SUR LES FONCTIONS MONOGENES AU SENS DE FEODOROV*

Gr. C. Moisil (Bucarest)

I

Le système d'équations de Cauchy—Riemann pour la monogénéité des fonctions d'une variable complexe

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

et le système de Cauchy—Poincaré pour la monogénéité des fonctions de plusieurs variables complexes

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial v}{\partial y_i}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_i}+\frac{\partial v}{\partial x_i}=0$$

jouissent de la propriété suivante: si (u^*, v^*) et (u^{**}, v^{**}) sont deux systèmes d'intégrales, alors (u, v), où

$$u=u^*u^{**}-v^*v^{**}$$

$$v=u^*v^{**}+v^*u^{**},$$

est aussi un système d'intégrales.

De même le système

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\quad\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

ainsi que les systèmes analogues à $2n$ variables — jouissent de la

* Conférence faite à la Session scientifique des mathématiciens bulgares, Sofia, octobre 1956.

propriété: si (u^*, v^*) et (u^{**}, v^{**}) sont deux système d'intégrales, alors (u, v), où

$$u = u^* u^{**} + v^* v^{**}$$
$$v = u^* v^{**} + v^* u^{**},$$

est aussi un système d'intégrales.

Considérons un système de m équations aus dérivées partielles du premier ordre à coefficients constants

$$\text{(I)} \qquad \sum_{h,r} \gamma_{ihs} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x^s} = 0$$

à n variables indépendantes $x^1, \ldots, x^n$ et à r fonctions inconnues $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$.

Nous étudierons la propriété suivante, que nous appellerons propriété Q: il existe r^3 constantes c_{ijk} telles que si $(\varphi_1^*, \ldots, \varphi_r^*)$ et $(\varphi_1^{**}, \ldots, \varphi_r^{**})$ sont deux systèmes d'intégrales, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$, où

$$\text{(II)} \qquad \varphi_i = \sum c_{ihk} \varphi_h \varphi_k^{**},$$

est aussi un système d'intégrales.

II

Il y a une classe intéressante de système ayant la propriété Q; ce sont les systèmes qui donnent les conditions de monogénéité au sens de *Feodorov* [1], [2], [3].

Soit un système de nombres hypercomplexes commutatif, ayant la base $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ et soit

$$\omega = e_1 \omega_1 + \ldots + e_r \omega_r$$

un pfaffien hypercomplexe, ω_i étant des formes linéaires de différentielles

$$\omega_i = \alpha_{i1}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 + \ldots + \alpha_{in}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^n.$$

Une fonction hypercomplexe

$$\varphi = \varphi_1 e_1 + \ldots + \varphi_r e_r$$

de ces n variables: $\varphi_i = \varphi_i(x^1, \ldots, x^n)$ est monogène au sens de Feodorov s'il existe une fonction hypercomplexe φ' telle que

$$d\varphi = \varphi' \omega.$$

Les conditions de monogénéité au sens de Feodorov s'obtiennent en éliminant φ' entre les équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi' \sum_j e_j \alpha_{ji}.$$

On obtient un système linéaire à coefficients variables qui généralise le système de Cauchy. Ce système jouit de la propriété Q. En effet si φ^* et φ^{**} sont monogènes au sens de Feodorov, $\varphi=\varphi^*\varphi^{**}$ le sera aussi, comme on le voit facilement.

En prenant le système de nombres complexes ordinaire et le système de nombres complexes hyperbolique on tombe sur les systèmes d'équations du § I.

