

THEORIE DER RETRAKTE UND IHRE PROBLEME*

K. Borsuk (Warszawa)

Die Theorie der Retrakte ist ein Kapitel der Tópologie. Die Entstehung dieser Theorie ist eng mit dem Streben zur Verallgemeinerung des Satzes von Tietze über Erweiterung der stetigen Funktionen verbunden. Der Satz von Tietze besagt, dass jede stetige reelle Funktion, die auf einer abgeschlossenen Teilmenge irgendeines Raumes definiert ist, sich stetig auf den ganzen Raum erweitern lässt. Wenn man diesen Satz verallgemeinern versucht und zwar, anstatt der reellen Funktionen beliebige stetige Abbildungen eines Raumes in einen anderen Raum betrachtet, so zeigt sich nützlich gewisse Begriffe einzuführen, die zur Theorie der Retrakte gehören. Insbesondere bestimmt man in dieser Theorie gewisse Klassen der Räume (so genannte *absolute Retrakte* und *absolute Umgebungsretrakte*), die eine besonders einfache topologische Struktur haben und mit den Polyedern eine weitgehende Ähnlichkeit aufweisen.

Die Theorie der Retrakte ist schon vor 25 Jahren entstanden, aber ihre Entwicklung ist keineswegs beendet. Seit meiner ersten Arbeit im 17. Bande von *Fundamenta Mathematicae*, in der die Grundbegriffe dieser Theorie angegeben wurden, sind ungefähr 100 Arbeiten von ungefähr 30 Autoren, wie Lefschetz, Kuratowski, Whitehead, Fox, Hanner, Hu und andere dieser Theorie und ihrer Anwendungen gewidmet. Man hat sie in verschiedenen Richtungen verallgemeinert und ihre Grundbegriffe auf verschiedene Arten von allgemeinen topologischen Räumen übertragen. Aber der geometrische Kern dieser Theorie, und zwar die geometrischen Eigenschaften der sogenannten absoluten Retrakte und absoluten Umgebungsretrakte sind bis jetzt keineswegs endgültig erklärt.

Der Zweck dieses Vortrages ist ganz bescheiden. Es handelt sich nicht um einen neuen Beitrag zur Theorie der Retrakte, sondern um eine kurze Darstellung ihrer Hauptbegriffe und Hauptergebnisse und, vor Allem, um eine Besprechung von einigen ihrer ungelösten Probleme. Jedes von diesen Problemen hat einen klaren geometrischen Sinn. Darum meine ich, dass die Lösung jedes von ihnen etwas zur Erklärung der Beziehung zwischen den Begriffen der allgemeinen Topologie und der geometrischen Anschaulichkeit beitragen würde.

* Vortrag auf der Bulgarischen Mathematikertagung, Sofia, Oktober 1956.

Die Topologie lässt sich bekanntlich als die Theorie der Invarianten der Homöomorphien, das heisst der eineindeutigen und beiderseits stetigen Abbildungen definieren. Die topologischen Invarianten bilden eine umfangreiche Klasse, die neben den Eigenschaften, die einen klaren, geometrischen Sinn haben, viele spitzfindige und komplizierte Eigenschaften enthält. Im Allgemeinen ist es sehr schwierig einen Raum vollständig topologisch zu charakterisieren und bis jetzt ist das nur in wenigen Fällen gelungen. Unter sämtlichen topologischen Invarianten lässt sich eine gewisse viel engere Klasse unterscheiden, und zwar die Klasse dieser Eigenschaften, die invariant gegenüber allen stetigen Abbildungen sind. Zu dieser Klasse gehören solche grundlegende topologische Eigenschaften wie Kompaktheit, Zusammenhang und (für kompakte Räume) — der lokale Zusammenhang.

