# ВЪРХУ ЕДИН ТИП РЕГУЛЯРНО МОНОТОННИ ФУНКЦИИ

**Благовест Сендов**

В редица свои работи С. Н. Бернщайн изучава свойствата на дефинираните от него регулярно монотонни функции [1]. Функцията $f(x)$, дефинирана и безбройно много пъти диференцируема в интервала $[a, b]$, се нарича регулярно монотонна, ако тя и производните ѝ не си изменят знака в казания интервал.

Да положим

$$\varepsilon_n = \operatorname{sgn} f^{(n)}(x)\,;\ a < x \leq b,\ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Редицата $\varepsilon$ от числата

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots,\ \varepsilon_n, \ldots$$

определя, тъй да се каже, типа на регулярно монотонната функция $f(x)$.

Тук ще се занимаем с такива регулярно монотонни функции, за които съответната редица $\varepsilon$ е периодична, т. е. съществува такова цяло положително число $q$, че

$$(1) \qquad \varepsilon_{n+q} = \varepsilon_n\,;\ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Най-малкото цяло положително число $q$, което удовлетворява условието (1), ще наричаме период на редицата $\varepsilon$. За абсолютно монотонните функции [2], за циклично монотонните [3] и функциите от класата $Ц_2(a, b)$[4] на С. Н. Бернщайн, редицата $\varepsilon$ е периодична.

## § 1

Нека ни е дадена една произволна периодична редица $\varepsilon$ от числата

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots,\ \varepsilon_n, \ldots,$$

които приемат само стойностите 1 и $-1$, и нека $q$ е съответният период. С $K_\varepsilon$ ще означим съвкупността от функциите $f(x)$, които са дефинирани, ограничени, безбройно много пъти диференцируеми в отворения интервал (0, 1) и удовлетворяват условията

$$\varepsilon_n f^{(n)}(x) \geqq 0$$

при $0 < x < 1$, $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ Без да ограничаваме общността, можем да смятаме, че $\varepsilon_0 = 1$.

Ще положим

$$x_n = \frac{|\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}|}{2}; \quad n=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Очевидно или $x_n = 0$, или $x_n = 1$.

**Лема 1.** За всяка функция $f(x)$, принадлежаща на $K_\varepsilon$, стойностите

$$\lim_{x\to x_n} f^{(n)}(\xi); \quad n=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

са крайни числа.

Доказателство. Действително от дефиницията на $x_n$ и монотонността на $f(x)$ следва, че

$$|f^{(n)}(\xi)| \leq |f^{(n)}(x)|,$$

когато $\xi$ е между $x_n$ и $x$.

**Лема 2.** Ако функцията $f(x)$ принадлежи на $K_\varepsilon$ и

$$\lim_{x\to 1-x_n} \varepsilon_n f^{(n)}(x) = \infty, \tag{2}$$

то

$$\lim_{x\to 1-x_n} \varepsilon_{n+1} f^{(n+1)}(x) = \infty.$$

Доказателство. Да допуснем противното. Тогава

$$\sup f^{(n+1)}(x)| < \infty$$

поне тогава, когато $x$ се мени между $\frac{1}{2}$ и $1-x_n$. От друга страна имаме

$$f^{(n)}(x) \leq \left| f^{(n)}(x) - f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)\right| + \left| f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left| x - \frac{1}{2}\right| |f^{(n+1)}(\eta)| + \left| f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)\right|,$$

където $\eta$ е между $\frac{1}{2}$ и $1-x_n$. По такъв начин получаваме

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{2}\sup f^{(n+1)}(x)| + \left|f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)\right|,$$

когато $x$ е между $\frac{1}{2}$ и $1-x_n$, което противоречи на условието (2)

**Следствие 1.** Ако производната от някой ред на някоя функция от $K_\varepsilon$ не е ограничена, то периодът на $\varepsilon$ е или 1, или 2.