Applications à la théorie de l'élasticité. Si σ_x, σ_y, τ sont les composantes de la tension et si ω est la rotation locale, pour l'équilibre plan d'un corps isotrope, *L. S. Sobrero* a montré que les équations aux dérivées partielles qui lient ces fonctions [5], [6], [7] sont les conditions de monogénéité de la fonction

$$-\sigma_x+j^2\sigma_y+j(1+j^2)\tau+\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\,j\omega$$

par rapport à

$$\omega=dx-\frac{1}{j}\,dy$$

l'unité hypercomplexe j étant définie par

$$(1+j^2)^2=0.$$

On conclut que si $(\sigma_x^*,\ \sigma_y^*,\ \tau^*,\ \omega^*)$, $(\sigma_x^{**},\ \sigma_y^{**},\ \tau^{**},\ \omega^{**})$ sont deux systèmes d'intégrales des équations de l'élasticité isotrope plane,

$$\sigma_x=-\sigma_x^*\sigma_x^{**}+\sigma_y^*\sigma_y^{**}+\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}(\tau^*\omega^{**}+\tau^{**}\omega^*),$$

$$\sigma_y=-\sigma_x^*\sigma_y^{**}-\sigma_x^{**}\sigma_y^*-2\sigma_y^*\sigma_y^{**}-\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}(\tau^*\omega^{**}+\tau^{**}\omega^*)+$$

$$+\frac{16\mu^2(\lambda+\mu)^2}{(\lambda+2\mu)^2}\omega^*\omega^{**},$$

$$\tau=-(\sigma_x^*+\sigma_y^*)\tau^{**}-(\sigma_x^{**}+\sigma_y^{**})\tau^*+\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}(\sigma_y^*\omega^{**}+\sigma_y^{**}\omega^*),$$

$$\omega=-(\sigma_x^*+\sigma_y^*)\omega^{**}-(\sigma_x^{**}+\sigma_y^{**})\omega^*$$

le sont aussi.

Applications à l'hydrodinamique des liquides visqueux. Comme nous l'avons montré [7], [8] les relations entre les composantes de la tension et le tourbillon dans le mouvement plan, lent, permanent d'un liquide visqueux incompressible, sont les conditions de monogénéité de la fonction

$$-\sigma_x+j^2\sigma_y+j(1+j^2)\tau+4\mu\omega$$

dans le même système de nombres hypercomplexes, de sorte que si $(\sigma_x^*,\ \sigma_y^*,\ \tau^*,\ \omega^*)$ et $(\sigma_x,\ \sigma_y^{**},\ \tau^{**},\ \omega^{**})$ sont les composantes de la tension et le tourbillon pour deux mouvements plans, lents, permanents d'un liquide visqueux incompressible

$$\sigma_x = -\sigma_x^* \sigma_x^{**} + \sigma_y^* \sigma_y^{**} + 4\mu(\tau^*\omega^{**} + \tau^{**}\omega^*),$$

$$\sigma_y = -\sigma_x^* \sigma_y^{**} - \sigma_x^{**} \sigma_y^* - 2\sigma_y^* \sigma_y^{**} - 4\mu(\tau^*\omega^{**} + \tau^{**}\omega^*),$$

$$\tau = -(\sigma_x^* + \sigma_y^*)\tau^{**} - (\sigma_x^{**} + \sigma_y^{**})\tau^* + \\ + 4\mu(\sigma_y^* \omega^{**} + \sigma_y^{**} \omega^*),$$

$$\omega = -(\sigma_x^* + \sigma_y^*)\omega^{**} - (\sigma_x^{**} + \sigma_y^{**})\omega^*$$

le sont pour un troisième mouvement.

Application à la théorie de l'élasticité des corps non isotropes. Les équations de l'équilibre plan d'un corps élastique non isotrope peuvent aussi être considerées comme conditions de monogénéité pour certaines fonctions hypercomplexes [9]. On en tire des conclusions analogues.

Remarques sur un cas particulier. Si le pfaffien ω est la différentielle totale d'une fonction hypercomplexe g et si le système admet un élément 1, la fonction g est monogène donc les fonctions g^2, g^3, ... et les séries convergentes

$$\sum a_n g^n$$

sont des fonctions monogènes (à conditions qu'elles puissent être dérivées terme à terme).

