ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ ДИРИХЛЕ О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ

В. А. Голубев

§ 1

При помощи метода „Эратосфенова решета“ Сельберг [1] дал элементарное доказательство асимптотического закона простых чисел и теоремы Дирихле. Этот же метод можно применить для составления таблиц „близнецов“ и других групп простых чисел, таблиц делителей и простых чисел вида x^2+1 и других форм и для вывода точных или асимптотических формул для числа групп простых чисел от 1 до x [2].

Словом „близнецы“ мы будем обозначать такое простое p, для которого и $p+2$ будет простым числом. Пусть функция $\pi_2(x)$ означает число „близнецов“, не превышающих x.

Аналогично будем обозначать и группы из m простых чисел с данными разностями между ними. Так, функция $\pi_{2,4}(x)$ означает число „троек“ простых чисел p, $p+2$, $p+6$, при $p \leq x$.

Методом „Эратосфенова решета“ мы можем составить таблицу „близнецов“ от 1 до $x>2$. Вычеркнем из последовательности $1, 2, \ldots, [x]$ все четные числа; затем вычеркнем числа $y \equiv 0, y \equiv -2$ (mod p), где p — нечетные простые числа, не превышающие $\sqrt{x+2}$. Добавив „близнецы“ от 1 до $\sqrt{x+2}$ и вычеркнув 1, мы получим таблицу „близнецов“ (p) до x.

Так же получим точную формулу для $\pi_2(x)$, аналогичную формуле Лежандра [2].

§ 2

Легко доказать следующую теорему. При данном целом a и простом p_n натуральные числа от 1 до $+\infty$, оставшиеся после исключения чисел методом Эратосфена по модулям $p=2, 3, 5, \ldots, p_n$, располагаются равномерно по арифметическим прогрессиям $ax+b$, если $(a, b)=1$, $0<b<a$, $(a, p)=1$ для любого $p \leq p_n$, и число их в каждой из этих прогрессий бесконечно.

Доказательство. Пусть $R=2.3.5 \ldots p_n$. Расположим натуральные числа от 1 до $+\infty$ в K столбцах, где K есть наименьшее кратное чисел a и R:

$$1,\ 2,\ 3, \ldots, K$$
$$K+1,\ K+2,\ K+3, \ldots, 2K.$$

Ясно, что при этом расположении чисел числа $y \equiv 0$, $y \equiv -2 \pmod{p_i}$ и вообще числа $y \equiv c \pmod{p_i}$ $(i=2, 3, \ldots, n)$ занимают целые столбцы, ибо K делится на любое $p_i \leqq p_n$. Поэтому по каждому модулю p_i исключаются целые столбцы чисел и остаются неисключенными также целые столбцы.

Так как a есть делитель K, то числа от 1 до K образуют $\frac{K}{a}$ полных систем вычетов по модулю a, следовательно, каждая арифметическая прогресия $ax+b$, при данном a и $b=0, 1, \ldots, a-1$, до начала процесса исключения чисел имела $\frac{K}{a}$ целых столбцов чисел. Так как системы сравнений

$$\left| \begin{array}{l} y \equiv 0 \pmod{2}, \\ y \equiv b \pmod{a}, \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} y \equiv 0 \pmod{2.3} \\ y \equiv b \pmod{a} \end{array} \right. \text{ и т. д.}$$

имеют одно и то же число решений от 1 до K при любом b, удовлетворяющем условию $(b, a)=1$ и $(b, p_i)=1$, то по каждому модулю $p_i \leq p_n$ исключается равное число столбцов чисел любой такой прогрессии $ax+b$. (В случаях же $(b, a)>1$ или $(b, p_i)>1$ исключаются в с е столбцы). Следовательно, число остающихся столбцов и чисел после каждого исключения чисел по модулям $p_i \leqslant p_n$ для любой прогрессии $ax+b$ с вышеуказанными условиями будет одинаковым, при этом число чисел бесконечно.

Эта теорема имеет место при составлении методом Эратосфена таблиц простых чисел, „близнецов" и других групп простых чисел, а также простых чисел данной формы, напр., вида a^2+1 или других квадратичных, или степенных форм, так как исключение чисел в этих случаях происходит по сравнениям $y \equiv b \pmod{p}$. В случае же простых чисел формы 2^x+1, 2^x-1 и т. н. данная теорема не имеет места, ибо исключение чисел в этих случаях проходит согласно сравнениям $y \equiv k \pmod{p-1}$.

Доказанная теорема позволяет предполагать, что теорема Дирихле о простых числах имеет место и для групп простых чисел и для простых чисел степенных форм, что действительно и наблюдается.