Доказателство. Нека $f(x)$ принадлежи на $K_\varepsilon$ и нейната производна от ред $k$ е неограничена. Като вземем под внимание, че

$$\lim_{x\to x_k} \varepsilon_k f^{(k)}(x) < \infty,$$

заключаваме, че

$$\lim_{x\to 1-x_k} \varepsilon_k f^{(k)}(x) = \infty,$$

и следователно при $n \geq k$ имаме

$$\lim_{x \to 1-x_k} \varepsilon_n f^{(n)}(x) = \infty,$$

т. е. $x_n \neq 1 - x_k$ и следователно $x_n = x_k$. И така

$$x_k = x_{k+1} = x_{k+2} =$$

Ако $x_k = 0$, очевидно периодът на $\varepsilon$ е 1, ако ли пък $x_k = 1$, периодът на $\varepsilon$ е 2.

**Следствие 2.** Ако периодът $q$ на $\varepsilon$ е по-голям от 2, производните на всичките функции от $K_\varepsilon$ са ограничени. Това ни позволява да смятаме в този случай, без да ограничаваме общността, че всичките функции от $K_\varepsilon$ са дефинирани и безбройно много пъти дефиренцируеми в затворения интервал $[0, 1]$, което ще правим отсега нататък.

В бъдеще ние многократно ще използуваме следното лесно проверяемо твърдение.

**Лема 3.** Ако функцията $\varphi(t)$ е интегрируема и неотрицателна в интервала $[0, 1]$, то при $0 \leq x \leq 1$ имаме

$$\int_{x_n}^{x} \tau_n \varphi(t)\, dt \geq 0,$$

където*

$$\tau_n = \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}, \qquad x_n = \frac{|\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}|}{2}.$$

Ще изоставим доказателството, което е тривиално.

**Лема 4.** Ако функцията $f(x)$ принадлежи на $K_\varepsilon$, то и

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \tau_0\, dt_1 \int_{x_1}^{t_1} \tau_1\, dt_2 \ldots \int_{x_n}^{t_n} \tau_n \varepsilon_{n+1} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

принадлежи на $K_\varepsilon$.

Доказателство. При $k \leq n$ имаме

$$\varepsilon_k R_n^{(k)}(x) = \varepsilon_k \prod_{\nu=0}^{k-1} \tau_\nu \int_{x_k}^{x} \tau_k\, dt_{k+1} \int_{x_{k+1}}^{t_{k+1}} \tau_{k+1}\, dt_{k+2} \ldots \int_{x_n}^{t_n} \tau_n \varepsilon_{n+1} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

От друга страна

$$\varepsilon_k \prod_{\nu=0}^{k-1} \tau_\nu = \varepsilon_0 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \ldots \varepsilon_k^2 = 1,$$

тъй като $\varepsilon_0 = 1$. Като имаме предвид лема 3, лесно се вижда, че

$$\varepsilon_k R_n^{(k)}(x) \geq 0; \quad 0 < x < 1.$$

При $k > n$

* Тези означения ще използуваме постоянно и нататък.

$$\varepsilon_k R_n^{(k)}(x)=\varepsilon_k \varepsilon_{n+1}\prod_{\nu=0}^{n}\tau_\nu f^{(k)}(x)=\varepsilon_k \varepsilon_{k+1}^2 f^{(k)}(x)$$
$$=\varepsilon_k f^{(k)}(x)\geqq 0;\quad 0<x<1.$$

Следователно $R_n(x)$ принадлежи на $K_\varepsilon$.

По същия начин се вижда, че полиномите

$$P_n(x)=\int_{x_0}^{x}\tau_0\,dt_1\int_{x_1}^{t_1}\tau_1\,dt_2\ldots\int_{x_{n-1}}^{t_{n-1}}\tau_{n-1}\,dt_n$$

принадлежат на $K_\varepsilon$.

Тези специални интерполационни полиноми на Гончаров са аналогични на полиномите, въведени от Ойлер, и са използувани от С. Н. Бернщайн при изучаване на циклично монотонните функции [3].

**Лема 5.** Ако функцията $f(x)$ принадлежи на $K_\varepsilon$ и $q$ е периодът на $\varepsilon$, то и функцията

$$g(x)=\int_{x_0}^{x}\tau_0\,dt_1\int_{x_1}^{t_1}\tau_1\,dt_2\ldots\int_{x_{q-1}}^{t_{q-1}}\tau_{q-1}f(t)\,dt$$

принадлежи на $K_\varepsilon$.

