SUR LES SOMMES EGALES DES CUBES DISTINCTS DE NOMBRES NATURELS*

W. Sierpiński (Varsovie)

Le but de cette communication est de démontrer d'une façon tout à fait élémentaire le théorème suivant:

Théorème. Quels que soient les nombres naturels m et $n \geqq m$, sauf les cas $m=n=1$ et $m=1$, $n=2$, il existe $m+n$ nombres naturels distincts $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$, tels que

$$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_m^3=b_1^3+b_2^3+\cdots+b_n^3.$$

Démonstration.

Lemme 1. k étant un nombre naturel, le nombre $(6^{k-1})^3$ est une somme de $2k-1$ cubes de nombres naturels distincts n'ayant pas d'autres diviseurs premiers outre 2, 3 et 5.

Démonstration du lemme 1. Le lemme est évidemment vrai pour $k=1$. Soit maintenant k un nombre naturel >1 et supposons que le lemme est vrai pour le nombre $k-1$. Il existe donc $2k-3$ nombres naturels $a_1, a_2, \ldots, a_{2k-3}$ n'ayant pas d'autres diviseurs premiers que 2, 3 et 5 et tels que $a_1<a_2<\cdots<a_{2k-3}$ et $(6^{k-2})^3=a_1^3+a_2^3+\cdots+a_{2k-3}^3$. Vu que $6^3=3^3+4^3+5^3$, il en résulte tout de suite

$$(6^{k-1})^3=(3a_1)^3+(4a_1)^3+(5a_1)^3+(6a_2)^3+(6a_3)^3+\cdots+(6a_{2k-3})^3,$$

où à droite on a $2k-1$ termes croissants (puisque $a_1<a_2<\cdots<a_{2k-3}$) et n'ayant pas d'autres diviseurs premiers que 2, 3 et 5. Le lemme 1 se trouve ainsi démontré par l'induction.

Lemme 2. Notre théorème est vrai pour $m=1$ et $n=3, 4, 5, \ldots$

Démonstration du lemme 2. Il résulte tout de suite du lemme 1 que le lemme 2 est vrai pour tous les nombres n impairs >1. On a $13^3=5^3+7^3+9^3+10^3$: le lemme 2 est donc vrai pour $n=4$. Soit maintenant n un nombre pair >4, $n=2k+2$, où k est un nom-

---

* Conférence faite à la Session scientifique des mathématiciens bulgares, Sofia, octobre 1956.

bre naturel, et supposons que le lemme 2 est vrai pour le nombre $n-2=2k$.

Il existe donc des nombres naturels $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ et a tels que $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2k} < a$ et $a^3 = a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_{2k}^3$ d'où

$$(6a)^3 = (3a_1)^3 + (4a_1)^3 + (5a_1)^3 + (6a_2)^3 + (6a_3)^3 + \cdots + (6a_{2k})^3,$$

où à droite on a $2k+2=n$ termes croissants. On conclut donc par l'induction que le lemme 2 est vrai pour tout nombre n pair >2. Le lemme 2 se trouve ainsi démontré.

Lemme 3. *k et l étant des nombres naturels, il existe $2k+2l+1$ nombres naturels distincts $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ $b_1, b_2, \ldots, b_{2l+1}$ tels que*

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_{2k}^3 = b_1^3 + b_2^3 + \cdots + b_{2l+1}^3.$$

Démonstration du lemme 3. Soient k et l deux nombres, naturels. D'après le lemme 1 il existe des nombres naturels $c_1, c_2, \ldots, c_{2k-1}$ et $d_1, d_2, \ldots, d_{2l-1}$, n'ayant pas de diviseurs premiers autres que 2, 3 ou 5 et tels que $c_1 < c_2 < \cdots < c_{2k-1}$, $d_1 < \cdots < d_{2l-1}$,

$$(1) \qquad (6^{k-1})^3 = c_1^3 + c_2^3 + \cdots + c_{2k-1}^3, \quad (6^{l-1})^3 = d_1^3 + d_2^3 + \cdots + d_{2l-1}^3,$$

d'où, vu l'égalité $13^3 + 14^3 = 1^3 + 3^3 + 17^3$, on obtient $(13.6^{k+l-2})^3 + (14.6^{l-1}c_1)^3 + (14.6^{l-1}c_2)^3 + \cdots + (14.6^{l-1}c_{2k-1})^3 = (6^{k+l-2})^3 + (3.6^{k+l-2})^3 + (17.6^{k-1}d_1)^3 + (17.6^{k-1}d_2)^3 + \cdots + (17.6^{k-1}d_{2l-1})^3$.

Le côté gauche est une somme de $2k$ cubes et le côté droit est une somme de $2l+1$ cubes. Tous ces $2k+2l+1$ cubes sont distincts, vu que le premier terme à gauche et les deux premiers à droite sont tous les trois distincts et non divisibles par 7 ni par 17, que les termes à gauche à partir du deuxième (vu la propriété des nombres c_i) vont en croissant, de même que les termes à droite à partir du troisième (vu la propriété des nombres d_i), et que les termes à gauche à partir du deuxième sont divisibles par 7 et les termes à droite à partir du troisième ne sont pas divisibles par 7, mais sont divisibles par 17. Le lemme 3 est ainsi démontré.