§ 3. Числа a^2+1

1. В своем знаменитом мемуаре „De numeri primis valde magnis" Л. Эйлер* рассматривает делители чисел вида a^2+1. Делителями этих чисел могут быть простые числа $p=4m+1$ и число 2, ибо они могут быть разложены на сумму двух квадратов. Исходя из разложения $p=x^2+y^2$, Л. Эйлер для каждого $p=4m+1$ дает вид чисел a, для которых p является делителем a^2+1. Пусть $p=x^2+y^2$, $(x \geqq y)$, и $\frac{m}{n}$ предпоследняя подходящая дробь разложе-

* L. E u l e r. Comment. arithm. coll., t. 1, 356—378.

ния $\frac{x}{y}$ в непрерывную дробь. Тогда сумма $xm+yn$ будет равна наименьшему значению a_1. Общий же вид оснований будет $a=pk\pm a_1$.

Л. Эйлер дал таблицу простых чисел a^2+1 и таблицу делителей составных чисел a^2+1 до $a=1500$. Я продолжил эти таблицы до $a=3500$.

2. Следующая таблица подтверждает предположение о равномерном распределении оснований a простых чисел вида a^2+1 по арифметическим прогрессиям.

Таблица 1

Числа простых чисел вида a^2+1 в арифметических прогрессиях $10x+0$, ± 4 от $a=4$ до $a=3500$.

	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500
10 x	27	42	58	74	88	100	113
10 x + 4	19	31	48	65	81	100	115
10 x + 6	22	37	53	68	84	101	115
Всего	68	110	159	207	253	301	343

Только два простых числа a^2+1 при $a=1$ и $a=2$ не входят в данные 3 прогрессии.

Числа $\pi(a^2+1)$ данной таблицы удовлетворяют неравенству $\pi(x)>\pi(a^2+1)>\pi_2(x)$ при любом $x=a<3500$.

3. Отмечаю некоторые существенные опечатки или ошибки в таблицах указанного мемуара Эйлера.

Стр. 563. Вид делителей a^2+1. Неверно указано, что число $p=1021$ является делителем a^2+1, если $a=1021\,m\pm 255$.

Должно быть: если $a=1021\,m\pm 574$. Также число $p=1033$ является делителем a^2+1 при $a=1033\,m\pm 355$, а не при $a=1033\,m \pm 347$, как указано в таблице Эйлера.

Стр. 367—368. В таблице простых чисел a^2+1 пропущено простое число 1080^2+1 и неверно указано, что $1234^2+1=1522757$ — простое; оно делится на 421.

Стр. 375. Неверно указано, что a^2+1 при $a=1080$ делится на 773. Число 1080^2+1 простое, а на 773 делится число 1090^2+1.

Опечатки:

Числа a	Делители a^2+1	В таблице Эйлера, стр. 375—8
703	73	3
737	29	13
733	13	29
914	313	331
191	37	3
693	17	12

§ 4

1. Метод решета Эратосфена можно применить к исследованию значений a, при которых квадратный трехчлен x^2+x+a дает относительно большое число простых чисел при $x=0, 1, \ldots$ Это исследование мною проведено до $a=500\,000$; при этом я обнаружил, что только при $a=1, 2, 3, 5, 11, 17, 41$ определитель $D=1-4d$ имеет один класс квадратичных форм. Frobenius (Über quadratische Formen, die viele Primzahlen darstellen, 1912) исследовал этот вопрос до $-D=10000$. Биджер (Beeger N. Report on some calculations of prime numbers, Nieuw. Arch. Wiskde, 20, 40—50, 1939) указал, что формы $x^2 \pm x+19421$, $x^2 \pm x+27941$, $x^2 \pm x+72491$ богаты простыми числами. Он ошибочно утверждал, что $x^2-x+72491$ дает простые числа при $0<x<11000$. Это ошибочное утверждение имеется в книге Хуа-Ло-Кена (Аддитивная теория простых чисел, АН. СССР, 1947, стр. 168) и в заметке Маржика (Časopis pro pěstováni matematiky, 1, 78, 1953, 57—58).

Однако, уже при $x=1$ имеем мы число $72491=71 \times 1021$: при $x=5$ — число $72511=59 \times 1229$; при $x=6$ число $72521=47 \times 1543$ и т. д.

Все три формы, указанные Биджер'ом, богаты простыми числами, потому что ни одно из чисел этих форм не делится ни на одно $p \leq 43$.

Однако, Д. Лемер (D. H. Lehmer) нашел форму $x^2+x+146452961$ с числами, не делящимися на $p \leq 107$.