Доказателство. При $k\leqq q-1$ имаме

$$\varepsilon_k g^{(k)}(x)=\varepsilon_k\prod_{\nu=0}^{k-1}\tau_\nu\int_{x_k}^{t_k}\tau_k\,dt_{k+1}\int_{x_{k+1}}^{t_{k+1}}\tau_{k+1}\,dt_{k+2}\ldots\int_{x_{q-1}}^{t_{q-1}}\tau_{q-1}f(t)\,dt.$$

Като вземем предвид, че

$$\varepsilon_k\prod_{\nu=0}^{k-1}\tau_\nu=\varepsilon_k^2=1$$

и приложим лема 3, намираме $\varepsilon_k g^{(k)}(x)\geqq 0$.

От друга страна при $k\geqq q$ имаме

$$\varepsilon_k g^{(k)}(x)=\varepsilon_k\prod_{\nu=0}^{q-1}\tau_\nu f^{(k-q)}(x)=\varepsilon_k\varepsilon_q f^{(k-q)}(x)=\varepsilon_{k-q}f^{(k-q)}(x)\geqq 0,$$

тъй като $\varepsilon_q=\varepsilon_0=1$ и $\varepsilon_k=\varepsilon_{k-q}$ и следователно $g(x)$ принадлежи на $K_\varepsilon$.

**Лема 6.** Ако функцията $f(x)$ принадлежи на $K_\varepsilon$ и

(3) $$\lim_{x\to x_n} f^{(n)}(x)=0;\quad n=0,1,2,\ldots,$$

то и функцията

$$h(x)=f(x)-\int_{x_0}^{x}\tau_0\,dt_1\int_{x_1}^{t_1}\tau_1\,dt_2\ldots\int_{x_{q-1}}^{t_{q-1}}\tau_{q-1}f(t)\,dt$$

принадлежи на $K_\varepsilon$.

Доказателство. Като имаме предвид (3), лесно се проверява тъждеството

$$h(x)=\int_{x_0}^{x}\tau_1\,dt_1\int_{x_1}^{t_1}\tau_2\,dt_2\ldots\int_{x_{q-1}}^{t_{q-1}}\tau_{q-1}\Big[f^{(q)}(t)-f(t)\Big]dt.$$

Съгласно лема 5 ще бъде достатъчно да се докаже, че функцията

$$\psi(x)=f^{(q)}(x)-f(x)$$

принадлежи на $K_\epsilon$

(4) $$\varepsilon_k\psi^{(k)}(x)=\varepsilon_k\Big[f^{(q+k)}(x)-f^{(k)}(x)\Big].$$

Ще разгледаме поотделно случаите $q=1$, $q=2$ и $q>2$.

I. Нека $q=1$ и следователно $\varepsilon_n=\varepsilon_0=1$; $x_n=x_0=0$ при $n=0, 1, 2,\ldots$

В този случай от (4) получаваме

$$\psi^{(k)}(x)=f^{(k+1)}(x)-f^{(k)}(x)=f^{(k+1)}(x)-\int_0^x f^{(k+1)}(t)\,dt$$
$$\geqq f^{(k+1)}(x)-xf^{(k+1)}(x)\geqq 0,$$

тъй като $f(x)$ е монотонно растяща и е изпълнено (3).

II. Ако $q=2$ със смяна на $x$ с $1-x$ се свежда към I.

III. Ако $q\geqq 3$ съгласно следствие 2, за всяка функция $f(x)$, принадлежаща на $K_\epsilon$ стойностите $f^{(n)}(1-x_n)$; $n=0, 1, 2,\ldots$ са крайни числа.

$$|f^{(k)}(1-x_k)|=|f^{(k)}(1-x_k)-f^{(k)}(x_k)|=|1-2x_k|\,|f^{(k+1)}(\eta)|$$
$$\leqq|f^{(k+1)}(1-x_{k+1})|$$

или

(5) $$\varepsilon_k f^{(k)}(1-x_k)\leqq\varepsilon_{k+1}f^{(k+1)}(1-x_{k+1});\quad k=0, 1, 2,\ldots,$$

тъй като $f^{(k)}(x_k)=0$.