Lemme 4. *k et l étant des nombres naturels, il existe $2k+2l$ nombres naturels distincts $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$, $b_1, b_2, \ldots, b_{2l}$, tels que*

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_{2k}^3 = b_1^3 + b_2^3 + \cdots + b_{2l}^3.$$

Démonstration du lemme 4. Soient k et l deux nombres naturels et soient $c_1, c_2, \ldots, c_{2k-1}$ et $d_1, d_2, \ldots, d_{2l-1}$ les mêmes nombres comme dans la démonstration du lemme 3. On a donc les formules (1), d'où, d'après l'égalité $2^3 + 34^3 = 15^3 + 33^3$ on trouve

$$(2.6^{k+l-2})^3 + (34.6^{l-1}c_1)^3 + (34.6^{l-1}c_2)^3 + \cdots + (34.6^{l-1}c_{2k-1})^3 =$$

$$= (15.6^{k+l-2})^3 + (33.6^{k-1}d_1)^3 + (33.6^{k-1}d_2)^3 + \cdots + (33.6^{k-1}d_{2l-1})^3.$$

Le côté gauche est une somme de $2k$ cubes et le côté droit est une somme de $2l$ cubes. Tous ces $2k+2l$ cubes sont distincts, vu que les premiers termes à gauche et à droite sont distincts et ne sont pas divisibles ni par 17 ni par 11, et que (vu les propriétés des nombres c_i et d_i) à partir du deuxième, les termes à gauche et aussi à droite vont en croissant, les termes à gauche étant divisibles par 17 et les termes à droite etant divisibles par 11, mais pas par 17. Le lemme 4 est ainsi démontré.

Lemme 5. k et l étant des nombres naturels, il existe $2k+1+2l+1$ nombres naturels distincts a_1, $a_2, \ldots, a_{2k+1}$ et $b_1, b_2, \ldots, b_{2l+1}$, tels que

$$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_{2k+1}^3=b_1^3+b_2^3+\quad+b_{2l+1}^3.$$

Démonstration du lemme 5. Soient k et l deux nombres naturels et soient $c_1, c_2, \ldots, c_{2k-1}$ et $d_1, d_2, \ldots, d_{2l-1}$, les mêmes nombres comme dans la démonstration du lemme 3. On a donc la formule (1), d'où, d'après l'égalité $3^3+25^3+29^3=2^3+9^3+34^3$ on trouve

$$(3.6^{k+l-2})^3+(25.6^{k+l-2})^3+(29.6^{l-1}c_1)^3+(29.6^{l-1}c_2)^3+\cdots+(29.6^{l-1}c_{2k-1})^3=$$
$$=(2.6^{k+l-2})^3+(9.6^{k+l-2})^3+(34.6^{k-1}d_1)^3+(34.6^{k-1}d_2)^3+\ldots$$
$$+(34.6^{k-1}d_{2l-1})^3.$$

Le côté gauche est une somme de $2k+1$ cubes et le côté droit est une somme de $2l+1$ cubes. Tous ces $2k+1+2l+1$ cubes sont distincts, vu que les deux premiers termes à gauche et les deux premiers à droite sont tous les quatres distincts et non divisibles ni par 29 ni par 17, que les termes à gauche à partir du troisième et aussi ces à droite à partir du troisième (vu les propriétés des nombres c_i et d_i) vont en croissant, ces à gauche étant divisibles par 29 et ces à droite étant divisibles par 17 mais pas par 29. Le lemme 5 est ainsi démontré.

Notre théorème est une conséquence facile des lemmes 2, 3, 4 et 5.

Reçu le 10. X. 1956

ВЪРХУ РАВНИ СУМИ ОТ РАЗЛИЧНИ КУБОВЕ НА ЕСТЕСТВЕНИ ЧИСЛА

В. Серпински (Варшава)

РЕЗЮМЕ

Авторът доказва по елементарен път следната теорема:

Каквито и да са естествените числа m и $n \geqq m$, с изключение на случаите $m=n=1$ и $m=1$, $n=2$, съществуват $m+n$ различни естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$, такива, че

$$a_1^3+a_2^3+\quad+a_m^3=b_1^3+b_2^3+\cdots+b_n^3.$$

О РАВНЫХ СУММАХ РАЗЛИЧНЫХ КУБОВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В. Серпинский (Варшава)

РЕЗЮМЕ

Автор доказывает элементарным путем следующую теорему:

Каковы бы ни были натуральные числа n и $n \geqq m$, за исключением случаев $m=n=1$ и $m=1$, $n=2$, существует $m+n$ различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$, таких, что

$$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_m^3=b_1^3+b_2^3+\cdots+b_n^3.$$