VERALLGEMEINERTE RIEMANNSCHE NORMALKOORDINATEN UND EINIGE ANWENDUNGEN DERSELBEN*

O. Varga (Debrecen)

Die nachstehenden Ausführungen stellen einen Bericht über Untersuchungen dar, die im mathematischen Seminar der Debrecener Universität ausgeführt wurden. Den Ausgangspunkt bildete eine Arbeit des Vortragenden über die Verallgemeinerung von Normalkoordinaten [1]. Es stellte sich dabei heraus, dass diese Normalkoordinaten zur Ermittlung der Differentialinvarianten in allgemeinen Räumen geeignet sind. Diese Koordinaten bilden eine Verallgemeinerung der Riemannschen Normalkoordinaten. H. S. Ruse [2] hat eine Charakterisierung der Riemannschen Normalkoordinaten gegeben, die wohl am einfachsten zeigt, welche Verallgemeinerung diese Koordinaten gegenüber der Cartesischen Koordinaten der euklidischen Geometrie bedeuten. Mein Mitarbeiter A. Rapcsák [3] hat nachgewiesen, dass sich auch die von uns eingeführten Normalkoordinaten auf die gleiche Weise charakterisieren lassen. Weiters hat er mit Hilfe seiner Darstellung eine invariante Form für die Taylorsche Entwicklung eines Tensorfeldes geben können. Die bei der Einführung der Normalkoordinaten auftretenden quasigeodätischen Kurven lassen weitere interessante Anwendungen in der Theorie der Finslerschen Räume skalarer und konstanter Krümmung zu, über die A. Rapcsák [4] weitere Resultate erhalten hat. Wegen Zeitmangel werde ich aber auf diese Anwendungen nicht näher eingehen.

In der Riemannschen Geometrie und in ihrer affinen Verallgemeinerung, den affinzusammenhängenden Räumen, sind gewisse Kurvensysteme die Geodätischen bzw. Autoparallelen, die den Geraden der gewöhnlichen euklidischen oder affinen Geometrie entsprechen, ausgezeichnet.

Führt man in der Riemannschen Geometrie ein Koordinatensystem ein, dann genügen die auf die Bogenlänge als Parameter bezogenen Geodätischen bekanntlich dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0 \tag{1}$$

in dem Γ^i_{jk} die aus dem Fundamentaltensor g_{ik} gebildeten Christoffelschen Symbole sind. Formal demselben Gleichungssystem genügen die autoparallelen Kurven eines affinzusammenhängenden Raumes, falls Γ^i_{jk} die Übertragungsparameter und s ein affiner Parameter ist.

---

* Vortrag auf der Bulgarischen Mathematikertagung. Sofia, Oktober 1956.

Ist nun P_0 ein beliebiger Raumpunkt, dann existiert stets ein Koordinatensystem von der Art, dass die Geodätischen bzw. Autoparallelen durch P_0 in einer Umgebung von P_0 in dem oben erwähnten Parameter s eine lineare und homogene Darstellung besitzen. Ein solches Koordinatensystem wird ein auf das Zentrum P_0 bezügliches Normalkoordinatensystem bezeichnet.

Ich möchte den Grund dieses bekannten Satzes deswegen skizzieren, weil er auf die von uns vorzunehmende Verallgemeinerung führt. Statt des Differentialgleichungssystems (1) wollen wir wegen Späterem das allgemeinere System