Нека $k$ е произволно цяло положително число. С $p$ ще означим едно цяло положително число, за което $x_{k+p}=0$, $x_{k+p+1}=1$. Такова цяло число сигурно има, защото $q\geqq 3$. При този избор $\varepsilon_{k+p}=\varepsilon_{k+p+1}=-\varepsilon_{k+p+2}$, функциите

$$\varepsilon_{k+p+q}f^{(q+k+p)}(x)\quad\text{и}\quad\varepsilon_{k+p}f^{k+p}(x)$$

са неотрицателни, монотонно растящи и вдлъбнати и следователно удовлетворяват неравенствата

(6) $$\varepsilon_{k+p+q}f^{(k+p+q)}(x)\geqq\varepsilon_{k+p+q}\,xf^{(k+p+q)}(1),$$
$$\varepsilon_{k+p}f^{(k+p)}(x)\geqq\varepsilon_{k+p}\,xf^{(k+p+1)}(0).$$

Но

$$\varepsilon_k\psi^{(k)}(x)=\varepsilon_k\int_{x_k}^{x}dt_1\int_{x_{k+1}}^{t_1}dt_2\ldots\int_{x_{k+p-1}}^{t_{p-1}}\Big[f^{(k+p+q)}(t)-f^{(k+p)}(t)\Big]dt$$

$$= \int_{x_k}^{x} \tau_k dt_1 \int_{x_{k+1}}^{t_1} \tau_{k+1} dt_2 \ldots \int_{x_{k+p-1}}^{t_{p-1}} \tau_{k+p-1} \varepsilon_{k+p} [f^{(k+p+q)}(t) - f^{(k+p)}(t)] dt,$$

защото

$$\varepsilon_{k+p} \prod_{\nu=k}^{k+p-1} \tau_\nu = \varepsilon_{k+p} \varepsilon_k \varepsilon_{k+p} = \varepsilon_k .$$

Като имаме предвид неравенствата (5) и (6) и равенството $\varepsilon_{k+p+q} = \varepsilon_{k+p}$, намираме

$$\varepsilon_{k+p} [f^{(k+p+q)}(t) - f^{(k+p)}(t)] \quad \varepsilon_{k+p} [f^{(k+p+q)}(1) - f^{(k+p+1)}(0)] \geqq 0,$$

откъдето като използуваме лема 3, установяваме, че $\varepsilon_k \psi^{(k)}(x) \geqq 0$. С това лемата е доказана.

Сега ще си поставим за задача да намерим неразложимите елементи [5] на $K_\varepsilon$.

Съгласно интерполационната формула на Абел — Гончаров за всяка функция $f(x)$ от $K_\varepsilon$ имаме

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu P_\nu(x) + R_n(x), \tag{7}$$

където

$$a_\nu = \lim_{x \to x_\nu} \varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x),$$

$$P_\nu(x) = \int_{x_0}^{x} \tau_0 dt_1 \int_{x_1}^{t_1} \tau_1 dt_2 \ldots \int_{x_{\nu-1}}^{t_{\nu-1}} \tau_{\nu-1} dt_\nu ,$$

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \tau_0 dt_1 \int_{x_1}^{t_1} \tau_1 dt_2 \ldots \int_{x_n}^{t_n} \tau_n \varepsilon_{n+1} f^{(n+1)}(t) dt .$$

Равенството (7) ни дава едно разлагане на $f(x)$ на сума от функции, принадлежащи на $K_\varepsilon$ съгласно лема 4, тъй като $a_\nu \geqq 0$. Ако функцията $f(x)$ е неразложима и поне едно от числата $a_\nu = \lim_{x \to x_\nu} f^{(\nu)}(x)$ е различно от нула, то

$$f(x) = cP_\nu(x),$$

където $c$ е положителна константа.

Ако функцията $f(x)$ принадлежи на $K_\varepsilon$ и

$$\lim_{x \to x_\nu} f^{(\nu)}(x) = 0 \qquad \text{при } \nu = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

то $f(x)$ може да се разложи по следния начин:

$$f(x) = g(x) + h(x),$$

където

$$g(x)=\int_{x_0}^{x}\tau_0\,dt_1\int_{x_1}^{t_1}\tau_1\,dt_2\ldots\int_{x_{q-1}}^{t_{q-1}}\tau_{q-1}f(t)\,dt,$$

$$h(x)=f(x)-g(x),$$

Съгласно лема 5 и лема 6 функциите $g(x)$ и $h(x)$ принадлежат на $K_\varepsilon$.