III

Pour que les expression (II) soient des intégrales du système (I) lorsque les $(\varphi_1^*, \ldots, \varphi_r^*)$ et les $(\varphi_1^{**}, \ldots, \varphi_r^{**})$ le sont il faut et il suffit que les équations

$$\sum_{i,h,k,l} \gamma_{ijl}\, c_{jhk} \left(\varphi_h \frac{\partial \varphi_k^{**}}{\partial x^l} + \varphi_k^{**} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x^l} \right) \quad 0$$

soient des conséquences des systèmes

$$\sum_h \gamma_{ihl} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x^l} = 0$$

$$\sum_k \gamma_{jkl} \frac{\partial \varphi_k^{**}}{\partial x^l} \quad 0.$$

On doit avoir

$$\sum_{j,h,k} \gamma_{ijl}\, c_{jhk} \left(\varphi_h^* \frac{\partial \varphi_k^{**}}{\partial x^l} + \varphi_k^{**} \frac{\partial \varphi_h^*}{\partial x^l} \right) =$$

$$\sum_{k,j} a_{ijk}\, \varphi_k^{**} \sum_{h,r} \varphi_{jhl} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x^l} +$$

$$+ \sum_{h,j} b_{ijh}\, \varphi_h \sum_{k,r} \varphi_{jkl} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^l}$$

avec des nouvelles constantes a_{ijk}, b_{ijk}, donc il faut et il suffit qu'on ait

$$\sum_j \gamma_{ijl}\, c_{jhk} = \sum_j a_{ijk}\, \gamma_{ihl}$$

(III)
$$\sum_j \gamma_{ijl}\, c_{jhk} = \sum_j b_{ijh}\, \gamma_{ikl}.$$

Pour que le système (I) ait la propriété Q il faut et il suffit que le système (III) avec les inconnues a_{ijl}, b_{ijl}, c_{ijl} ait une solution. Ce système est un système à $2mnr^2$ équations et $3r^3$ inconnues, de sorte que les γ_{ijl} ne peuvent pas être arbitraires.

E t u d e d'u n c a s p a r t i c u l i e r. Soit $e_1, \ldots, e_r$ des unités hypercomplexes; posons

$$\varphi = \varphi_1 e_1 + \ldots + \varphi_r e_r.$$

Les relations (II) équivalent à la multiplication

$$\varphi = \varphi^* \varphi^{**}$$

si le système est défini par la loi de multiplication

(IV)
$$e_h e_k = \sum_j e_i c_{ihk}.$$

Supposons le système associatif et commutatif:

$$c_{ihk} = c_{ikh}$$

$$\sum_t c_{jtm}\, c_{thk} = \sum_t c_{jht}\, c_{tkm}.$$

Le système (III) admet les solutions

$$\gamma_{tij} = c_{tij}$$

$$a_{ijt} \quad c_{itj}$$

$$b_{tij} = c_{tji}$$

donc le système (I) est

$$\sum_{h,l} c_{ihl} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x^l} = 0.$$

Si nous multiplions par e_i le système devient

$$\sum_{h,l} e_i c_{ihl} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x^l} = 0$$

ou

$$\sum e_h e_l \frac{\partial \varphi_h}{\partial x^l} = 0.$$

Avec

$$D \quad \sum e_h \frac{\partial}{\partial x^h}$$

il devient

(V) $$D\varphi=0.$$

L'operation D est une extension de l'operation de dérivation aréolaire de *D. Pompeiu* [10], [11], [12], [13]. Le système (V) équivaut aux relations globales

$$\int \quad \int \varphi d\sigma=0,$$

où

$$d\sigma=e_1 dx^2 \ldots dx^n+\ldots+e_n dx^1 \ldots dx^{n-1}.$$

Remarques sur le cas général. Supposons le système non associatif et non commutatif, mais supposons $m=n=r$. Introduisons, en dehors de la loi de multiplication (IV) les trois lois de multiplication:

$$e_h \times e_k=\sum_i e_i \gamma_i R_h$$

$$e_h \underset{1}{\times} e_k=\sum_i e_i a_{ikh}$$

$$e_h \underset{2}{\times} e_k=\sum_i e_i b_{ikh}.$$

Les équations (III) montrent que

$$\begin{aligned}
e_l \times (e_h e_k) &= \sum e_l \times \sum e_j c_{jhk} \\
&= \sum (e_l \times e_j) c_{jhk} \\
&= \sum e_i \gamma_{ijl} c_{jhk} \\
&\sum e_i a_{ijk} \gamma_{jhl} \\
&= \sum (e_k \underset{1}{\times} e_j) \gamma_{jhl} \\
&= e_k \underset{1}{\times} \sum e_j \gamma_{jhl} = e_k \underset{1}{\times} (e_l \times e_h) \\
&= \sum e_i \gamma_{ijl} e_{jhk} \\
&= \sum e_i b_{ijh} \gamma_{jkl} \\
&= \sum e_h \underset{2}{\times} e_j \gamma_{jkl} \\
&= e_h \underset{2}{\times} \sum e_j \gamma_{jkl} = e_h \underset{2}{\times} (e_l \times e_k).
\end{aligned}$$

Les relations

$$e_l \times (e_h e_k)=e_k \underset{1}{\times} (e_l \times e_h)=e_h \underset{2}{\times} (e_l \times e_k)$$

montrent que pour trois éléments α, β, γ on a

$$\alpha\times(\beta\gamma)=\gamma\underset{1}{\times}(\alpha\times\beta)=\beta\underset{2}{\times}(\alpha\times\gamma). \tag{VI}$$

Nous sommes ainsi conduits à étudier les anneaux ayant quatre lois de multiplication „$\times$", „$\cdot$", „$\underset{1}{\times}$" et „$\underset{2}{\times}$" non associatives et non commutatives, mais liées par la relation (VI). Nous les appellerons *anneaux normaux*.

Le système (I), avec

$$D=e_1\frac{\partial}{\partial x^1}+\ldots+e_n\frac{\partial}{\partial x^n}$$

est

$$D\times\varphi=0.$$

On peut refaire le calcul d'une manière rapide. On a

$$D\times(\varphi^*\varphi^{**})=[\varphi^{**}\underset{1}{\times}(D\times\varphi^*)]+[\varphi^*\underset{2}{\times}(D\times\varphi^{**})] \tag{VII}$$

ce qui montre que si $0=D\times\varphi^*=D\times\varphi^{**}$, on a $D\times(\varphi^*\varphi^{**})=0$.

On est ainsi conduit à l'étude des *anneaux normaux* qui sont doués d'une transformation D additive:

$$D\times(\varphi^*+\varphi^{**})=(D\times\varphi^*)+(D\times\varphi^{**}) \tag{VIII}$$

satisfaisant à la loi (VII).

Reçu le 10. X. 1956

BIBLIOGRAPHIE

1. Moisil, Gr. C. Asupra unei generalizări a ideii de monogeneitate datorită lui V. S. Feodorov. Bul. St. Ac. RPR, seria A, I (1949), 959.
2. Moisil, Gr. C. Despre funcțiile monogene în sensul lui V. S. Feodorov. Cu observații de Viorica Ionescu Cazimir. Ibid. II (1950), 545.
3. Al IV-lea Congres al Matematicienilor romîni. Rapoarte. Bucureşti, 27 mai — 4 iunie, 1956, vol. I, 164—193.
   Четвертый конгресс румынских математиков. Доклады, I, 172—200.
   Le IV-ème Congrès des mathématiciens roumains. Rapports, vol. I, 181—212.
4. Fréchet, M. Les surfaces dérivables relativement à une règle de multiplication. Ann. sc. Ec. Nor. Sup., **71** (1954), 29—85.
5. Sobrero, L. Algebra delle funzioni ipercomplesse e sue applicazione alla teoria del l' elasticità. Mem. dell' Ac. Italia, IV (1934).
6. Sobrero, L. Theorie der ebenen Elastizität unter Benutzung eines Systems hyperkomplexer Zahlen. Leipzig, Teubner, 1939.
7. Moisil, Gr. C. Sisteme de ecuații cu derivate parțiale şi numere ipercomplexe. Analele Academiei RPR, memorii seria matematică, fizică, chimie, II (1950), 72—81.
8. Moisil, Gr. C. Metoda funcțiilor de variabilă ipercomplexă în idrodinamica plană a lichidelor vîscoase incompresibile. Studii şi cercetări matematice, I (1950).
9. Iacovache, Maria. Aplicarea funcțiilor monogene în sensul lui Feodorov la teoria elasticității corpurilor cu izotropie transversă. Revista Universității C. I. Parhon şi Politehnicii din Bucureşti, seria stiințelor naturii, I, 63.

