SUR L'EQUIVALENCE DE DEUX HYPOTHESES CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS*

W. Sierpiński (Varsovie)

H. E. Richert a démontré en 1950 que tout nombre naturel >6 est une somme de nombres premiers distincts.**

Je démontrerai ici le théorème suivant:

Théorème. L'hypothèse H que tout nombre pair >6 est une somme de deux nombres premiers distincts est équivalente à la proposition P que tout nombre naturel >17 est une somme de trois nombres premiers distincts.

Démonstration. Supposons que l'hypothèse H est vraie et soit n un nombre naturel >17. Si n est pair, $n-2$ est un nombre pair >15 et d'après H on a $n-2=p+q$, où p et q sont des nombres premiers distincts, évidemment impairs (vu qu'il n'y a pas de nombres premiers pairs distincts). Donc $n=2+p+q$ est une somme de trois nombres premiers distincts.

Si n est impair, les nombres $n-3$, $n-5$ et $n-7$ sont des nombres pairs >10 et, d'après H, il existe des décompositions $n-3=q_1+q_2$, $n-5=q_3+q_4$, $n-7=q_5+q_6$, où $q_1, q_2, \ldots, q_6$ sont des nombres impairs et $q_1<q_2$, $q_3<q_4$, $q_5<q_6$. Si $q_1 \neq 3$, on a $3<q_1<q_2$ et $n=3+q_1+q_2$ est une somme de trois nombres premiers distincts. Soit donc $q_1=3$. Si encore $q_3=3$, on a $8+q_4=n>17$, d'où $q_4>9$ et $n=3+5+q_4$ est une somme de trois nombres premiers distincts. Si $q_3 \neq 3$, on a $q_3 \geqq 5$. Si $q_3>5$, on a $n=5+q_3+q_4$, où $5<q_3<q_4$ et n est une somme de trois nombres premiers distincts. Soit donc $q_3=5$. Si $q_5=3$, on a $10+q_6=n>17$, d'où $q_6>7$ et $n=3+7+q_6$ est une somme de trois nombres premiers distincts. Si $q_5=5$, on a $q_6 \geqq 7$, et s'il était $q_6=7$, on aurait $n=19=3+5+11$, ce qui est une somme de trois nombres premiers distincts. Si $q_6>7$, on a $n=5+7+q_6$ et n est une somme de trois nombres premiers distincts. Nous pouvons donc supposer que $q_5 \neq 3$ et $q_5 \neq 5$, donc que $q_5 \geqq 7$. S'il était $q_5>7$, on aurait $n=7+q_5+q_6$ et n serait une somme de trois nombres premiers distincts.

Nous pouvons donc admettre que $q_1=3$, $q_3=5$ et $q_5=7$. Alors, $q_2=n-6$, $q_4=n-10$, $q_6=n-14$. Or, des nombres $n-6$, $n-10$ et

---

* Conférence faite à la Session scientifique des mathématiciens bulgares, Sofia, octobre 1956.

** H. E. Richert, Mathematische Zeitschrift, 52 (1950), 342—343.

$n-14$ un est toujours divisible par 3, donc, s'il est premier, il est $=3$ ce qui est impossible, vu que $q_2 > q_1 = 3$, $q_4 > q_3 = 5$ et $q_6 > q_5 = 7$.

Nous avons ainsi démontré que $H \longrightarrow P$.

Or, supposons que la proposition P est vraie et soit $2n$ un nombre pair > 6. On a $8=3+5$, $10=3+7$, $12=5+7$, $14=3+11$ et pour démontrer que H est vraie, nous pouvons supposer que $2n \geqq 16$, d'où $2n+2 > 17$ et, d'après P, $2n+2=p+q+r$, où p, q et r sont premiers et $p<q<r$. Le nombre $2n+2$ etant pair, les nombres premiers p, q et r ne peuvent pas être tous les trois impairs. Donc un d'entre eux, évidemment celui qui est le plus petit, doit être le nombre 2, donc $p=2$, d'où $2n=q+r$ et $2n$ est une somme de deux nombres premiers distincts. Nous avons ainsi démontré que $P \longrightarrow H$.

L'équivalence $P \equiv H$ se trouve ainsi demontrée.

Il est à remarquer que le nombre 17 n'est pas une somme de deux ni de trois nombres premiers distincts.

On démontre d'une façon élémentaire qu'il existe une infinité de nombres naturels qui ne sont pas des sommes de moins que trois nombres premiers. Tels sont, par exemple, tous les nombres $30k+5$, où $k=1, 2, \ldots$ En effet, ce sont des nombres impairs composés, et s'il était $30k+5=p+q$, où p et q sont premiers, un de ces nombres, par exemple p, devrait être pair, donc $p=2$, d'où $q=3(10k+1)$ — composé, ce qui est impossible.

Reçu le 10. X. 1956

ВЪРХУ ЕКВИВАЛЕНТНОСТТА НА ДВЕ ХИПОТЕЗИ ЗА ПРОСТИТЕ ЧИСЛА

В. Серпински (Варшава)

РЕЗЮМЕ

Авторът доказва, че хипотезата H, че всяко четно число >6 е сума на две различни прости числа, е еквивалентна с твърдението, че всяко цяло число >17 е сума на три различни прости числа.

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ ГИПОТЕЗ О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ

В. Серпинский (Варшава)

РЕЗЮМЕ

Автор доказывает, что гипотеза H, что всякое четное число > 6 является суммой двух разных простых чисел, эквивалентна утверждению, что всякое целое число > 17 является суммой трех разных простых чисел.