Ако функцията $f(x)$ е неразложима, то

$$\lambda f(x)=\int_{x_0}^{x}\tau_0\,dt_1\int_{x_1}^{t_1}\tau_1\,dt_2\ldots\int_{x_{q-1}}^{t_{q-1}}\tau_{q-1}f(t)\,dt \tag{8}$$

$$0\leq\lambda\leq 1.$$

$\lambda$ не може да бъде равно на нула, защото в противен случай ще имаме $f(x)\equiv 0$, а $f(x)$ по предложение е неразложима.

Като диференцираме (8) $q$ пъти и положим $\frac{1}{\lambda}=a^q$, получаваме

$$f^{(q)}(x)=\prod_{\nu=0}^{q-1}\tau_\nu\,.\,a^q f(x)=\varepsilon_0\,\varepsilon_q\,f(x)$$

или

$$f^{(q)}(x)=a^q f(x);\qquad a\geqq 1. \tag{9}$$

При $q=1$ или 2 само тривиалното решение на (9) $f(x)\equiv 0$ принадлежи на $K_\varepsilon$ и удовлетворява условието (3).

Ще докажем, че при $q\geqq 3$ всички решения на (9), които принадлежат на $K_\varepsilon$ и са неразложими, са колинеарни помежду си. Нека $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са решения на (9), принадлежащи на $K_\varepsilon$, които са неразложими, получени при съответни стойности на константата $a=a_1$ и $a=a_2$; $a_1\geqq a_2$. Функциите $f_1(x)$ и $f_2(x)$ удовлетворяват и условията (3), защото в противен случай биха били полиноми, което е невъзможно.

Да означим с

$$\varrho=\min\left\{\inf\frac{f_1^{(k)}(x)}{f_2^{(k)}(x)}\right\}$$

$$0\leq x\leq 1,\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ldots,q-1.$$

Очевидно $\varrho\geqq 0$, тъй като $f_1^{(k)}(x)$ и $f_2^{(k)}(x)$ имат еднакви знаци. При $0<x<1$ и $x=1-x_k$ имаме

$$\frac{f_1^{(k)}(x)}{f_2^{(k)}(x)}>0,$$

тъй като $f_1^{(k)}(x)$ не може да се анулира нито във вътрешността на интервала [0, 1], нито при $x=1-x_k$. Като използуваме, че $f_1(x)$ и $f_2(x)$ удовлетворяват условието (3) и че $q\geq 3$, заключаваме с помощта на правилото на Лопитал, че

$$\lim_{x\to x_k}\frac{f_1^{(k)}(x)}{f_2^{(k)}(x)}\neq 0.$$

С това е установено, че $\varrho>0$. Но от друга страна неравенството

$$\frac{f_1^{(k)}(x)}{f_2^{(k)}(x)}\geq\varrho$$

е в сила не само за $k=0, 1, 2, \ldots, q-1$, а за всяко цяло положително $k$.

Действително нека $k$ е произволно цяло положително число и нека

$$k=rq+p \qquad 0\leq p\leq q-1.$$

Като имаме предвид (9), получаваме

$$\frac{f_1^{(k)}(x)}{f_2^{(k)}(x)}=\frac{a_1^{rq}f_1^{(p)}(x)}{a_2^{rq}f_2^{(p)}(x)}\geq\frac{f_1^{(p)}(x)}{f_2^{(p)}(x)}\geq\varrho,$$

тъй като $a_1\geq a_2$. По такъв начин при всяко цяло неотрицателно $k$ намираме

$$\varepsilon_k\left[f_1^{(k)}(x)-\varrho f_2^{(k)}(x)\right]\geq 0,$$

т. е. $\varphi(x)=f_1(x)-\varrho f_2(x)$ принадлежи на $K_\varepsilon$.

Следователно $f_1(x)$ се разлага по следния начин:

$$f_1(x)=\varphi(x)+\varrho f_2(x).$$

Като вземем под внимание, че функцията $f_1(x)$ е неразложима, получаваме

$$\lambda f_1(x)=f_2(x); \qquad \lambda\geq 0,$$

т. е. $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са колинеарни.

С $R_\varepsilon(x)$ ще означим неразложима функция, удовлетворяваща (9) и (3) и принадлежаща на $K_\varepsilon$, ако има такава. Ако такава функция няма, ще положим $R_\varepsilon(x)\equiv 0$.