10. P o m p e i u, D. Sur une classe de fonctions d'une variable complexe. Rendiconti del circolo matematico di Palermo, XXXIII (1912), 108.
11. P o m p e i u, D. Sur une classe de fonctions d'une variable complexe et sur certaines équations intégrales, ibid. XXXV (1913).
12. T h é o d o r e s c o, M. La dérivée aréolaire et ses applications à la Physique mathématique. Thèse. Paris, Gauthier-Villars, 1931.
13. T h é o d o r e s c o, M. La dérivée aréolaire. Annales roumaines de mathématiques. Bucureşti, 1936.

ВЪРХУ ФУНКЦИИТЕ, МОНОГЕННИ В СМИСЪЛ НА ФЕОДОРОВ

Гр. Мойсил (Букурещ)

РЕЗЮМЕ

Системата уравнения на Коши—Риман за моногенността на функциите на една комплексна променлива имат следното свойство:

Съществуват r^3 константи c_{ijk} такива, че ако $(\varphi_1^*, \quad , \varphi_r^*)$ и $(\varphi_1^{**}, \ldots, \varphi_r^{**})$ са две системи от интеграли, билинейната комбинация (II) е също интеграл.

Това свойство имат и условията за моногенност по Феодоров на една хиперкомплексна функция φ по отношение на хиперкомплексния пфафиан ω: $d\varphi = \varphi'\omega$.

Като пример авторът посочва, че същото свойство имат и уравненията на равнинната еластичност и уравненията на равнинната хидродинамика на вискозните несвиваеми течности.

В общия случай на системите (I) свойство Q се изразява в съществуването на такива a_{ijk}, b_{ijk}, които удовлетворяват уравненията (III).

В частност, ако c_{ijk} са структурни константи на една комутативна система хиперкомплексни числа с единици $e_1, \ldots, e_r$, системата може да се напише и във формата $D\varphi = 0$.

В общия случай трябва в системата хиперкомплексни числа да се въведат три нови закона за умножение $\times$, $\underset{1}{\times}$, $\underset{2}{\times}$ и свойството Q се изразява тогава с (VI). Системата (I) се написва във вида $D\times\varphi = 0$, където D е една дистрибутивна операция (VIII), удовлетворяваща (VII).

О ФУНКЦИЯХ МОНОГЕННЫХ В СМЫСЛЕ ФЕОДОРОВА

Гр. Мойсил (Бухарест)

РЕЗЮМЕ

Система уравнений Коши—Римана для моногенности функций одной комплексной переменной имеет следующее свойство:

Существуют r^3 постоянных c_{ijk}, таких, что если $(\varphi_1^*, \ldots, \varphi_r^*)$ и $(\varphi_1^{**}, \ldots, \varphi_r^{**})$ суть две системы интегралов, билинейная комбинация (II) тоже является интегралом.

То же самое имеет место и для условий моногенности в смысле Феодорова одной гиперкомплексной функции по отношению к гиперкомплексному пфафиану. ω: $d\varphi = \varphi'\omega$.

В качестве примера, автор высказывает это свойство для уравнений равнинной упругости и равнинной гидродинамики несжимаемых визкозных жидкостей.

В общем случае систем (I) свойство Q выражается существованием постоянных a_{ijk}, b_{ijk}, удовлетворяющих уравнениям (III).

В частности если c_{ijk} являются структурными константами коммутативной системы гиперкомплексных чисел, с единицами $e_1, \ldots, e_r$ система пишется в форме $D\varphi = 0$.

В общем случае надо ввести в гиперкомплексную систему три новых умножения $\times$, $\underset{1}{\times}$, $\underset{2}{\times}$ и тогда свойство Q выражается соотношениями (VI). Система (I) пишется $D \times \varphi = 0$, где D дистрибутивная операция (VIII), удовлетворяющая (VII).