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = -2G^i\left(x, \frac{dx}{ds}\right) \tag{2}$$

zu Grunde legen. Von G^i soll ausser der Bedingung, die die Existenz einer Lösung verbürgt noch vorausgesetzt werden, dass es in den $\frac{dx^i}{ds}$ von zweiter Ordnung positiv homogen ist. Aus dieser Voraussetzung folgt, dass eine Lösung von (2) gegenüber der Parametertransformation

$$s = a\sigma + b, \quad a > 0,$$

nvariant ist, und nur gegenüber einer solchen. Die Lösung, die durch die Anfangsbedingungen $s = s_0$, $x = x_0$ und $\frac{dx^i}{ds} = a^i$ bestimmt ist, hat zunächst die Form

$$x^i = \psi^i(s, s_0, x_0, a). \tag{3}$$

Man kann nun nachweisen, dass die Homogenität von G^i zur Folge hat, dass

$$\psi^i(s, s_0, x, a^i) \equiv \varphi^i[x_0, a^i(s - s_0)] \tag{4}$$

gilt. Setzen wir

$$y^i = a^i(s - s_0) \tag{5}$$

dann hat man aus (3) und (4)

$$x^i = \varphi^i(x_0, y^i). \tag{6}$$

Wäre nun

$$\left|\frac{\partial\varphi^i}{\partial y^k}\right|_{y^i=0} \neq 0 \tag{7}$$

dann könnte man die y^i als neue Koordinaten einführen, und wegen (5) sind dann die Lösungen von (2) in diesen Koordinaten in dem Parameter s linear und homogen, die y^i sind demnach Normalkoordinaten. Ist $-2G^i$ in den $\frac{dx^i}{ds}$ ein quadratisches Polynom, dann kann man nachweisen, dass

$$\left|\frac{\partial\varphi^i}{\partial y^k}\right|_{y^i=0} = |\delta^i_k| = 1$$

ist, im allgemeinen Falle gilt dies aber nicht [5].

Geometrisch hat dieser allgemeinere Fall zunächst kein Interesse betrachten wir aber differentialgeometrische Räume, die von allgemeinerer Art sind als die Riemannschen, so wird man doch auf Kurvensysteme geführt, die von der Gestalt (2) sind. Ein solcher Fall liegt vor wenn man einen Raum betrachtet, in dem die Messung von Kurven nicht durch eine quadratische Differentialform, wie in der Riemanschen Geometrie, bestimmt ist. Sei $L(x, v)$ eine Funktion deren Wertebereich in den x^i ein beliebiger etwa einfach zusammenhängender Bereich ist, und die v^i sämtliche Werte ausser die aus lauter Nullen bestehenden n-tupel annehmen können. Von dieser Funktion werde vorausgesetzt, dass sie in den v^i von erster Dimension positiv homogen ist. Weiter setzen wir voraus, dass $L(x, v)$ genügend oft stetig differenzierbar ist, und zu einem regulären Variationsproblem führt, d. h., dass die Form

$$\frac{\partial \frac{1}{2} L^2(x, v)}{\partial v^i \, \partial v^k} X^i X^k$$

in den Hilfsveränderlichen X^i positiv definit ist. Es sei nun

$$x^i = x^i(t), \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1,$$

eine beliebige stetig differenzierbare Kurve. Wir definieren die Länge derselben durch

$$s(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} L\left(x, \frac{dx}{dt}\right) dt.$$

Da L in den x^i von erster Dimension positiv homogen ist, so ist die Länge von der Parameterdarstellung unabhängig, falls man nur die Orientierung der Kurve nicht ändert. Die Rolle der Geraden übernehmen die Extremalen des Variationsproblems

$$\int L(x, dx) \longrightarrow \text{Min.}$$

Die Euler-Lagrangeschen Gleichungen sind durch

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = -2G^i\left(x, \frac{dx}{ds}\right)$$

bestimmt, wobei G^i durch die Grundfunktion L eindeutig in der Form

(8) $$G^i = \frac{1}{4} g^{ih} \left(\frac{\partial (L^2)}{\partial v^h \, \partial x^m} v^m - \frac{\partial (L^2)}{\partial v^h} \right)$$

darstellbar ist. Dabei ist

(9) $$g_{ik} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial v^i \, \partial v^k}$$