С всичко това е доказано, че неразложимите елементи на $K_\varepsilon$ са

(10) $$A_n P_n(x)=A_n\int_{x_0}^{x}\tau_0\,dt_1\int_{x_1}^{t_1}\tau_1\,dt_2\ldots\int_{x_{n-1}}^{t_{n-1}}\tau_{n-1}\,dt_n$$

$$n=0, 1, 2, \ldots,$$

и

(11) $$AR_\varepsilon(x), \quad\text{ако}\quad R_\varepsilon(x)\neq 0,$$

където $A$, $A_0$, $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ са произволни положителни константи.

В съвкупността $K_\varepsilon$ въвеждаме линейна норма $P(f)$ и изброима координатна система $\{F_\nu(f)\}$. Това може да стане например, като положим

$$P(f)=\frac{(1-\varepsilon_1)f(+0)+(1+\varepsilon_1)f(1-0)}{2}$$

и

(12) $$F_\nu(f)=f(r_\nu), \qquad \nu=1,\ 2,\ 3,$$

където $r_1, r_2, r_3, \ldots$ е една редица от числа, разположена навсякъде гъсто в интервала $(0, 1)$.

Не е трудно да се види, че нормата $P(f)$ е полунепрекъсната отдолу относно координатната система (12) и че съвкупността $K_\varepsilon$ е компактна относно тази норма и същата координатна система. Ние няма да се спираме върху съответните доказателства.

Като използуваме метода на Я. А. Тагамлицки [5], установяваме следната

**Теорема 1.** Всяка функция от $K_\varepsilon$ може да се представи във вида

(13) $$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu P_\nu(x)+AR_\varepsilon(x),$$

където $a_\nu \geqq 0$; $\nu=0,\ 1,\ 2, \ldots$ $A \geqq 0$.

Лесно се вижда, че

$$a_\nu=\lim_{x\to x_\nu} f^{(\nu)}(x).$$

**Следствие 3.** (Теорема на С. Н. Бернщайн). Абсолютно монотонните функции в интервала $[0, 1]$ са развиваеми в Тейлоров ред около началото с радиус на сходимост не по-малък от 1. Остатъчната функция $R_\varepsilon(x)$ в този случай е тъждествено равна на нула. Към абсолютно монотонните функции се свеждат, както вече видяхме, и функциите, за които $q=2$.

**Следствие 4.** (Теорема на С. Н. Бернщайн). Циклично монотонните функции от синусов тип могат да се представят във вида

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu P_\nu(x)+A\sin\frac{\pi x}{2},$$

където $a_\nu \geqq 0$; $\nu=0,\ 1,\ 2, \ldots$ $A \geqq 0$.

$$P_\nu(x)=(-1)^{\left[\frac{\nu}{2}\right]}\int_0^x dt_1\int_1^{t_1} dt_2\int_0^{t_2} dt_3\ldots\int_{a_{\nu-1}}^{t_{\nu-1}} dt_\nu$$

$$a_{\nu-1}=\begin{cases}0 & \text{при } \nu \text{ нечетно}\\ 1 & \text{при } \nu \text{ четно.}\end{cases}$$

Циклично монотонните функции от косинусов тип могат да се представят във вида

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu P_\nu(x)+B\cos\frac{\pi x}{2},$$

където $b_\nu \geqq 0$; $\nu=0, 1, 2, \ldots$ $B \geqq 0$.

$$P_\nu(x)=(-1)^{\left[\frac{\nu+1}{2}\right]}\int_1^x dt_1\int_0^{t_1} dt_2\int_1^{t_2} at_3\ldots\int_{\beta_{\nu-1}}^{t_{\nu-1}} dt_\nu$$

$$\beta_{\nu-1}=\begin{cases}0 \text{ при } \nu \text{ четно}\\ 1 \text{ при } \nu \text{ нечетно.}\end{cases}$$

**Следствие 5.** Функциите от класата $Ц_2(0, 1)$ [4] могат да се представят във вида (13), където

$$R_\varepsilon(x)=(\operatorname{sh}a+\sin a)(\operatorname{ch}ax-\cos ax)+(\operatorname{ch}a+\cos a)(\operatorname{sh}ax-\sin ax)$$