Den Gegenstand der Theorie der Retrakte bilden diese topologische Eigenschaften, die gegenüber einer gewissen Klasse der Abbildungen invariant sind, einer Klasse die viel spezieller als die Klasse sämtlicher stetigen Abbildungen, aber viel allgemeiner als die Klasse der Homöomorphien ist. Diese Klasse besteht aus den sogenannten *r-Abbildungen*, die folgendermassen definiert sind:

Eine stetige Abbildung f des Raumes X in einen anderen Raum Y heisst eine *r-Abbildung*, wenn es eine stetige Abbildung g des Raumes Y in den Raum X gibt von der Art, dass

$$(1) \quad fg(y) = y \quad \text{für jeden Punkt } y \in Y$$

gilt. Somit ist die Abbildung g „rechtsseitig invers“ gegenüber f . Sie ordnet jedem Punkte y von Y einen Punkt $g(y)$ stetigerweise zu und zwar so, dass $g(y)$ zu der Urbildmenge $f^{-1}(y)$ gehört.

Aus (1) ergibt sich, dass jeder Punkt $y \in Y$ zu den Werten der Abbildung f gehört. Somit ist eine *r-Abbildung*, von X in Y immer eine Abbildung auf Y .

Wegen (1) ist die Abbildung f auf der Menge $g(Y)$ eineindeutig und stetig und die stetige Abbildung g ist zu f invers. Es folgt, dass die Funktion g den Raum Y auf die Menge $g(Y)$ topologisch abbildet:

$$(2) \quad g \text{ ist eine homöomorphe Abbildung.}$$

Es ist klar, dass jede Homöomorphie von X auf Y eine *r-Abbildung* ist. Es ist auch klar, dass falls f_1 eine *r-Abbildung* von X_1 auf X_2 ist und f_2 eine *r-Abbildung* von X_2 auf X_3 , dann die zusammengesetzte Abbildung $f = f_2 f_1$ eine *r-Abbildung* von X_1 auf X_3 ist. Anders gesprochen, ist die Klasse von *r-Abbildungen* transitiv.

Einen speziellen Fall der *r-Abbildungen* bilden sogenannte *Retraktionen*. Darunter versteht man eine stetige Abbildung f eines Raumes X auf eine seiner Untermengen Y , die eine Identität auf der Menge Y ist. Für eine Retraktion ist die identische Abbildung von Y die rechtsseitig inverse Abbildung.

Es ist leicht zu zeigen, dass *r-Abbildungen* mit den Abbildungen von der Gestalt hr , wo r eine Retraktion und h eine Homöomorphie ist, identisch sind. Da die topologischen Eigenschaften gegenüber den Homöomorphien invariant sind, so schliessen wir, dass die Invarianten der *r-Abbildungen* auch als die Invarianten der Retraktionen definiert

sein können. Somit sehen wir, dass die Theorie der Retrakte als die Theorie der Invarianten der Retraktionen definiert sein kann.

Eine Punktmenge X_0 wird ein *Retrakt* des Raumes X genannt, wenn es eine Retraktion von X zu X_0 gibt. Es ist klar, dass jeder Retrakt von X eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.

Es ist zweckmässig einen zum Begriff der r -Abbildungen analogen Begriff des r -Homomorphismus einzuführen. Der Einfachheit halber werde ich nur abelsche Gruppen betrachten. Der Begriff des r -Homomorphismus und die verwandten Begriffe unterscheiden sich von den analogen Begriffen der Theorie der r -Abbildungen nur dadurch, dass anstatt der Stetigkeit die Additivität erscheint.

Und zwar, verstehen wir unter einem r -Homomorphismus der Gruppe A in die Gruppe B eine homomorphe Abbildung φ , von der Art, dass es ein Homomorphismus ψ von B in A gibt, das rechtsseitig invers gegenüber φ ist, das heisst

$$(1') \quad \varphi\psi(y) = y \text{ für jedes } y \in B$$

gilt. Man sieht unmittelbar, dass φ die Gruppe A auf die Gruppe B abbildet und dass ψ ein Isomorphismus zwischen der Gruppe B und der Untergruppe $A_0 = \psi(B)$ von A ist. Man sieht ferner, dass eine Zusammensetzung zweier r -Homomorphismen wieder ein r -Homomorphismus ist, das heisst die Klasse der r -Homomorphismen transitiv ist.