und g^{ik} ist der zu g_{ik} reziproke Tensor. Nach dem früher Auseinandergesetzten ist jetzt die Einführung von Normalkoordinaten nicht mehr möglich. Um einen Ersatz derselben zu erhalten, überlegen wir, dass die Geodätischen der Riemannschen Geometrie nicht nur als Extremalen interpretiert werden können. Die neue Interpretation wird keine metrischen Eigenschaften benützen. Beachten wir, dass in der Riemannschen Geometrie für Vektoren ξ^i längs einer Kurve

$$x^i = x^i(t)$$

nach Levi-Civita eine Parallelübertragung durch

$$\frac{d\xi^i}{dt} = \quad \Gamma^i_{jk}\,\xi^k\,\frac{dx^k}{dt}$$

bestimmt ist, dann können wir nach Kurven fragen deren Tangentenvektoren parallel sind. Für solche ist also

$$\xi^i = \frac{dx^i}{dt}$$

und daher

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{jk}\,\frac{dx^j}{dt}\,\frac{dx^k}{dt}$$

Das sind aber genau die Gleichungen der Geodätischen. Diese affine Darstellung der Geodätischen ist genau der Grund dafür, dass man in affinzusammenhängenden Räumen genau so Normalkoordinaten einführen kann, wie in Riemannschen Räumen. Wie steht es nun mit diesen Begriffen in der Finslerschen Geometrie? Tragen wir in einem festen Punkt $\underset{0}{x}^i$ des Raumes Vektoren v^i so ab, dass

(10) $$L(\underset{0}{x}, v) = 1$$

wird, dann stellt (10), falls wir die v^i als Cartesische Koordinaten betrachten, in einem euklidisch-affinen Raum eine konvexe Hyperfläche dar. Ist v^i eine beliebige von $\underset{0}{x}^i$ ausgehende Richtung, dann wird diejenige Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt $\underset{0}{x}$ ist, und die die Fläche (8) in dem zum Endpunkt der Richtung gehörenden Punkte in zweiter Ordnung oskuliert, wegen (9) gerade durch

$$g_{ik}(\underset{0}{x}, v)(x^i - \underset{0}{x}^i)(x^k - \underset{0}{x}^k) = 1$$

dargestellt.

Zu jeder Richtung v^i gehört daher eine euklidische Metrik. Es ist daher zweckmässig den Raum nicht als Punkt, sondern als Linienelementmannigfaltigkeit zu betrachten. Diese Auffassung rührt von E. Cartan (1934) her. Demnach sind sämtliche Grössen wie Vektoren, Tensoren und allgemeine geometrische Objekte erst in einem Linienelement erklärt. Auch die Parallelverschiebung von Vektoren ist jetzt nicht längs einer Kurve, sondern längs einer stetig differenzierbaren einparametrigen Linienelementschar

$$x^i = x^i(t); \qquad v^i = v^i(t), \qquad t_0 < t < T_0,$$

durch

(11) $$\frac{d\xi^i}{dt} \qquad C^i_{kl}\,\xi^k\,dv^l \quad \Gamma_{kl}\,\xi^k\,\frac{dx^l}{dt}$$

erklärt. Die C^i_{kl} und Γ^i_{kl} sind eindeutig aus L bestimmbar. Hingegen ist die Parallelverschiebung eines Linienelementes v^i schon längs einer Kurve möglich, und es gilt

$$\frac{\pi^i}{dt} \equiv \frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{kr} v^k \frac{dx^r}{dt} = 0. \tag{12}$$

Vermöge (12) können wir (11) auf die Form

$$\frac{d\xi^i}{dt} = - C^i_{kl} \xi^k \frac{\pi^l}{dt} - \Gamma^{*i}_{kl} \xi^k \frac{dx^l}{dt} \tag{13}$$

bringen, wobei

$$\Gamma^{*i}_{kl} = \Gamma^i_{kl} - C^i_{kr} \Gamma^r_{sl} v^s$$

ist.