при знаци на функцията и последователните ѝ производни $+++-$ $+++-$

$$R_\varepsilon(x)=(\operatorname{sh}a+\sin a)(\operatorname{ch}ax+\cos ax)+(\operatorname{ch}a+\cos a)(\operatorname{sh}ax+\sin ax)$$

при знаци на функцията и последователните ѝ производни $+-$ $+++-++$ ·, а $a$ е най-малкият корен на уравнението

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cos x+1=0.$$

## § 2

Нека ни е дадена една произволна периодична редица

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n, \ldots \qquad x_n=0 \text{ или } 1,$$

с период $r$; $x_{n+r}=x_n$; $n=0, 1, 2, \ldots$ С $\varepsilon$ ще означим редицата, дефинирана по следния начин:

$$\varepsilon_0=0; \qquad |\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1}|=2x_{n-1}.$$

Лесно се съобразява, че редицата $\varepsilon$ е периодична и периодът ѝ е $q=r$ или $2r$. Запазвайки означенията от § 1 с $\overline{K}_\varepsilon$, ще означим съвкупността от функциите, дефинирани и безбройно много пъти диференцируеми в интервала (0, 1), за които

$$\overline{P}_1(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\lim_{t\to x_\nu} f^{(\nu)}(x)\right| P_\nu(1-x_\nu)<\infty$$

и съществува

$$\overline{P_2}(t) = \lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{1-x_0} \tau_0 \, dt_1 \int_{x_1}^{t_1} \tau_1 \, dt_2 \ldots \int_{x_n}^{t_n} \tau_n \, | f^{(n+1)}(t) | \, dt < \infty .$$

Съвкупността $\overline{K}_\varepsilon$ е регулярен конус. В $\overline{K}_\varepsilon$ може да се дефинира изброима координатна система и полунепрекъснáта отдолу норма

$$\overline{P}(f) = P_1(f) + \overline{P}_2(f),$$

относно която той е компактен. Интересно е, че неразложимите елементи в $\overline{K}_\varepsilon$ са пак (10) и (11), само че $A$, $A_0$, $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ са произволни константи. Като използуваме пак метода на Я. А. Тагамлицки за конуса $\overline{K}_\varepsilon$, установяваме следната

**Теорема 2.** Всяка функция от $\overline{K}_\varepsilon$ може да се представи във вида

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x) + A R_\varepsilon(x),$$

където $a_\nu$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ и $A$ са константи.

Тази теорема следва непосредствено от теорема 1 и от обстоятелството, че ако функцията $f(x)$ принадлежи на $\overline{K}_\varepsilon$, то

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

където $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат на съответния конус $K_\varepsilon$. Върху доказателствата няма да се спираме.

Забележка. Всички разглеждания, които направихме, могат да се пренесат с една линейна трансформация върху произволен краен интервал.

* * *

**Настоящият труд бе изработен в кръжока по диференциално и интегрално смятане при Софийския университет. Дължа да изкажа благодарност на научния ръководител на кръжока проф. д-р Я. А. Тагамлицки за оказаната помощ и внимание.**

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Бернштейн. Об определении и свойствах аналитических функций вещественной переменной, Собр. соч. т. I, стр. 231—250. О некоторых свойствах регулярно монотонных функций, Собр. соч. т. I, стр. 350—360, О регулярно монотонных функциях, Собр. соч. т. I, стр. 487—499 и пр.
2. С. Н. Бернштейн. Абсолютно монотонные функции, Собр. соч. т. I, стр. 370—425.

3. С. Н. Бернштейн. О некоторых свойствах циклически монотонных функций, Собр. соч. т. II, стр. 493—516.
4. С. Н. Бернштейн. Примечания к теории регулярно монотонных функций, Собр. соч. т. II, стр. 546—558.
5. Я. А. Тагамлицки. Върху едно обобщение на понятието неразложимост, Годишник на Софийския университет, т. 48, 1953/54, кн. 1, част I, стр. 69—85.

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕГУЛЯРНО МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Благовест Сендов

(РЕЗЮМЕ)

С. Н. Бернштейн разработал теорию регулярно монотонных функций, т. е. таких бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$ в данном промежутке $(a, b)$, все производные которых сохраняют постоянный знак (зависящий вообще от порядка производной), т. е. удовлетворяющих условиям

$$\varepsilon_n f^{(n)}(x) \geqq 0\,, \qquad a<x<b\,, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ldots,$$

где $\varepsilon_n = \pm 1$.