Insbesondere gehört zu der Klasse der r -Homomorphismen jeder Homomorphismus φ , der die Gruppe A auf eine ihrer Untergruppen A_0 abbildet und auf A_0 eine Identität ist. Ein solcher Homomorphismus wird eine *Retraktion* der Gruppe A zu A_0 heissen und die Bildmenge A_0 wird ein *Retrakt* der Gruppe A genannt. Man sieht leicht, dass die r -Homomorphismen mit den Zusammensetzungen einer Retraktion und eines Isomorphismus identisch sind.

Das Problem alle Retrakte eines gegebenen Raumes topologisch zu charakterisieren ist im allgemeinen recht kompliziert. Dagegen lässt sich das ähnliche Problem für die Gruppen ganz leicht lösen. Man zeigt nämlich sofort, dass eine Gruppe B dann und nur dann ein Retrakt von der Gruppe A ist, wenn A direkte Summe von B und von einer anderen Gruppe C ist.

Ich habe schon erwähnt, dass die Theorie der Retrakte mit der Theorie der stetigen Erweiterungen der Abbildungen eng verbunden ist. Es gilt folgender, eher trivialer

Satz. Eine Teilmenge X_0 eines Raumes X ist ein Retrakt von X dann und nur dann, wenn für jeden Raum Y und jede stetige Abbildung f von X_0 in Y eine stetige Erweiterung f^* von f auf den ganzen Raum X mit den zu Y gehörenden Werten existiert.

Ein metrischer, kompakter Raum Y wird *absoluter Retrakt*, oder *AR-Menge* genannt, wenn jede stetige Funktion f , die auf irgendeiner abgeschlossener Teilmenge X_0 irgendeines metrischen Raumes X definiert ist und als Werte die Punkte von Y hat, sich zu einer stetigen Abbildung von X in Y erweitern lässt. Man zeigt leicht, dass

Absolute Retrakte sind identisch mit den Bildern des Hilbertschen Grundquaders Q_ω bei r -Abbildungen.

Aus diesem Satze folgt, dass ein Bild eines absoluten Retraktes bei einer r -Abbildung wieder ein absoluter Retrakt ist. Somit gehört der Begriff des absoluten Retraktes zur Theorie der Retrakte.

Man sieht leicht, dass jeder n -dimensionale Euklidische Würfel ein Bild von Q_∞^n bei einer r -Abbildung ist. Es folgt daraus, dass homöomorphe Bilder der Euklidischen Würfel absolute Retrakte sind. Insbesondere ist jedes geometrische Simplex, wie auch jede n -dimensionale Euklidische Vollkugel ein absoluter Retrakt.

Die absoluten Retrakte haben besonders einfache, lokale und integrale topologische Eigenschaften. Vom Standpunkte der Homotopie-theorie aus, haben sie die Struktur der einpunktigen Mengen. Wenn man aber auch tiefer liegende Eigenschaften betrachtet, so zeigt sich, dass unter den absoluten Retrakten auch gewisse Mengen mit recht komplizierter Struktur existieren.

Ich kann hier nicht die Theorie der absoluten Retrakte systematisch entwickeln. Ich erwähne nur zwei ganz elementare, und seit langem her bekannte Eigenschaften: *Das Kartesische Produkt von höchstens abzählbar vielen absoluten Retrakten ist wieder ein absoluter Retrakt und die Vereinigungsmenge zweier absoluten Retrakte, deren Durchschnitt ein absoluter Retrakt ist, ist wieder ein absoluter Retrakt.*