Die Extremalen wird man nach dem Muster der Riemannschen Geometrie dann bekommen, wenn die Kurve — aufgefasst als einparametrige Schar ihrer Tangentenvektoren — aus lauter parallelen Linienelementen besteht. Setzt man

$$v^i = \frac{dx^i}{dt}$$

so wird also

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^{*i}_{kr}\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^r}{dt} = 0. \tag{14}$$

Es gilt aber

$$\Gamma^{*i}_{kr} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^r}{dt} = 2G^i. \tag{15}$$

Somit ist (14) tatsächlich die Gleichung der Extremalen.

Eine andere ausgezeichnete Kurvenschaar erhält man folgendermassen. Für eine beliebige Kurve sei ein Feld von parallelen Linienelementen gegeben und die Tangenten der Kurven sollen in Bezug auf diese Schar von Linienelementen parallel sein. Zunächst, muss festgestellt werden, ob es solche Kurven gibt. Dass dies tatsächlich der Fall ist, sieht man folgendermassen ein. Ist a^i ein Vektor, des Linienelementes $(\underset{0}{x}, \underset{0}{v})$, dann stellt

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^i}{dt^2} &= -\Gamma^{*i}_{kl}(x, v) \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^l}{dt} \\ \frac{dv^i}{dt} &= -\Gamma^{*i}_{kl}(x, v)\, v^k \frac{dx^l}{dt} \end{aligned} \tag{16}$$

bei Zugrundelegung der Anfangsbedingungen

$$t = t_0, \quad x^i(t_0) = x^i_0, \quad v^i(t_0) = v^i_0, \quad \frac{dx^i}{dt}(t_0) = a^i$$

gerade eine solche Kurve dar. Wir wollen eine dem Differentialgleichungssystem (16) genügende Kurve als quasi-geodätisch und t als ihren affinen Parameter bezeichnen. Eine Extremale ist durch ein Linienelement eindeutig bestimmt. Eine Quasigeodätische ist eindeutig bestimmt, falls man in einem Linienelement (x_0, v_0) noch einen Vektor a^i angibt. Demnach kann man, falls ein Linienelement vorgegeben wird ein Bündel von Quasigeodätischen bestimmen, die alle dasselbe Anfangslinienelement besitzen. Dazu hat man nur in (x_0, v_0) den Vektor a^i variieren zu lassen. Es ist nun naheliegend an Stelle einer Kurvenschar durch einen Punkt, wie es in der Punktmannigfaltigkeit geschieht, im Falle der Linienelementmannigfaltigkeit eine auf ein und dasselbe Linienelement bezügliche Kurvenschar zu betrachten.

Setzt man alle vorkommenden Grössen als regulär-analytisch voraus, dann bekommt man für die Lösung von (16) die Reihenentwicklung

(17) $$x^i(s) = \underset{0}{x^i} + a^i(s-s_0) - \Gamma^{*i}_{jk}(x_0, v_0)\, a^j a^k (s-s_0)^2 - \Gamma^{*i}_{jkl}(x_0, v_0)\, a^j a^k a^l (s-s)^3 - \ldots$$

(17) ist für hinreichend kleine Werte $|s-s_0|$ konvergent. Setzt man jetzt

(18) $$y^i = a^i(s-s_0)$$

dann wird die rechte Seite von

(19) $$x^i = \underset{0}{x^i} + y^i - \Gamma^{*i}_{jk}(x_0, v_0)\, y^j y^k + \ldots$$

für hinreichend kleine

$$|y^i| < \varepsilon$$

konvergent sein. Da ausserdem

(20) $$\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\right)_{y^i=0} = \delta^i_k$$

st, so stellt (19) eine Koordinatentransformation dar. Wegen (18) gilt folgender

Satz 1. *Es gibt ein Koordinatensystem y^i für das die Quasigeodätischen, die alle dasselbe Bezugslinienelement $(\underset{0}{x}, \underset{0}{v})$ besitzen, sich in ihrem affinen Parameter linear und homogen darstellen lassen.*

