SUR UNE FONCTION IMAGINEE PAR MINKOWSKI*

Arnaud Denjoy (Paris)

Minkowski désingna par la notation $?x$ une fonction continue qu'il définissait sur le segment $(0,1)$ comme il suit:

q et q' étant deux entiers positifs (nous les admettrons plus loin non négatifs), les deux fractions p/q et p'/q' sont dites adjacentes entre elles si $pq'-qp'=\pm 1$; en ce cas la fraction $(p+p')/(q+q')$ est dite leur médiante. Celle-ci est adjacente aux deux premières.

$?x$ se déduit de l'équation fonctionelle

$$?\left(\frac{p+p'}{q+q'}\right)=\frac{1}{2}\,?\left(\frac{p}{q}\right)+\frac{1}{2}\,?\left(\frac{p'}{q'}\right) \text{ avec } ?(0/1)=0 \text{ et } ?(1/1)=1\,;$$

$?x$ obtenue pour x rationnel, se complète par continuité.

La détermination progressive de $?x$ met en oeuvre les suites de Farey. La n^e, soit S_n, est formée de 2^n-1 (la première de 2) fractions croissantes, chacune adjacente à la fraction voisine, de part et d'autre ($0/1$ et $1/1$ composant S_1, sont les termes extrêmes de chacune des S_n); S_n s'obtient en ajoutant à S_{n-1} les médiantes des fractions formant cette dernière suite. S_2 est $(0/1,\ 1/2,\ 1/1)$: S_3 est $(0/1,\ 1/3,\ 1/2,\ 2/3,\ 1/1)$ etc. Les valeurs correspondantes de $?x$ quand x décrit S_n forment la suite croissante des fractions dyadiques $h/2^n$, pour $0\leqq h\leqq 2^n$.

Minkowski constata que $?x$ change les irrationelles de second degré en des nombres rationels, et réciproquement.

Figurons par la notation $(a_0,\ a_1,\ldots,a_n,\ldots)=a_0+1\,(a_1,\ldots,a_n,\ldots)$ une fraction continue, les a_n étant des entiers positifs, sauf le premier qui est quelconque. La n^e réduite de cette fraction, soit $R_n=P_n/Q_n$ est définie par $P_n=a_nP_{n-1}+P_{n-2}$, $Q_n=a_nQ_{n-1}+Q_{n-2}$ avec $P_0=a_0$, $Q_0=1$ et conventionellement $P_{-1}=1$, $Q_{-1}=0$.

La n^e suite de Farey S_n est formée des fractions $(0,\ a_1,\ldots,a_p)$ avec $a_1+\quad+a_p\leqq n$.

$x=(0,\ a_1,\ldots,a_n,\ldots)$ pour une fraction illimitée étant la limite de R_n, on constate que $?x$ s'exprime aisément à l'aide des quotients incomplets a_n et on en déduit cette remarque capitale: Pour $x>0$ (et $0<p/q,\ p'/q'<1,\ pq'-qp'=\pm 1$): $?[(px+p')/(qx+q')]=A\,?x+B$,

* Conférence faite à la Session scientifique des mathématiciens bulgares, Sofia, octobre 1956.

A et B étant indépendants de x. On est ainsi conduit à rechercher un rapport entre $?x$ et le groupe de Schwartz. Mais dans celui-ci les substitutions sont de module 1, et non pas -1, de façon que l'extension au plan complexe laisse invariant chacun des deux démiplans séparés par l'axe réel. J'ai donc considéré une fonction plus générale que $?x$ et où le role de p/q et de p'/q' ne soit pas le même si $pq'-qp'=1$. Soit α un nombre réel compris entre 0 et 1 ($?x$ correspondrait à $\alpha=1/2$; on pourra même supposer α complexe, avec $|\alpha|\leqq 1$, $|1-\alpha|\leqq 1$ et $|\alpha(1-\alpha)|<1$, le tout simultanément).