So wie absolute Retrakte eine Verallgemeinerung der Simplexe sind, so sind die sogenannten absoluten Umgebungsretrakte (anders *ANR*-Mengen genannt) eine Verallgemeinerung der Polyeder. Ein Kompaktum Y heisst ein *absoluter Umgebungsretrakt*, wenn jede stetige Abbildung f , die auf einer abgeschlossenen Teilmenge X_0 irgendeines metrischen Raumes X definiert ist und die Menge X_0 in Y abbildet, sich zu einer stetigen Abbildung f' einer Umgebung von X_0 in Y erweitern lässt. Man beweist leicht, dass ein Kompaktum Y ein absoluter Umgebungsretrakt dann und nur dann ist, wenn es eine r -Abbildung einer offenen Teilmenge des Hilbertschen Grundquaders Q_∞ auf Y gibt. Wir schliessen daraus, dass der Begriff des absoluten Umgebungsretraktes nicht nur topologisch, aber auch invariant gegen alle r -Abbildungen ist.

Man beweist leicht, dass *das Kartesische Produkt von endlich vielen absoluten Umgebungsretrakten wieder ein absoluter Umgebungsretrakt ist* und dass *die Vereinigungsmenge zweier absoluten Umgebungsretrakte, deren Durchschnitt ein absoluter Umgebungsretrakt ist, wieder ein absoluter Umgebungsretrakt ist*. Da jedes Polyeder eine Simplicialzerlegung hat, schliessen wir daraus, dass jedes Polyeder ein absoluter Umgebungsretrakt ist. Es folgt, dass auch alle Bilder der Polyeder bei r -Abbildungen absolute Umgebungsretrakte sind. Dieser Satz lässt sich im gewissen Masse umkehren. Es gilt nämlich folgender

Satz. Die endlichdimensionalen absoluten Umgebungsretrakte sind mit den Bildmengen von Polyedern bei r -Abbildungen identisch.

Es folgt aus diesem Satze, dass vom Standpunkte der Theorie der Retrakte aus, die endlichdimensionalen absoluten Umgebungsretrakte sich von den Polyedern nicht unterscheiden. Im Gegensatz aber zu dem elementargeometrischen Begriffe des Polyeders, hat der Begriff des Umgebungsretraktes einen rein topologischen Charakter. Da das Problem

alle Polyeder topologisch zu charakterisieren hoffnungslos zu sein scheint, können die absoluten Umgebungsretrakte als ein Ersatz für Polyeder dienen. Ihre Definition ist rein topologisch und ein grosser Teil ihrer Eigenschaften, und zwar alle gegenüber r -Abbildungen invarianten Eigenschaften, mit den Eigenschaften der Polyeder übereinstimmen. Es sei aber nachdrücklich gesagt, dass diese Ähnlichkeit von Eigenschaften der absoluten Umgebungsretrakte und der Polyeder nicht hinreichend ist, um verschiedene paradoxe Phänomene auszuschliessen.

Grundlegend für die Theorie der Retrakte ist der Begriff der lokalen Zusammenziehbarkeit. Ein Raum X wird *lokal zusammenziehbar* genannt, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ und jede Umgebung U von x eine Umgebung V von x existiert, die sich durch eine stetige Deformation in U auf einen einzigen Punkt zusammenziehen lässt.

Man sieht leicht, dass die lokale Zusammenziehbarkeit invariant nicht nur gegen Homöomorphien, aber auch gegen alle r -Abbildungen ist. Da jede offene Teilmenge eines Euklidischen Raumes, oder des Hilbertschen Grundquaders lokal zusammenziehbar ist, schliessen wir, dass alle absoluten Umgebungsretrakte lokal zusammenziehbar sind. Diese Behauptung lässt sich im gewissen Masse umkehren. Es gilt nämlich folgender

Satz. *Unter den endlichdimensionalen Kompakten sind die absoluten Umgebungsretrakte durch die lokale Zusammenziehbarkeit charakterisiert.*

Das Problem, ob dieser Satz auch ohne Voraussetzung der endlichen Dimension gilt, wurde vor einigen Jahren von mir in der negativen Richtung gelöst. Es gibt unendlich dimensionale Kompakta, die lokal zusammenziehbar sind, aber keine absolute Umgebungsretrakte sind.

