}\left[C_1\int(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}(2B-A-1)}\ \xi^{-2}\,d\,\xi+C_2\right]$$

и съгласно (55)

$$y=|\operatorname{sh}x|\,(\operatorname{ch}x)^{-\frac{A+1-6B}{2}}\left[C_1\int(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}(2B-A-1)}\ \xi^{-2}\,d\,\xi+C_2\right]$$

с $\xi=\operatorname{sh}x$.

9. При

(66) $$\eta=\zeta e^{\frac{A-1}{2}\int\frac{\xi\,d\,\xi}{\xi^2-1}}=\zeta\,|\,\xi^2-1\,|^{\frac{A-1}{4}}$$

уравнението (58) става

(67) $$4\,(\xi^2-1)^2\ \zeta''+\zeta\ \left[(1-4\,B-A^2)\ \xi^2+(4\,B-2\,A-1)+3\right]=0$$

Вижда се, че при $A=-2$ уравнението (67) става

(68) $$4\,(\xi^2-1)^2\,\zeta''+\zeta\ \ (\beta'\xi^2+3-\beta')=0$$

$$\beta'=-(4\,B+3),$$

т. е. (40). Поради $\xi=\sin x$, имаме $|\,\xi\,|\leqq 1$. Тогава съгласно (41) общият интеграл на (68) е

$$\frac{\zeta}{(1-\xi_2)^{1/4}}=\begin{cases}C_1\ \cos\lambda\,x+C_2\ \sin\lambda\,x & \text{за } \beta'<1,\\ C_1\ \ x+C_2 & \text{за } \beta'=1,\\ C_1\ \operatorname{ch}\lambda\,x+C_2\ \operatorname{ch}\lambda\,x & \text{за } \beta'>1,\end{cases}$$

с

$$\lambda=\frac{\sqrt{\beta'-1}}{2}\ \text{ за } \beta'>1\ \text{ и } \lambda=\frac{\sqrt{1-\beta'}}{2}\ \text{ за } \beta'<1,$$

т. е. поради (66) и (56)

$$\frac{y}{|\cos x\,|}=\begin{cases}C_1\ \cos\lambda\,x+C_2\ \sin\lambda\,x & \text{за } \beta'<1,\\ C_1\ \ x+C_2 & \text{за } \beta'=1,\\ C_1\ \operatorname{ch}\lambda\,x+C_2\operatorname{sh}\lambda\,x & \text{за } \beta'>1.\end{cases}$$

Да приложим върху уравнението (67) резултатите, свързани с уравнението (43) при $-p=r=1$, $q=0$, за $\tau\leq 1$. Сега общият интеграл на (43) при $\tau<1$ е

$$y=\sqrt{1-x^2}\left[C_1\operatorname{ch}\left(\lambda\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)+C_2\operatorname{sh}\left(\lambda\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\right],$$

а при $\tau=1$

$$y=\sqrt{1-x^2}\left[C_1\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C_2\right].$$

Уравнението (67) става от вида (43) при

(69) $$1-4B-A^2=0.$$

Ако положим

$$D'=\frac{4B-2A+2}{4}=\frac{3-A^2-2A}{4},$$

то $D'\leq 1$ при реални стойности на A. Следователно, поради (66) и (56) общият интеграл на уравнението (54) при релацията (69) между параметрите A и B е

$$y=(1-\xi^2)^{\frac{A+1}{4}}\left[C_1\ \mathrm{ch}\left(\lambda\ln\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\right)+C_2\,\mathrm{sh}\left(\lambda\ln\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\right)\right]$$

$$=(\cos x)^{\frac{A+1}{4}}\left[C_1\,\mathrm{ch}\left(\lambda\ln\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\right)+C_2\,\mathrm{sh}\left(\lambda\ln\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\right)\right]$$

за $D'<1$, т. е. за

$$3-A^2-2A<4 \text{ или } A\neq-1.$$

За $D'=1$, т. е. за

$$3-A^2-2A=4, \text{ т. е. } (A+1)^2=0 \text{ или } A=-1$$

общият интеграл на уравнението (54) е

$$y=C_1\ln\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}+C_2.$$

10. Обстоятелството, че в т. 4 и 6 получихме общите интеграли на уравнението (5) при връзките

(37) $$a-b+b^2=0$$

и

(70) $$9a+b^2+3b=0$$

между параметрите a и b на (5), а именно (38) и (50), позволява да се получат общите интеграли на уравнението (54) на Halm и за други случаи, освен за разгледаните $A=-2$ и $1-4B-A^2=0$. На връзката (37) съответствува релацията

(71) $$B^2-AB-B=0, \text{ т. е. } B=0 \text{ и } B-A-1=0$$

между параметрите A и B на уравнението (54), а на връзката (70)— релацията

(72) $$4-5B-2A^2+B^2-AB-2A=0.$$

В случая (71) общият интеграл на уравнението (67) съгласно (38) е

$$\zeta=(1-\xi^2)^{\frac{2B-A+1}{4}}\left[C_1\int(1-\xi^2)^{\frac{A-2B-1}{2}}d\xi+C_2\right],$$

следователно, съгласно (66) и (56) общият интеграл на уравнението (54) в този случай е

$$y=|\cos x|^{B}\left[C_1\int|1-\xi^2|^{\frac{A-2B-1}{2}}d\xi+C_2\right]$$

с $\xi=\sin x$.