Pour $q\geqq 1$, $q'\geqq 1$, p/q et p'/q' sur le segment (0,1), considérons l'équation fonctionelle

$$F[(p+p')/(q+q'),\alpha]=\alpha F(p'/q',\alpha)+(1-\alpha)F(p/q,\alpha) \text{ si } pq'-qp'=1.$$

Cette condition ne sera pas limitée par nous au segment (0,1). L'entier quelconque, $n/1$ étant la médiante de $(n-1)/1$ et $1/0$ (cette dernière fractions s'introduit d'elle même dans les éléments comme réduite d'ordre -1 de tout nombre réel), nous pouvons prendre p/q et p'/q' dans tout le champs réel. Nous admettons la fraction $1/0$. Toute fraction $n/0$, même $(-1)/0$ est tenue pour réductible, et est exclue de la collection des fractions utilisées. En particulier $(-1)/0$ est systématiquement éliminée.

L'équation fonctionelle verifiée par une fonction $F(x,\alpha)$ l'est également par toute fonction $AF(x,\alpha)+B$, A et B étant indépendants de x. Nous choisirons $F(1/0,\alpha)=0$ et $F(0/1,\alpha)=1$, indépendamment de α. Nous trouvons alors que, si

$$\sigma_n=a_0+a_2+\cdots+a_{2m}\ (2m\leqq n),\quad \sigma'_n=a_1+a_3+\cdots+a_{2p+1}\ (2p+1\leqq n)$$

la fonction $F(x,\alpha)$ pour laquelle nous adoptons désormais la notation $\varkappa(x,\alpha)$ vaut $\sum_{n\geqq 0}(-1)^n\alpha^{\sigma_n}(1-\alpha)^{\sigma'_n}$.

Cette expression fait pressentir les rapports mutuels du nombre $y=\varkappa(x,\alpha)$, positif, variant en décroissant de $+\infty$ pour $x=-\infty$, à 0 pour $x=+\infty$, avec le développement du nombre réel x en fraction continue.

La fonction $\varkappa(x,\alpha)$ étudiée en elle-même jouit de propriétés intéressantes. Elle a la dérivée 0 sur une plénitude (sauf sur un ensemble de mesure nulle). Plus précisément, en un point x, les nombres dérivés supérieur Δ et inférieur δ, pour l'un ou pour l'autre côté, vérifient ces conditions: Ou bien $\delta=0$ (dérivée latérale nulle), ou bien $\Delta=-\infty$ (dérivée latérale infinie) ou bien $\Delta/\delta>17/16$, indépendammant de α. Quel que soit α la fonction $\varkappa(x,\alpha)$ ne possède de dérivée finie non nulle en aucun point.

Mais le plus grand intérêt présenté par cette fonction est dans la nature des transformations de $\varkappa(x,\alpha)$ quand x est remplacé par $x'=(px+p')/(qx+q')$, avec $pq'-qp'=1$.

Nous admettons $q=0$, sinon $q\geqq 1$. Avec $q=0$, q' sera 1. $x'=x+1$ donne la substitution fondamentale

$$\varkappa(x+1,\alpha)=\alpha\varkappa(x,\alpha). \tag{1}$$

Ainsi, $\varkappa(n, \alpha) = \alpha^n$. Supposons $q \geqq 1$. Pour $q = 1$ et $q' = 0$ $x' = -1/x$.

Si $q \geqq 1$ et $q' \geqq 1$, le développement de x' en fraction continue montre que, pour $x > 0$,

$$\varkappa(x', \alpha) = A\varkappa(x, \alpha) + B,$$

A et B étant indépendants de x. Pour $x = \infty$, $\varkappa(p/q, \alpha) = A$; pour $x = 0$

$$\varkappa(p'/q', \alpha) = A + B.$$

Si $pq' - qp' = -1$ (avec $q \geqq 1$, $q' \geqq 1$, pour $x > 0$)

$$\varkappa(x', \alpha) = C\varkappa(x, 1-\alpha) + D.$$

Pour $\alpha = 1/2$ la différence entre les deux cas $pq' - qp' = \pm 1$ disparaîtrait.

Si x decrit la totalité du champ réel, la transformation de $\varkappa(x', \alpha)$ ne peut pas se conserver. Car pour $x = -q'/q$, $\varkappa(x', \alpha)$ passe brusquement de $+\infty$ à 0.

Le champ des x réels se partage en une infinité d'intervalles (ξ, ξ') dans chacun desquels, pour la substitution bilinéaire $x' = (px + p')/(qx + q')$, $\varkappa(x', \alpha)$ est changé linéairement en $A\varkappa(x, \alpha) + B$, les coefficients A et B dépendant non pas de x seul, mais simplement des intervalles (ξ, ξ'). Que sont ces points séparateurs ξ des intervalles de validité des substitutions linéaires $A\varkappa(x, \alpha) + B$?