Stellt man die Bedingung (20) so gilt sogar, dass es zu jedem Koordinatensystem x^i genau ein Koordinatensystem der gewünschten Art gibt. Dieses Koordinatensystem bezeichnen wir als das verallgemeinerte Normalkoordinatensystem. Aus (18) ergibt sich noch, dass nach Vorgabe eines Bezugslinienelementes das Zentrum dieses Linienelementes mit einem beliebigen Punkt durch eine und nur eine quasigeodätische verbunden werden kann, falls seine y^i Koordinaten dem Konvergenzbereich der Reihe (19) angehören. Daraus folgt

Satz 2. *Die Quasigeodätischen eines Bezugslinienelementes überdecken eine Umgebung ihres Zentrums schlicht.*

Wir weisen darauf hin, dass für die verallgemeinerten Normalkoordinaten eine Reihe von Eigenschaften der gewöhnlichen Normalkoordinaten erhalten bleiben. Diese Eigenschaften sind gerade für die Anwendungen besonders wichtig.

Eigenschaft 1. Sind x^i und $\bar{x}^i$ zwei Koordinatensysteme und besitzt das Bezugslinienelement derselben die Koordinaten $(\underset{0}{x}, \underset{0}{v})$ bezw. $(\bar{x}_0, \bar{v}_0)$, dann transformieren sich die zugehörigen Normalkoordinaten y^i bezw. $\bar{y}^i$ linear und homogen nach der Formel

$$\bar{y}_i = \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\right)_{x^k = \underset{0}{x^k}} y^k.$$

Der Beweis ist fast trivial. Es gilt ja

$$y^i = a^i (s - s_0)$$

und

$$\bar{y}^i = \bar{a}^i (s - s_0) = \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\right)_{\underset{0}{x}} a^k (s - s_0) = \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\right)_{\underset{0}{x}} y^k.$$

Aus der Eigenschaft 1. folgt, dass der Prozess der Erweiterung (extension) erklärbar ist. Daraus folgt aber, dass man sämtliche Differentialinvarianten der Finslerschen Geometrie so gewinnen kann, wie dies im Riemannschen Raum der Fall ist. Genauer handelt es sich um Folgendes: ist ein Tensor eine Funktion der die Raumstruktur festlegenden Grössen $\Gamma^{*i}_{jk}\, C^i_{jk}$ und der Ableitungen dieser Grössen nach x^i und v^i, und ist diese funktionale Abhängigkeit für jedes Koordinatensystem die gleiche, so wird der Tensor als eine Tensor-Differentialinvariante bezeichnet. Ist der Tensor ein Skalar, so handelt es sich um eine gewühnliche Differentialinvariante. Bezeichnet man noch, wie üblich die Ableitungen der Γ^{*i}_{jk} nach der Normalkoordinaten als Normaltensoren so gilt folgender

Satz 3. *Jede Tensordifferentialinvariante ist eine Funktion der Tensoren C^i_{jk}, seiner kovarianten Ableitungen, der Tensoren $\partial_{v^1} \ldots \partial_{v^s} C^i_{jk}$ und seiner kovarianten Ableitungen der Normaltensoren, sowie der Tensoren $\partial_{v^i} \ldots \partial_{v^h} \Gamma^{*i}_{jk}$. An Stelle der Normaltensoren und seiner kovarianten Ableitungen kann auch der Hauptkrümmungstensor und seine kovarianten Ableitungen eingeführt werden.*