В случая (72) общият интеграл на уравнението (67), съгласно (38), е

$$=|1-\xi^2|^{-\frac{3}{2}B}\left[C_1\int|1-\xi^2|^{\frac{3}{2}(2B-A+1)}\xi^{-2}\,d\xi+C_2\right],$$

следователно, съгласно (66) и (56) общият интеграл на уравнението (54) в този случай е

$$y=|\sin x|\,|\cos x|^{\frac{A-1-6B}{2}}\left[C_1\int|1-\xi^2|^{\frac{3}{2}(2B-A+1)}\xi^{-2}\,d\xi+C_2\right]$$

пак с $\xi=\sin x$.

Постъпила на 13. 7. 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Halm. Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 41 (1906).
2. E. Kamke. Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. 1, Leipzig 1951.
3. Бл. Долапчиев и Ив. Чобанов. Върху интегралите на движение на идеален флуид при наличие на Кармановн вихрови улици, Известия на Математическия институт на БАН, т. II, кн. 2 (1957), 181—221.

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ HALM'A

Бл. Долапчиев и Ив. Чобанов

РЕЗЮМЕ

Исходя из некоторых гидродинамических фактов, связанных с движением идеального флюида в присутствии двусторонне бесконечной, шахматной или симметричной, вихревой дорожки, и принимая во внимание структуру дифференциальных уравнений Riccati, к которым это движение флюида ведет, в предлагаемой работе находятся в замкнутой форме интегралы дифференциального уравнения

(1) $$(1+x^2)^2 y''+(ax^2+b)y=0.$$

Halm'a, решенного последным в случаях $a=0$ и $a=b+3$, для других зависимостях между параметрами a и b и этим делается приложение в специальных случаях одного метода решения однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка при некоторых зависимостях между параметрами последних, причем предварительно конструируются подходящие дифференциальные уравнения Riccati с известными интегралами, после чего производится преобразование этих уравнений до соответствующих линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Метод иллюстрирован еще примером аналога

(2) $$(1-x^2)^2 y''+(ax^2+b)y=0$$

дифференциального уравнения (1) Halm'a и др., и сделаны приложения со сродными уравнениями, ведущими к уравнениям (1) и (2) посредством подходящих преобразований. Получены новые случаи, при которых можно интегрировать эти уравнения в замкнутой форме, и даны некоторые обобщения.

ÜBER EINE DIFFERENTIALGLEICHUNG VON J. HALM

Bl. Dolaptschiew und Iv. Tschobanow

ZUSAMMENFASSUNG

Von gewissen hydrodynamischen Tatsachen ausgehend, die mit der Bewegung der idealen Flüssigkeit bei Anwesenheit einer zweiseitig unendlichen, schachbrettartigen oder symmetrischen Wirbelstraße verbunden sind, und die Struktur der Riccatischen Differentialgleichungen berücksichtigend, auf welche diese Flüssigkeitsbewegung zurückführt, werden Integrale der Differentialgleichung von J. Halm

$$(1+x^2)^2 y'' + (ax^2+b)y = 0 \tag{1}$$

in geschlossener Form, die nur in den Fällen $a=0$ und $a=b+3$ von Halm gelöst ist, auch für andere Beziehungen zwischen den Parametern a und b gesucht. Dadurch wird eine Methode angewandt, die zur Lösung homogener linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung dient, bei gewissen Zusammenhängen zwischen ihren Parametern, wobei von vornherein geeigneten Riccatischen Differentialgleichungen mit bekannten Integralen konstruiert werden, auf welche die Transformation zu den entsprechenden homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung angewendet wird.

Diese Methode ist auch durch das Analogon

$$(1-x^2)^2 y'' + (a\,x^2+b)y = 0 \tag{2}$$

der Halmschen Differentialgleichung (1) illustriert, indem Anwendungen auf verwandte Differentialgleichungen, die durch geeigneten Transformationen durch (1) und (2) zurückführen, gemacht werden.

Es werden neue Fälle erhalten, bei denen diese verwandten Differentialgleichungen auch in geschlossener Form gelöst werden, und manche Verallgemeinerungen gegeben.