Considérons un développement

$$(\alpha_{-k}, \alpha_{-k+1}, \ldots, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \ldots)$$

ainsi défini: posons

$$r_n = p_n/q_n = (\alpha_{-k}, \ldots, \alpha_n) \quad (n \geqq -k)$$

avec

$$p_n = \alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = \alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

et $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$; $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$.

Les relations si-dessus peuvent se résoudre en p_{n-2}, q_{n-2} pour les valeurs négatives décroissantes de n. Nous demandons simplement que le dénominateur q_n de r_n soit un entier jamais négatif, mais nous n'excluons pas $q_n = 0$. Cette exigence sera respectée pourvu simplement que α_n soit un entier non négatif, sauf le premier α_{-k}. Les α_n nuls seront admis. On constate alors que $(\alpha, 0, \beta) = \alpha + \beta$; $(\alpha, \beta, 0) = \alpha$, $(\alpha, 0, 0, \beta) = (\alpha, \beta)$.

Un entier p est donc $(1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, 1)$ (p chiffres 1 alternant avec $p-1$ chiffres 0; $a_0 = (a_0 - k, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, 1)$ (k chiffres 1 précédés de chiffres 0).

Le développement normal $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ peut être ainsi converti en un développement dont tous les quotients sont uniquement 0 ou 1, le premier seul étant un entier quelconque inférieur ou au plus égal à a_0. Mais ce nouveau système donne des fractions continues auxquelles rien ne répond parmi les fractions normales.

$1/0 = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ (une infinité de 0 et de 1 alternant, en commencant par 1). Les réduites successives sont

$$1/1,\ 1/0,\ 2/1,\ 1/0,\ 3/1,\ 1/0, \ldots$$

D'après $0=1/(1/0)$, $0=(0, 1, 0, 1, \ldots)$ la même alternance indéfinie, en commencant par 0. Réduites: $0/1$, $1/1$, $0/1$, $1/2$, $0/1$, $1/3, \ldots$ On a une suite infinie de réduites décroissantes tendant vers 0. Le développement considéré de 0 est supérieur.

$$1=(1, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$$

Mais $0=-1+$ (1 divisé par 1) $=-1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$, dont les réduites successives sont $-1/1$, $0/1$, $1/2$, $0/1$, $-2/3$, $0/1$ ascendantes, tendant vers 0. Le développement est inférieur.

Les réduites inférieures à r_0, sont $r_{-2p}=a_0-p$, $r_{-2p+1}=1/0$ $(p\geqq 1)$. Tous les nombres entiers ne dépassant pas a_0 sont des réduites du nombre $x=(a_0, a_1, \ldots)$.

Si x est rationnel $=(a_0, a_1, \ldots, a_m)$, on peut donner à x un développement infini, en faisant suivre a_m de $1, 0, 1, \ldots$, développement de $1/0$. Il y a deux façons de terminer le développement normal de x, par $a_{m+1}+1$, si $a_m=1$, par a_m-1, si $a_m\geqq 2$.

On a dès lors pour x rationnel deux développements indéfinis vers la droite, l'un inférieur, l'autre supérieur, selon que les réduites, ajoutées en infinité, sont supérieures ou inférieures à x.

Enfin sous la double précision $r_0=a_0$, $r_{-1}=1/0$ on peut faire précéder $\alpha_0=1$ par une infinité de chiffres 0 et 1 alternant, α_{-1} étant 0.

On obtient ainsi le (ou les) développement canonique complet de x.

A tout nombre rationnel ou non correspondent une infinité de réduites formées d'entiers négatifs et consécutifs.

Si x est rationnel, le développement canonique complet est double.

Les points séparateurs des intervalles de validité des formules $\varkappa(x', \alpha)=A\varkappa(x, \alpha)+B$ coïncident avec les réduites du développement supérieur canonique complet de $-q'/q$.

La fonction $\varkappa(\zeta, \alpha)$ dans le demi-plan supérieur complexe

Il est naturel de se demander si l'on peut considérer la fonction réelle $\varkappa(x, \alpha)$ comme la limite, par certains chemins, d'une fonction complexe $\varkappa(\zeta, \alpha)$ définie dans le demi-plan supérieur. On doit supposer que toute substitution $\zeta'=(pz+p')/(qz+q')$ change linéairement $\varkappa(\zeta, \alpha)$ du moins autour de tout point ζ du demi-plan supérieur.