Ich möchte hier noch paar Worte über Homologieeigenschaften der Retrakte sagen. Man beweist leicht, dass jede r -Abbildung f eines Kompaktums X auf ein anderes Kompaktum Y einen r -Homomorphismus f_* der n -dimensionalen Homologiegruppe $H_n(X, \mathbf{A})$ von X (wobei \mathbf{A} die Gruppe der Koeffizienten bezeichnet) auf die n -dimensionale Homologiegruppe $H_n(Y, \mathbf{A})$ von Y induziert:

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y && r\text{-Abbildung} \\ f_*: H_n(X, \mathbf{A}) &\longrightarrow H_n(Y, \mathbf{A}) && r\text{-Homomorphismus.} \end{aligned}$$

Da alle Homologiegruppen des Hilbertschen Grundquaders Q_ω trivial sind und da die absoluten Retrakte mit den Bildern von Q_ω bei r -Abbildungen identisch sind, schliessen wir, dass sämtliche Homologiegruppen der AR -Mengen trivial sind, das heisst *jeder absolute Retrakt in allen Dimensionen azyklisch ist*. Was die Homologiegruppen der absoluten Umgebungsretrakte anbetrifft, so beweist man leicht, dass *für jeden absoluten Umgebungsretrakt X ein Polyeder P existiert von der Art, dass alle Homologiegruppen von X die Bilder von den entsprechenden Homologiegruppen von P bei einem r -Homomorphismus sind*. Somit sind die Homologiegruppen von X mit gewissen direkten Summanden der entsprechenden Homologiegruppen des Polyeders P isomorph. Insbesondere schliessen wir daraus, dass alle Bettischen Zahlen eines absoluten Umgebungsretraktes endlich sind, und fast alle verschwinden.

Somit sehen wir, dass die homologischen Eigenschaften der absoluten Umgebungsretrakte zu den homologischen Eigenschaften der Polyeder analog sind. Das Ähnliche gilt auch für die homotopischen Eigenschaften und auch für viele andere topologische Eigenschaften. Zum Beispiel die bekannte Fixpunktformel von Lefschetz ist nicht nur für Polyeder, aber auch für alle absoluten Umgebungsretrakte richtig. Für alle Kompakta ist sie dagegen nicht richtig.

Ich möchte nun einige Bemerkungen hinzufügen, die einen mehr philosophischen als mathematischen Sinn haben. Der elementargeometrische Begriff des Polyeders ist in einem gewissen Sinne adequat zur geometrischen Anschauung. Unter den Polyedern begegnet man keine paradoxalen Eigenschaften. Für dreidimensionale Polyeder kann man immer materielle Modelle bauen und umgekehrt, jedes materielle Objekt hat stets die geometrische Struktur eines, im Allgemeinen gekrummten Polyeders. Von der anderen Seite aber, alle auf dem Grunde der allgemeinen Topologie axiomatisch definierten Klassen der Räume, die allgemeiner als die Klasse der Polyeder sind, enthalten viele Mengen mit ganz paradoxaler Struktur. Leider ist es auch so mit der Klasse der absoluten Umgebungsretrakte. Folgendes Beispiel wird das vielleicht illustrieren:

Es sei Q_2 eine Kreisscheibe und Q_3 eine dreidimensionale Vollkugel. Betrachten wir eine Strecke L , die im Inneren von Q_2 liegt. Es ist bekannt, dass eine stetige Funktion f existiert, die die Strecke L auf die Vollkugel Q_3 abbildet. Wenn wir nun jeden Punkt $x \in L$ mit dem Punkte $f(x) \in Q_3$ identifizieren, so bekommen wir aus den Mengen Q_2 und Q_3 einen kompakten Raum Y . Es ist leicht zu zeigen, dass Y ein dreidimensionaler absoluter Retrakt ist. Es folgt daraus, dass die Kreislinie S , die den Rand von Q_2 bildet, in Y auf einen einzigen Punkt zusammenziehbar ist. Man sieht aber leicht, dass dieses Zusammenziehen von S in keiner echten Teilmenge von Y möglich ist. Wir begegnen hier ein Phänomen, das bei den Polyedern unmöglich ist. Es ist nämlich leicht zu zeigen, dass eine kompakte Teilmenge F die in einem Polyeder P zusammenziehbar ist, sich immer in einer Teilmenge von P mit der Dimension $\leq \dim F + 1$ zusammenziehen lässt.