Dieser Satz sowie sein Beweis befindet sich in der in [1] zitierten Arbeit. Die Eigenschaft 2. ist folgende: betrachten wir den euklidischen Raum, so sind die Normalkoordinaten gewöhnliche schiefwinkelige oder rechtwinkelige Koordinaten. Setzt man

$$\Omega \equiv \frac{1}{2} s^2 = \frac{1}{2} \left(\underset{(1)}{x_i} - \underset{(0)}{x_i}\right) \left(\underset{(1)}{x_i} - \underset{(0)}{x_i}\right)$$

so folgt

$$\frac{\partial\Omega}{\partial \underset{(0)}{x^i}} = -\underset{(1)}{X^i}.$$

H. S. Ruse [2] hat nachgewiesen, dass diese grundlegende Eigenschaft auch für die Normalkoordinaten der Riemannschen Geometrie bestehen bleibt. Dies bedeutet genauer Folgendes: wählt man einen Punkt $\underset{(0)}{x^i}$ als Zentrum der Normalkoordinaten, dann geht durch denselben und einen beliebigen Nachbarpunkt $\underset{(1)}{x^i}$ genau eine Geodätische. Der Bogen s auf einer Geodätischen ist also eine Funktion des Punktepaares. Setzt man

$$\Omega \equiv \frac{1}{2} s^2 = \varphi\left(\underset{(0)}{x}, \underset{(1)}{x}\right)$$

dann gilt für die Normalkoordinaten x^i

$$x^i = -\frac{\partial\Omega}{\partial \underset{0}{x^k}} g^{ki}(x_0) = -\Omega^i(x)$$

Mein Mitarbeiter A. Rapcsák [3] hat 1955 nachgewiesen, dass diese Eigenschaft wortwörtlich auch für die verallgemeinerten Normalkoordinaten bestehen bleibt. Eine wichtige Anwendungen dieser Eigenschaft 2. ist Folgende: Ist ein Vektor oder Tensorfeld gegeben und kann man dasselbe in eine Taylorsche Reihe entwickeln, dann werden die in dieser Reihe auftretenden Koeffizienten nicht koordinateninvariant sein. Mit Hilfe der Funktion Ω und den Erweiterungen des Tensors kann die Taylorsche Reihe invariant dargestellt werden. Für den Beweis siehe die in [3] angeführte Arbeit. Wir führen als Beispiel den Fall eines kovarianten Vektorfeldes an. Man erhält dann aus

$$\bar\lambda_i(\bar x, \bar l) = \bar\lambda_i(0, \underset{0}{l}) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial\bar\lambda_i(0, \lambda_0)}{\partial \bar x^k}\bar x^k + \frac{\partial\bar\lambda_i(0, l_0)}{\partial l^k}\left(\bar l^k - \underset{0}{l^k}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2\bar\lambda_i(0, l_0)}{\partial\bar x^{k_1}\partial\bar x^{k_2}}\bar x^{k_1}\bar x^{k_2} + \frac{\partial^2\bar\lambda_i(0, \lambda_0)}{\partial\bar x^{k_1}\partial\bar l^{k_2}}\bar x^{k_1}\left(l^{k_2} - \underset{0}{\bar l^{k_2}}\right)\right.$$

$$+\frac{\partial^2\bar\lambda(0, l_0)}{\partial\bar l^{k_1}\partial\bar l^{k_2}}\left(\bar l^{k_1} - \underset{0}{l^{k_1}}\right)\left(\bar l^{k_2} - \underset{0}{l^{k_2}}\right) +$$

wegen den Transformationsformen

$$\lambda_i(x, l) = -\Omega_i^k\bar\lambda_k(\bar x, \bar l)$$

$$\bar\lambda_i(0, \underset{0}{l}) = \delta_i^k\lambda_k(\underset{0}{x}, \underset{0}{l}) = \lambda_i(\underset{0}{x}, \underset{0}{l}).$$

die invariante Darstellung

$$\lambda_i(x,\ l) = -\,\Omega_i^k \Big\{ \lambda_k(\underset{0}{x},\ \underset{0}{l}) + \frac{1}{1!}\big[-\lambda_{k,k_1}(\underset{0}{x},\ \underset{0}{l})\,\Omega^{k_1}$$