Mais la substitution $\zeta'=-1/\zeta$ est une involution simple de points doubles i et $-i$; $\zeta'=1-1/\zeta$ est une involution double de points doubles $\theta=(1+i\sqrt{3})/2$ et $(-1+i\sqrt{3})/2$ dans le demi-plan supérieur, soit θ et $-1+\theta$ (ou θ^2). La fonction $\varkappa(\zeta, \alpha)$ ne pourrait être uniforme dans le demi-plan supérieur que si les transformations linéaires de $\varkappa(\zeta, \alpha)$ correspondant au substitutions précédentes étaient elles aussi des involutions, simple ou double respectivement. On constate que ceci exigerait $\alpha=e^{i\pi/3}=\theta$, ce qui est exclu. Dès lors $\varkappa(\zeta, \alpha)$ ne pourra être uniforme dans le demi-plan supérieur que si les points i et θ sont joints à l'axe réel par des coupures. Mais pareillement tous les points $(pi+p')/(qi+q')$ et $(p\theta+p')/(q\theta+q')$ sont des points doubles involutifs pour certaines substitutions du groupe de Schwartz. Tous ces points doivent être englobés dans un système de coupures ne divisant pas le demi-plan supérieur.

On sait comment, pour le groupe de Schwartz, on forme les polygones de Poincaré, à côtés circulaires orthogonaux à l'axe réel (droites dans la géometrie de Lobatchewsky), polygones dont chacun contient (du moins pour la région supérieure) un transformé et un seul d'un point quelconque ζ du demi-plan, tandis que l'on obtient la fonction $t(\zeta)$, invariante par toutes les transformations du groupe.

On applique conformément le demi-plan supérieur des t sur le triangle $\tau\,(\infty,\ -1+\theta,\ i)$ des ζ avec les correspondances $(\zeta=\infty,\ t=0)$, $(\zeta=-1+\theta,\ t=1)$, $(\zeta=i,\ t=\infty)$. Puis on opère par symetries par rapport aux côtés des deux triangles appliqués (dans celui des t, les 3 angles valent π).

Les triangles déduits de τ par symétries répétées par rapport aux côtés issus de ∞ forment une alvéole $A(1/0)$, bordée par la ligne brisée indéfinie $\Lambda\left(\frac{1}{0}\right)$ de sommets successifs $(n-1+\theta)$, $(n+i)$ $(-\infty<n$ entier $<\infty)$.

Cette alvéole est invariante par la substitution $\zeta'=\zeta+1$.

La transformation de $A(1/0)$ par $\zeta'=(p\zeta+p')/(q\zeta+q')$ donne une alvéole $A(p/q)$ formée des triangles transformés de τ ayant leur sommet réel en p/q. Cette alvéole est indépendante de la fraction p/q, c'est-à-dire de l'addition à p', q' de np, nq respectivement, n entier. Si p/q est la médiante de p_0/q_0 et de p_1/q_1 $(p_0/q_0<p/q<p_1/q_1)$ nous choisirons pour transformer $A(1/0)$ la substitution $T(p/q)$, $\zeta'=(p\zeta-p_1)/(q\zeta-q_1)$. Dès lors nous considérons le système de coupures $L(p/q)$ se déduisant par $T(p/q)$ respectivement de la partie de $\Lambda(1/0)$ allant de l'infini négatif jusqu'au point i.

Le système des coupures $L(p/q)$, pour toutes les fractions p/q, où $q\geqq 1$, ne divise pas le plan. Il contient tous les points critiques de $x(\zeta,\alpha)$.

Le contour $\Lambda(p/q)$ de l'alvéole $A(p/q)$ renferme une infinité d'arcs étrangers aux coupures. Le premier après $L(p/q)$, homologue de (i,θ), est le seuil de $A(p/q)$. On a les propriétés suivantes:

1°. Un point ζ mobile, glissant constamment au voisinage infiniment proche d'un contour d'alvéole, en se déplaçant dans le sens positif par rapport de l'alvéole où il est intérieur, et partant du bord supérieur de $\Lambda(1/0)$ à l'infini négatif, tendant vers le nombre réel x, tantôt glissera sur des seuils d'alvéoles où il ne pénètre pas, tantôt coupera des seuils d'alvéoles. Les fractions-sommets de ces alvéoles constituent la suite des réduites finies du développement canonique complet de x. On a une réduite normale quand glissement et franchissement s'échangent. Ainsi se trouve expliquée le génèse des développements canoniques complets.