2. При подстановке $x=0, 1, \ldots$ в форму x^2+x+a мы получим арифметический ряд 2 порядка:

$$a,\ a+2,\ a+6,\ a+12, \ldots$$

Разности между числами этого ряда образуют арифметическую прогрессию: 2, 4, 6, ...

При $a=0$ форма x^2+x+a делится на любое простое p при $x=0$. Если a — четное, то эта форма делится на 2 при $x=0$. Если же $p>2$ простое, то числа a от 1 до $p-1$ распределяются на 2 группы по $\frac{p-1}{2}$ чисел в каждой; одна из групп образует формы, делящиеся на p при некоторых значениях x, формы же другой группы не делятся на p ни при каких значениях x.

Действительно, сравнение $x^2+x+a \equiv 0 \pmod p$ приводится к сравнению $x^2 \equiv C \pmod p$, имеющему $\frac{p-1}{2}$ корней, бо́льших нуля.

Если форма x^2+x+a, $a<p$ не делится на p, то и форма x^2+x+A, где $A=kp+a$, не делится на p. Поэтому существует бесконечное множество значений a, при которых форма x^2+x+a не делится на первые n простых чисел: $2, 3, 5, \ldots, p$.

Для того, чтобы определить хотя бы одно такое значение a, достаточно решить систему сравнений $x^2+x+b_i \equiv 0 \pmod{p_i}$, где b_i — одно из значений a, при котором форма x^2+x+a не делится на p_i $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Приложение

Таблица 2

Число близнецов в арифметических прогрессиях 210 $m+a$ от $x_1=11$ до $x_2=8\cdot10^6$

x_2 \ a	11	17	29	41	59	71	101	107	137	149	167	179	191	197	209	Всего
$0,5.10^6$	314	319	308	308	290	311	293	307	295	300	296	296	311	317	298	4563
10^6	556	572	566	535	518	555	538	546	543	531	518	540	552	555	542	8167
$1,5.10^6$	778	803	805	753	750	773	769	790	766	755	753	773	782	785	759	11594
2.10^6	1006	1022	1005	988	978	980	974	1025	989	976	968	992	996	1002	968	14869
$2,5.10^6$	1218	1213	1193	1196	1184	1173	1184	1217	1197	1190	1160	1218	1210	1197	1185	17935
3.10^6	1421	1407	1385	1384	1387	1383	1374	1411	1405	1365	1356	1418	1431	1407	1395	20929
$3,5.10^6$	1634	1601	1595	1581	1579	1587	1576	1607	1604	1573	1564	1604	1627	1587	1587	23906
4.10^6	1820	1811	1786	1781	1777	1783	1758	1789	1793	1776	1756	1815	1817	1795	1798	26855
$4,5.10^6$	2021	2010	1975	1965	1956	1959	1955	1985	1997	1962	1935	1977	2013	1993	1997	29700
5.10^6	2220	2188	2139	2138	2134	2165	2138	2177	2193	2170	2114	2176	2176	2172	2174	32454
$5,5.10^6$	2412	2376	2315	2322	2300	2348	2312	2346	2357	2351	2315	2334	2359	2373	2353	35173
6.10^6	2604	2550	2511	2521	2481	2538	2489	2539	2525	2527	2503	2517	2536	2540	2529	37910
$6,5.10^6$	2768	2733	2684	2716	2669	2732	2658	2731	2701	2702	2681	2694	2713	2731	2701	40614
7.10^6	2954	2914	2876	2882	2822	2911	2829	2903	2855	2867	2857	2881	2912	2908	2881	43252
$7,5.10^6$	3145	3096	3038	3058	3008	3068	3022	3064	3011	3052	3051	3051	3107	3087	3062	45920
8.10^6	3332	3278	3217	3226	3186	3242	3211	3261	3211	3214	3216	3249	3278	3270	3226	48617

Только 2 пары близнецов (3; 5) и (5; 7) не входят в эти прогрессии. Подсчет я производил дважды по таблице Д. Лемера (D. N. Lehmer, Factor table for the firstten millions, Washington, 1909).

Числа близнецов в каждой прогресси равны $\frac{\pi_2(x)}{15}$, где $\pi_2(x) \approx \frac{cx}{(\ln x)^2}$, $c=2\prod_{p=3}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$. (1)

Это можно сделать при помощи метода „Эратосфенова решета“. Исключив числа $a \equiv 0 \pmod 2$, далее $a \equiv 1$, $a \equiv 0 \pmod 3$, так как x^2+x+a в этом случае делится на 3, затем $a \equiv 0$, $a \equiv 3$, a 4 (mod 5) (формы делятся на 5), получим из 30 a только 2 формы, не делящиеся на 2, 3, 5, именно $a \equiv 11$, $a \equiv 17 \pmod{30}$. Исключив $a \equiv 0, 1, 2, 5, \pmod 7$, получим 6 форм, не делящихся на 2, 3, 5 и 7:

$a \equiv 11, 17, 41, 101, 137, 167 \pmod{210}$ и т. д.