Trotz dieser und auch anderen paradoxalen Beispielen, scheint die Klasse der absoluten Umgebungsretrakte nicht zu weit von der Anschaulichkeit abzugehen. Man weiss positiv, dass viele wichtige topologische Eigenschaften der absoluten Umgebungsretrakte mit den entsprechenden Eigenschaften der Polyeder übereinstimmen. Es scheint aber wichtig zu wissen, wie weit diese Übereinstimmung reicht. Darum möchte ich nun einige Probleme formulieren, die die geometrischen Eigenschaften der absoluten Retrakte und Umgebungsretrakte anbetreffen.

Problem 1 betrifft die Dimensionstheorie der Retrakte. Man weiss, dass für Polyeder alle sogenannten modularen Dimensionen im Sinne von Alexandroff, mit der gewöhnlichen Dimension übereinstimmen. Schon im Jahre 1936 habe ich gezeigt, dass dasselbe auch für eine viel allgemeinere Unterklasse der Klasse der absoluten Umgebungsretrakte gilt. Die zu dieser Klasse gehörenden Räume sind durch eine gewisse Bedingung, die eine Verstärkung der lokalen Zusammenziehbarkeit ist, charakterisiert. Es bleibt dagegen unentschieden, ob

der Satz auch ohne irgendeine zusätzliche Bedingung gilt, das heisst, ob für alle absoluten Umgebungsretrakte alle modularen Dimensionen mit der gewöhnlichen Dimension identisch sind. Die bekannten Pontrjaginschen Beispiele von den Kompakten, für die die modularen Dimensionen von der klassischen Dimension verschieden sind, sind — wie man leicht zeigt — keine absoluten Umgebungsretrakte.

Aus den allgemeinen Sätzen der Dimensionstheorie folgt, dass für Kompakta X und Y , für die alle modularen Dimensionen mit der klassischen Dimension übereinstimmen, die sogenannte Produktformel

$$(3) \quad \dim (X \times Y) = \dim X + \dim Y$$

gilt. Bekanntlicherweise ist diese Formel im Gebiete aller Kompakta schon nicht richtig. Es ist aber bekannt, dass die Formel (3) gilt, falls mindestens eine von den Mengen X und Y ein Polyeder ist. Es bleibt dagegen unbekannt, ob eine ähnliche Behauptung gilt, unter die schwächere Voraussetzung, dass eine der Mengen X und Y ein absoluter Umgebungsretrakt ist.

Das **Problem 2** betrifft die Einbettung der Mengen in den absoluten Retrakten. Es ist klar, dass jedes n -dimensionale Polyeder in einem in sich zusammenziehbaren $(n+1)$ -dimensionalen Polyeder, also in einem $(n+1)$ -dimensionalen absoluten Retrakte einbettbar ist. Die Frage aber, ob jedes n -dimensionale Kompaktum in einem $(n+1)$ -dimensionalen absoluten Retrakte einbettbar ist, bleibt dagegen unentschieden.

Diese Frage hat eine Bedeutung für die Theorie der Erweiterung der stetigen Abbildungen und bildet ein Analogon zum bekannten Menger—Nöbelingschen Einbettungssatze. Im Falle $n=1$ lässt sich diese Frage mit Hilfe der sogenannten universellen Kurve von Menger lösen. Es ist nämlich leicht einen zweidimensionalen absoluten Retrakt zu konstruieren, der die Mengersche universelle Kurve, und somit alle höchstens 1-dimensionale Räume topologisch enthält. Wenn man aber diese Methode auf höhere Dimensionen übertragen will, so stösst man auf gewisse Schwierigkeiten, die bis jetzt nicht im Ganzen beseitigt sind.