2°. Quand ζ est dans une alvéole, ζ' est intérieur à une autre et $\varkappa(\zeta', \alpha)$ est linéaire en $\varkappa(\zeta, \alpha)$. Les coefficients changent quand ζ franchit un seuil d'alvéole, alors que le transformé ζ' franchit une coupure. Les sommets des alvéoles se raccordant sur le seuil donnent les points séparateurs des formules de validité des transformations de $\varkappa(x, \alpha)$ dans le champ réel.

Enfin

$$\varkappa(\zeta, \alpha) = h \int_0^t t^a (1-t)^b (t-c)^{-2}\, dt + t^a (1-t)^b P(t),$$

h, a, b, c étant des fonctions de α et $P(t)$ une fonction uniforme quelconque.

Reçu le 14. X. 1956

BIBLIOGRAPHIE

Denjoy, A. C. R. de l'Acad. des sci., **194** (1932), 44 ; **198** (1934), 44 ; **242** (1956), pp. 1817, 1924. Note reproduite dans Un demi-siècle de Notes aux Académies, p. 177—200 et *46—51*. Journ. de math. pur. et appl., article reproduit dans Articles et Mémoires, p. 925—971.

ВЪРХУ ЕДНА ФУНКЦИЯ НА МИНКОВСКИ

А. Данжуа (Париж)

РЕЗЮМЕ

Нека p/q, p'/q' (p, p', q, q' цели числа) са две съседни дроби ($pq'-qp'=\pm 1$). Ако q и $q' \geqq 0$, дробта $p+p'/q+q'$ се нарича медиантна на p/q и p'/q'. Тя е адюнгирана и с двете.

Изхождайки от 0/1, 1/1, получаваме редиците на Фарей, като всяка една от тях се получава от предидущата чрез прибавяне на медиантните, образувани от елементите на предидущата.

Минковски разглежда непрекъснатата функция $?x$, дефинирана в (0,1) за рационални x с $?0/1=0$, $?1/1=1$ и $?\frac{p+p'}{q+q'}=\frac{1}{2}?\frac{p}{q}+$ $+\frac{1}{2}?\frac{p'}{q'}$. $?x$ превръща ирационалните числа от 2. степен в рационални.

Нека $0<\alpha<1$ или по-общо $|\alpha|\leqq 1$, $|1-\alpha|\leqq 1$, $|\alpha(1-\alpha)|\leqq 1$ и $pq'-qp'=1$, $q\geqq 0$, $q'\geqq 1$ и нека положим

$$\varkappa(1/0)=0,\quad \varkappa(0/1)=1,\quad \varkappa\left(\frac{p+p'}{q+q'},\ \alpha\right)=\alpha\varkappa\left(\frac{p'}{q'},\ \alpha\right)+(1-\alpha)\ \varkappa\left(\frac{p}{q},\ \alpha\right).$$

По-нататък, нека x е произволно реално число, развито в нормална верижна дроб $x=(a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots)=a_0+1\,(a_1,\ a_2,\ldots)$, където a_i са цели $\geqq 1$ за $i\geqq 1$. Ако положим

$$\sigma_n=\sum_{2m\leqq n} a_{2m}\quad \text{и}\quad \sigma_n'=\sum_{2p-1\leqq n} a_{2p-1},$$

получаваме

$$\varkappa(x,\ \alpha)=\sum_{n\geqq 0}\ (-1)^n\,\alpha^{\sigma_n}\,(1-\alpha)^{\sigma_n'}.$$

$y=\varkappa(x,\alpha)$ е положителна, намаляваща от ∞ за $x=-\infty$ до 0 за $x=+\infty$. $\alpha^{-x}\varkappa(x,\alpha)$ е периодична с период 1.