Автор рассматривает класс $K_\varepsilon$ регулярно монотонных, ограниченных функций, в конечном промежутке, для которых выполняется условие периодичности

$$\varepsilon_{n+q} = \varepsilon_n\,, \qquad q>0, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

В дальнейшем через $q$ обозначен наименьший период последовательности $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ Рассматривается случай, когда $\varepsilon_0 = 1$, $a=0$, $b=1$, что не ограничивает общности, и полагается для краткости

$$\frac{|\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}|}{2} = x_n\,, \qquad \tau_n = \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}\,.$$

Через $R_\varepsilon(x)$ обозначена неразложимая функция, удовлетворяющая условиям

$$R_\varepsilon^{(q)}(x) = a^q R_\varepsilon(x)\,, \qquad a \geqq 1, \quad \lim_{x \to x_n} R_\varepsilon^{(n)}(x) = 0$$

и принадлежащая $K_\varepsilon$, если таковая существует. Если таковой функции нет, по определению полагается $R_\varepsilon(x)=0$.

Доказывается, что неразложимые элементы множества $K_\varepsilon$ находятся среди функции

$$A_n P_n(x) = A_n \int_{x_0}^{x} \tau_0\, dt_1 \int_{x_1}^{t_1} \tau_1\, dt_2 \ldots \int_{x_{n-1}}^{t_{n-1}} \tau_{n-1}\, dt\,, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

и $AR_\varepsilon(x)$, где через $A, A_0, A_1, \ldots$ обозначены положительные постоянные.

Применяя метод Я. А. Тагамлицкого, автор приходит к следующему результату:

Теорема. Каждую функцию $f(x)$ из $K_\varepsilon$ можно представить в виде

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x)+AR_\varepsilon(x), \tag{1}$$

где $a_\nu \geqq 0\,(\nu=0,\ 1,\ 2,\dots)$, $A \geqq 0$.

Это предложение доказано С. Н. Бернштейном для абсолютно монотонных и циклически монотонных функций. В заключение автор исследует условия, при которых функция $f(x)$ допускает абсолютно сходящееся разложение вида (1), коэффициенты которого могут иметь любые знаки.

# SUR UNE ESPÈCE DE FONCTIONS REGULIÈREMENT MONOTONES

Blagovest Sendov

(RÉSUMÉ)

Dans la note présente on traite une espèce de fonctions régulièrement monotones en employant la méthode de M. J. A. Tagamlitzki.

Soit $K_\varepsilon$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables bornées dans l'intervalle (0, 1) et y satisfaisant aux inégalités:

$$\varepsilon_n f^{(n)}(x) \geq 0; \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

$\varepsilon_0=1,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ldots,\ \varepsilon_n,\ldots$ étant une suite périodique à période $q$, $(\varepsilon_{n+q}=\varepsilon_n;\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$ dont les termes sont 1 ou $-1$.

On prouve le théorème suivant:

Les fonctions $f(x)$ de $K_\varepsilon$ sont susceptibles de la représentation

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x) + AR_\varepsilon(x)$$

à coefficients non négatifs, où

$$P_\nu(x)=\int_{x_0}^{x}\tau_0\, dt_1 \int_{x_1}^{t_1}\tau_1\, dt_2 \ldots \int_{x_{\nu-1}}^{t_{\nu-1}}\tau_{\nu-1}\, dt_\nu,$$

$$x_\nu=\frac{|\varepsilon_\nu-\varepsilon_{\nu-1}|}{2},$$

$$\tau_k=\varepsilon_k \cdot \varepsilon_{\ +1}$$

et où la fonction $R_\varepsilon(x)$ appartient à $K_\varepsilon$ et satisfait aux conditions suivantes:

$$R_\varepsilon^{(q)}(x)=\mu^q R_\varepsilon(x);\ \mu=\text{const}$$

$$R_\varepsilon^{(k)}(x_\nu)=0; \quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Ce théorème généralise certains théorèmes de M. S. N. Bernstein sur des fonctions cycliquement monotones et des fonctions absolument monotones.

Ensuite, on trouve les conditions pour qu'il subsiste le développement

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{\nu}P_{\nu}(x)+AR_{\varepsilon}(x)$$

absolument convergent à coefficients quelconques.