Das **Problem 3** betrifft auch die Einbettung der Mengen in den absoluten Retrakten. Man weiss, dass jedes lokal zusammenhängende Kompaktum (mit positiver Dimension) einen einfachen Bogen enthält. Das ist schon im Jahre 1920 von Mazurkiewicz bewiesen. Man weiss auch, dass es lokal zusammenhängende Kompakta gibt, die beliebig grosse Dimension haben, aber keine Kreisscheibe topologisch enthalten, und man weiss auch, dass es zweidimensionale absolute Umgebungsretrakte gibt, die keine Kreisscheibe topologisch enthalten. Man weiss aber nicht, ob es dreidimensionale absolute Umgebungsretrakte gibt, die keine Kreisscheibe topologisch enthalten. Ungelöst bleibt auch folgendes allgemeineres Problem: Gibt es für jede natürliche Zahl m eine natürliche Zahl n von der Art, dass jeder absolute n -dimensionale Umgebungsretrakt jedes m -dimensionale Kompaktum topologisch enthält?

Etwas verwandt mit diesem Problem ist das folgende

Problem 3'. Ist es wahr, dass jeder unendlichdimensionale absolute Umgebungsretrakt einen absoluten Umgebungsretrakt von beliebig gegebener Dimension enthält?

Zu den Einbettungsproblemen der Theorie der Retrakte gehört auch folgendes

Problem 4. Ist jeder n -dimensionale absolute Retrakt in dem Euklidischen $2n$ -dimensionalen Raume einbettbar?

Da 1-dimensionale absolute Retrakte mit den sogenannten Baumkurven übereinstimmen, ist dieses Problem für $n=1$ positiv beantwortet. Für höhere Dimensionen bleibt aber dieses Problem selbst für Polyeder ungelöst.

Die in der Ebene liegenden absoluten Retrakte lassen sich einfach als lokal zusammenziehbare, azyklische Kontinua charakterisieren. Ob eine analoge Charakterisierung der in dem 3-dimensionalen Euklidischen Raume liegenden absoluten Retrakte besteht, ist bis jetzt unbekannt. Somit haben wir folgendes

Problem 5. Sind die in dem 3-dimensionalen Euklidischen Raume liegenden absoluten Retrakte durch die lokale Zusammenziehbarkeit und die Azyklizität charakterisiert?

Ich möchte noch ein Problem formulieren, das das sogenannte Homotopietypus der absoluten Umgebungsretrakte anbetrifft. Man sagt nämlich, nach Hurewicz, dass zwei Kompakta A und B vom denselben Homotopietypus sind, wenn es zwei stetige Abbildungen f von A in B und g von B in A gibt von der Art, dass die zusammengesetzte Abbildungen fg von B in sich selbst und gf von A in sich selbst, beide mit den identischen Abbildungen homotop sind. Man weiss, dass Kompakta vom denselben Homotopietypus eine weitgehende Ähnlichkeit ihrer topologischen Eigenschaften aufweisen. Nun haben wir folgendes

Problem 6. Gibt es für jeden absoluten Umgebungsretrakt ein Polyeder von demselben Homotopietypus?

Dieses Problem scheint mir, für die Theorie der Retrakte, besonders wichtig zu sein. Gewisse Versuche es zu lösen waren von Fox, Whitehead und von mir selbst gemacht. Ein Teilergebnis hat auch vor wenigen Jahren André Weil bekommen, aber im allgemeinen Falle bleibt dieses Problem noch offen.