При дадено $y>0$ числата a_i се получават по следния начин (като оставим на страна случая на рационално x):

$$\alpha^{a_0+1}<y<\alpha^{a_0}\quad \text{и}\quad \alpha^{a_0}(1-y_1),\ \text{откъдето}\ 0<y_1<1-\alpha,$$

$(1-\alpha)^{a_1+1} < y_1 < (1-\alpha)^{a_1}$ и $y_1 = (1-\alpha)^{a_1}(1 \quad y_2)$, откъдето $0 < y_2 < \alpha$ и т. н.

Тези релации показват доколко свойствата на функцията $\varkappa(x, \alpha)$ и тези на развитията на реалните числа във верижна дроб се взаимно определят.

Доказва се, че $\varkappa(x, \alpha)$ има почти навсякъде производна, равна на 0, и че в никоя точка тя няма крайна отрицателна производна. (Ако две нейни производни (горна и долна) от една страна биха били крайни и отрицателни, тяхното отношение би надминавало винаги константата 17/16 независимо от x и α.)

I. Функцията $\varkappa(x, \alpha)$ притежава следното забележително свойство. Ако $q \geq 1$, $pq' - qp' = 1$ и ако $x' = (px+p')/(qx+q') = T(x)$,

$$\varkappa(x', \alpha) = A + B\varkappa(x, \alpha),$$

където коефициентите A и B не зависят от x, но не върху цялата реална ос (съгласно $q \geq 1$), а върху интервали, отделени от точки, свързани с дробта $-q'/q$. Тези точки са приближените дроби в канонично пълно развитие на $-q'/q$ във верижна дроб. Това развитие $(\ldots, \alpha_n, \ldots)$ се получава, като допуснем някое α_n да е равно на цялото число 0, а останалите, с изключение на първото, считаме редуцирани към единица. Имаме

$$(a, 0, b) = a + b, \quad (a, b, 0) = a, \quad (a, 0, 0, b) = (a, b),$$

$$1/0 = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots); \quad a = (a, 1/0) = (a-1, 1, 1/0).$$

Тези формули пораждат горното и долното развитие на цялото число a.

Развитието може да бъде продължено и вляво съгласно

$$a = (a \quad k, 0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1)$$

с k цифри, равни на 1.

II. Естествено е да се запитаме дали не може функцията $\varkappa(x, \alpha)$ да се получи като граница на една функция $\varkappa(z, \alpha)$, дефинирана в горната (или долна) комплексна полуравнина, като по необходимост реалната ос бъде един разрез за тази функция. Тази функция трябва да допуска всички субституции $A + B\varkappa(z, \alpha)$ за реално z, ако

$$z' = \frac{pz+p'}{qz+q'} = T(z), \quad q \quad 0, \quad pq' \quad qp' = 1.$$

$T(z)$ образуват групата на Шварц, имаща за пораждащ многоъгълник четириъгълника с върхове $(1/0, \theta - 1, i, \theta)$ и със страни, перпендикулярни на реалната ос, където $\theta \quad e^{i\pi/3}$. Многоъгълниците, конгруентни с него и имащи за връх $1/0$, образуват една алвеола $A(1/0)$, ограничена от начупената линия $\Lambda(1/0)$ с върхове $n+i$, $n+\theta$ $(-\infty < n < +\infty)$. $T(z)$ трансформира $A(1/0)$ в $A(p/q)$. Всички тези алвеоли са дизюнктни, тяхната сума е равна на полуравнината. Когато $q' \quad 1$ и ако p/q е медиантната на $(\quad p')/-q'$ и $(p+p')/(q+q')$.

нека $L(p/q)$ е образът чрез $T(z)$ на дъгата на $\Lambda(1/0)$ от $-\infty+i$ до i и нека $\sigma(p/q)$ е образът на отсечката (i, θ).

Групата на Шварц съдържа инволюторните субституции $z'=-1/z$ и $z''=1/(1-z)$ с двойни точки i и θ.

Аналогично точките $(pi+p')/(qi+q')$ и $(p\theta+p')/(q\theta+q')$ са двойни точки на инволюторни субституции от същата група. За да може $\varkappa(z, \alpha)$ да бъде еднозначна, трябва субституциите, имащи тези двойни точки, да съответствуват също инволюции с коефициенти съответно $B=-1$ и $B=\theta$ или θ^2. Това обаче е невъзможно.

Ето защо е необходимо да се униформизира $\varkappa(z, \alpha)$ чрез една система Ω от разрези, съдържащи всички критични точки, без да се разделя равнината.