Если мы определим формы x^2+x+a, не делящиеся на 2, 3,... p_n, то из них можно выбрать такие, которые при $x=0, 1, \ldots, m$ давали бы простые числа до возможно большего значения m.

Можно получить другую форму квадратичного трёхчлена, не делящегося на $2, 3, \ldots, p_n$. Для этого достаточно взять $K=2.\ 3\ldots p_n$ и составить форму Kx^2+Kx+a при любом $a \equiv 0 \pmod{p_i}$, где $p_i \leqslant p_n$.

Таблица 3

Числа „троек“ простых чисел p, $p+2$, $p+6$ в арифметических прогрессиях $210\,m+a$ до $x=2\,000\,000$*

x \ a	11	17	41	101	107	137	167	191	Всего
0,5.10^6	97	109	105	97	109	104	107	98	826
10^6	179	175	163	164	187	178	173	173	1392
1,5.10^6	246	232	218	229	256	242	236	237	1896
2.10^6	315	290	260	289	313	293	291	297	2378

Почти те же значения имеет и функция $\pi_{4,2}(x)$, выражающая число „троек“ простых чисел с разностями $p_2-p_1=4$, $p_3-p_2=2$. Эти значения соответствуют формуле:

$$\pi_{2\cdot 4}(x) \sim \pi_{4,2}(x) \sim \frac{c_1 c^2 x}{(\ln x)^3}, \tag{2}$$

где

$$c_1 = 2\prod_{p=5}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(p-2)^2}\right), \quad c = 2\prod_{p=3}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

Таблица 4

Значения функции $\pi_{2,4,2}(x)$, выражающей число „четверок“ простых чисел $p, p+2, p+6, p+8$, в арифметических прогрессиях $210\,m+a$ до $x=2\,000\,000$

x \ a	11	101	191	Всего
0,5.10^6	37	28	37	102
10^6	59	50	56	165
1,5.10^6	78	80	75	233
2.10^6	99	103	92	294

* Значения a соответствуют числам p — меньшим числам „троек“.

Значения функции $\pi_{2,4,2}(x)$ таблицы 4 соответствуют формуле

$$\pi_{2,4,2}(x) \sim \frac{c_2 c_1{}^2 c^3 x}{(\ln x)^4}, \tag{3}$$

где

$$c_2 = \prod_{p=5}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(p-3)^2}\right).$$

Примечание. В таблицу не включены: одна „тройка“ (5, 7, 11) и одна четверка (5, 7, 11, 13), не входящие в данные прогрессии.

Постъпила на 26. 4. 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Selberg A. An elementary proof of the prime-number theorem, Ann. Math., 50. 1949, 297-313.

2. Goluběv V. A. Zobecněni fiunkei $\varphi(n)$ a $\pi(x)$. Časopis pro pěstováni matematiky, 1,78, 1953, 47—48.

* Значения a соответствуют числам p—меньшим числам „четверок“.

ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕОРЕМАТА НА ДИРИХЛЕ ЗА ПРОСТИТЕ ЧИСЛА

В. А. Голубев

РЕЗЮМЕ

Работата съдържа някои резултати за тъй наречените близнаци, т. е. прости числа p, за които и числото $p+2$ е просто. Дадена е таблица за близнаците в аритметичните прогресии $210m+a$ от $x_1=11$ до $x_2=8.10^6$. Също така авторът продължава таблицата на Ойлер за простите числа от вида a^2+1 и за простите числа, които са делители на съставни числа от този вид. Авторът изправя някои грешки на други математици при разглеждането на въпроси от подобен род.

EINE VERALLGEMEINERUNG DES PRIMZAHLENSATZES VON DIRICHLET

V. A. Golubev

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit enthält einige Resultate über die sogenannten Zwillinge, d. h. solche Primzahlen p, für welche auch $p+2$ eine Primzahl ist. Die Zwillinge in der arithmetischen Progression $210\,m+a$ sind von $x_1 = 11$ bis $x_2 = 8.10^6$ tabuliert. Verf. erweitert Euler's Tabelle der Primzahlen von der Form a^2+1 und der Primzahlen, die Teiler von Zahlen solcher Form sind und berichtigt einige Fehler anderer Autoren.