Eingegangen am 5. XII. 1956

ТЕОРИЯ РЕТРАКТОВ И ЕЕ ПРОБЛЕМЫ

К. Борсук (Варшава)

РЕЗЮМЕ

Предметом теории ретрактов служат топологические свойства, инвариантные по отношению к так называемым r -отображениям. r -отображением называем отображение $f: X \rightarrow Y$, для которого существует непрерывное отображение $g: Y \rightarrow X$ являющееся обратным справа к f , т. е. выполняющее условие

$$fg(y) = y$$

для каждой точки $y \in Y$.

Частным случаем r -отображений являются т. н. ретракции, т. е. непрерывные отображения пространства X на некоторое его подмножество Y , которые тождественны в Y . Образ ретракции X называется ретрактом пространства X .

Пространства, гомеоморфные с ретрактами гильбертового кирпича называются абсолютными ретрактами или AR -множествами. Пространства гомеоморфные с компактными ретрактами открытых подмножество гильбертового кирпича называются абсолютными окрестностными ретрактами или ANR -множествами. AR -множества и более общие ANR -множества имеют особенно простые локальные и интегральные свойства, хотя и можно встретить некоторые парадоксальные явления.

Не решены пока еще следующие проблемы:

1. Совпадают ли для всех ANR -множеств модулярные дименсии (в смысле Александера) с обычной дименсии?
2. Можно ли погрузить каждый $n+1$ -измеримый компакт в некотором n -измеримом ANR -множестве?
3. Существует ли для каждого натурального числа m , такое натуральное число n , что каждое n -измеримое ANR -множество содержало бы топологически каждый m -измеримый компакт?
4. Содержит ли каждое бесконечномерное ANR -множество, ANR -множество с произвольной заданной дименсии?
5. Можно ли охарактеризовать содержащиеся в тримерном евклидовом пространстве AR -множества как ациклических, локально-сжимаемых компактов?
6. Существует ли для каждого ANR -множества многогранник, имеющий одинаковым с ним гомотопным типом (в смысле Гуревича)?

ТЕОРИЯТА НА РЕТРАКТИТЕ И НЕЙНИТЕ ПРОБЛЕМИ

К. Борсук (Варшава)

РЕЗЮМЕ

Обект на теорията на ретрактите са тези топологични свойства, които са инвариантни по отношение на т. нар. r -изображения. Под r -изображение разбираме едно непрекъснато изображение $f: X \rightarrow Y$, за което съществува непрекъснато изображение $g: Y \rightarrow X$, което е дясно—обратно на f , т. е. удовлетворява условието

$$fg(y) = y$$

за всяка точка $y \in Y$.

Специален случай на r -изображения са ретракциите, т. е. непрекъснати изображения на едно пространство X върху една негова подсъвкупност Y , които образуват идентитет в Y . Образът на една ретракция на X се нарича ретракт на пространството X .

Пространствата, хомеоморфни с ретрактите на Хилбертовата тухла, се наричат абсолютни ретракти или AR -множества. Пространствата, хомеоморфни с компактните ретракти на отворените подмножества на хилбертовата тухла, се наричат абсолютни околностни ретракти или ANR -множества. AR -множествата и по-общите ANR -множества имат особено прости локални и интегрални свойства, макар при тях да се срещат и някои парадоксални явления.

Не са решени засега следните проблеми:

1. Съвпадат ли при ANR -множества модулърните измерения (в смисъл на Александров) с обикновеното измерение?
2. Може ли всеки n -измерим компакт да се вложи топологично в едно $(n+1)$ -измеримо AR -множество?
3. Съществува ли за всяко естествено число m друго естествено число n такова, че всяко n -измеримо ANR -множество да съдържа топологично всеки m -измерим компакт?
4. Съдържа ли всяко безкрайно измеримо ANR -множество такива множества с произволно даден брой на измеренията?
5. Могат ли да се характеризират съдържащите се в 3-измеримото евклидово пространство AR -множества като ациклични, локално свиваеми компакти?
6. Съществува ли за всяко ANR -множество X многостен, имащ хомотопичен тип (в смисъл на Гуревич), равен на този на X ?