Съвкупността $L(p/q)$ представлява точно такава система Ω. Тя притежава следните свойства:

1. Когато z се хлъзга отвътре по границите на алвеолите и влиза в тях през праговете им $\sigma(p/q)$, z клони към една определена точка x от реалната ос.

Редицата на праговете, които z е минала (външно) или е пресекла, дава приближените дроби на пълното канонично развитие, безкрайно в двете посоки, на x.

2. Отделящите точки на формулите $\varkappa(x', \alpha)=A+B\varkappa(x, \alpha)$ за реално x са начала на разрезите $L(\lambda/\mu)$, такива, че z' пресича $L[T(\lambda/\mu)]$, когато z преминава през прага на $A(\lambda/\mu)$.

Дробите λ/μ представляват приближени дроби на пълното горно канонично развитие на $-q'/q$.

ОБ ОДНОЙ ФУНКЦИИ МИНКОВСКОГО

А. Данжуа (Париж)

РЕЗЮМЕ

Пусть p/q, p'/q' (p, p', q, q' целые числа) две соседние дроби ($pq'-qp'=\pm 1$). Если q и $q'\geqq 0$, дробь $p+p'/q+q'$ называется медиантой дробей p/q, p'/q'. Она соседна с ними. Исходя из $0/1$, $1/1$ мы получаем ряды Фарея, так что каждый ряд получается из предыдущего вставлением медиантах образованных парами соседных элементов предыдущего ряда.

Минковский рассматривает непрерывную функцию $?x$ определенную в $(0, 1)$ для рациональных x следующим образом:

$$?\,0/1=0,$$

$$?\,1/1=1$$

и

$$?\frac{p+p'}{q+q'}=\frac{1}{2}\,?\frac{p}{q}+\frac{1}{2}\,?\frac{p'}{q'}.$$

$?x$ превращает иррациональных чисел 2-й степени в рациональных.

Положим для действительного $0<\alpha<1$ (или более обще для $|\alpha|\leqq 1$, $|1-\alpha|\leqq 1$, $|\alpha(1-\alpha)|\leqq 1$) и $pq'-qp'=1$, $q\geqq 0$, $q'\geqq 1$:

$$\varkappa(1/0)=0,\ \varkappa(0/1)=1,\ \varkappa\left(\frac{p+p'}{q+q'},\ \alpha\right)=\alpha\,\varkappa\left(\frac{p'}{q'},\ \alpha\right)+(1-\alpha)\ \varkappa\left(\frac{p}{q},\ \alpha\right).$$

Пусть дальше x произвольное действительное число, представленное нормальной непрерывной дробью $x=(a_0, a_1, a_2, \ldots)=a_0+$ $+1/(a_1, a_2, \ldots)$, где a_i целые $\geqq 1$ для $i\geqq 1$. Если положим

$$\sigma_n=\sum_{2m\leqq n} a_{2m} \quad \text{и} \quad \sigma_n'=\sum_{2p-1\leqq n} a_{2p-1},$$

находим

$$\varkappa(x, \alpha)=\sum_{n\geqq 0}(-1)^n\,\alpha^{\sigma_n}\,(1-\alpha)^{\sigma_n'}.$$

$y=\varkappa(x, \alpha)$ положительна, убивает от ∞ для $x=-\infty$ до 0 для $x=+\infty$. $\alpha^{-x}\,\varkappa(x, \alpha)$ периодическая с периодом 1.

При данном $y > 0$ числа a_i получаются следующим образом (оставляя в стороне случай рационального x):

$$\alpha^{a_0+1} < y < \alpha^{a_0} \text{ и } \alpha^{a_0}(1-y_1), \text{ из этого } 0 < y_1 < 1-\alpha,$$

$$(1-\alpha)^{a_1+1} < y_1 < (1-\alpha)^{a_1} \text{ и } y_1 = (1-\alpha)^{a_1}(1-y_2), \text{ из этого } 0 < y_2 < \alpha$$

и т. д.

Эти соотношения показывают взаимосвязь между свойствами функции $\varkappa(x, \alpha)$ и разложения в непрерывную дробь.

Можно показать что производная функции $\varkappa(x, \alpha)$ изчезает почти всюду и что эта производная нигде не является конечной и отрицательной. (Если две производные с одной стороне были бы конечны и отрицательны, их отношение превозходило бы $17/16$, независимо от x и α.)

I. Функция $\varkappa(x, \alpha)$ имеет следующее замечательное свойство. Пусть $q \geqq 1$, $pq' - qp' = 1$, если $x' = (px+p')/(qx+q') = T(x)$,

$$\varkappa(x', \alpha) = A + B\varkappa(x, \alpha),$$

где коэффициенты A и B не зависят от x, однако, не на всей действительной оси ($q \geqq 1$), а на интервалах отделенными точками связанными с дробью $-q'/q$. Эти точки являются подходящими дробями полного канонического развития $-q'/q$ в непрерывную дробь. Это развитие получается если некоторое из α_n равно нулю, а другие (изключая первого) сведены к единице. Имеем

$$(a, 0, b) = a+b, \ (a, b, 0) = a, \ (a, 0, 0, b) = (a, b,$$

$$1/0 = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots); \ a = (a, 1/0) = (a-1, 1, 1/0),$$

где последные формулы порождают соответно каноническое верхнее и каноническое нижнее развитие целого числа a.

Развитие можно продолжить неограниченно и влево согласно $a = (a-k, 0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1)$, k цифрами, равными 1.

II. Естественно поставить вопрос о том, можно ли получить $\varkappa(x, \alpha)$ как предел одной функции $\varkappa(z, \alpha)$, определенной в верхней или нижней комплексной полуплоскости, где действительная ось по необходимости будет вырезом этой функции. Кроме того, эта функция должна допускать для действительного z все субституции вида $A + B\varkappa(z, \alpha)$ если

$$z' = \frac{pz+p'}{qz+q'} = T(z), \quad q \quad 0, \quad pq' - qp' \quad 1.$$

$T(z)$ образуют группу Шварца, имеющую в качестве образующего многоугольника четырехугольник (сторонами перпендикулярными действительной осы) $(1/0, \theta \quad 1, i, \theta)$, где $\theta = e^{i\pi\,3}$. Многоугольники, конгруентные с ним и с вершиной $1/0$, образуют альвеолу $A(1/0)$, ограниченную ломанной $\Lambda(1/0)$ с вершинами $n+i, n+\theta$ ($\infty < n < +\infty$). $T(z)$ преобразует $A(1/0)$ в $A(p/q)$. Все эти альвеолы дизьюнктны, а их соединение равняется полуплоскости. Если $q' \quad 1$ и если

p/q медианта $(-p')/-q'$ и $(p+p')/(q+q')$, пусть $L(p/q)$ есть образ при трансформации дуги $\Lambda(1/0)$, идущий от $-\infty+i$ до i и пусть $\sigma(p/q)$ образ отрезка (i, θ).

Группа Шварца содержит инволютные субституции $z'=-1/z$ и $z''=1/(1-z)$ с двойными точками i и θ.

Аналогично точки $(pi+p')/(qi+q')$ и $(p\theta+p')/(q\theta+q')$ являются двойними точками инволютных субституций этой группы.

Для того, чтобы $\varkappa(z, \alpha)$ была однозначна, необходимо, чтобы субституциям с этими двойними точками соответствовали инволюции с коэффициентами $B=-1$ и $B=\theta$ или θ^2. Однако это невозможно.

Итак, необходимо униформизировать $\varkappa(z, \alpha)$ системой Ω вырезов, содержащих все критические точки, не разделяя при этом плоскость.

Множество $L(p/q)$ является точно такой системой Ω. Оно имеет следующие замечательные свойства:

1°. Если z скользит изнутри по границам альвеол в директном направлении по отношению к ним и входит в них через порог $\sigma(p/q)$, то z стремится к одной определенной точке действительной оси.

Последовательность порогов, обойденных z (извне) или через которых z перешла, дает подходящие дроби полного бесконечного в двух направлениях канонического развития x.

2°. Отделяющие точки в формулах $\varkappa(x', \alpha)=A+B\varkappa(x, \alpha)$ для действителного x, являются началами вырезов $L(\lambda/\mu)$, таких, что z' пересекает $L[T(\lambda/\mu)]$, когда z переходит через порог $A(\lambda/\mu)$.

В дробях λ/μ мы вновь находим подходящие дробы верхного, полного канонического развития $-q'/q$.