$$+\lambda_{k|k_1}(\underset{0}{x},\ \underset{0}{l})\,(\overline{l^k} + \underset{\underline{0}}{l}^{k_1})\big] + \frac{1}{2!}\big[\lambda_{k,k_1k_2}(\underset{0}{x},\ \underset{0}{l})\ \Omega^{k_1}\,\Omega^{k_2}$$

$$-\lambda_{l|k_1|k_2}(\underset{0}{x},\ \underset{0}{l})\,.\,\Omega^{k_2}(\overline{l}^{k_1} - \underset{0}{l}^{k_1}) + \lambda_{k|k_1|k_2}(\underset{0}{x},\ \underset{0}{l})\,(\overline{l}^{k_1} - \underset{0}{l}^{k_1})(\overline{l}^{k_2} - \underset{0}{l}^{k_2})$$

$$+ \dots \Big\}.$$

Eingegangen am 27. X. 1956

LITERATUR

1. V a r g a, O. Normalkoordinaten in allgemeinen differentialgeometrischen Räumen und ihre Verwendung zur Bestimmung sämtlicher Differentialinvarianten. Comptes Rendus du Premier Congrés des Mathématiciens Hongrois. Budapest, 1952, 147–162.
2. R u s e, H. S. Taylors theorem in the tensor calculus. Proc. London Math. Soc. 32 (1931), 87—92.
3. R a p c s á k, A. Invariante Taylorsche Reihe in einem Finslerschen Raum. Publ. Math. Debrecen, 4 (1955), 49—60.
4. R a p c s á k, A. Eine neue Charakterisierung Finslerscher Räume skalarer und konstanter Krümmung und projektiv ebene Räume. Acta Math. Hung. Sci. 8 (1957), 1—18.
5. D u s c h e k A., W. M a y e r. Lehrbuch der Differentialgeometrie. Zweiter Band. Leipzig, Teubner, 1930.

ОБОБЩЕНИТЕ РИМАНОВИ НОРМАЛНИ КООРДИНАТИ И НЯКОИ ТЕХНИ ПРИЛОЖЕНИЯ

О. Варга (Дебрецен)

РЕЗЮМЕ

Във финслеровите пространства и техните афинни обобщения не могат да се въведат нормални координати, отнесени към един център, както това доказаха Х. Буземан и В. Майер. Ако в едно пространство е дадено едно успоредно пренасяне (отнесено към едно поле от линейни елементи) и ако са зададени един вектор и един линеен елемент, в това пространство може да се определи една т. нар. квазигеодезична крива. Ако многообразието е аналитично, квазигеодезичните на един линеен елемент покриват околността на центъра му еднолистно. Тогава може да се въведе една координатна система, при която геодезичните да имат линейно представяне по афинния си параметър. Това са обобщените риманови нормални координати. Х. С. Рузе доказа, че тривиалното в евклидовата геометрия свойство на нормалните координати — да съвпадат с точност до знака с частните производни на половината от квадрата на растоянието до началото — е в сила и за римановата геометрия. Като приложение се дава представянето на диференциални инварианти с помощта на нормални координати и се разглежда даденото от А. Рапчак инвариантно представяне на тейлоровата формула.

ОБОБЩЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ РИМАНОВЫЕ КООРДИНАТЫ

О. Варга (Дебрецен)

РЕЗЮМЕ

В финслеровых пространствах и в их аффинных обобщениях, как это установили Буземан и В. Мейер, нельзя ввести нормальные координаты, отнесенные к некоторому центру. Если в пространстве определён параллельный перенос по отношении к некоторому полю линейных элементов, и если задан линейный элемент и один вектор, тогда можно определить одну так называемую квазигеодезическую линию. Если многообразие аналитично, квазигеодезические линейного элемента покрывают окрестность его центра однолистно. Тогда можно ввести координатную систему, для которой квазигеодезические имеют в отношении их аффинного параметра линейное представление. Это и суть обобщенные нормальные координати. Г. С. Рузе показал, что тривиальное для эвклидовой геометрии свойство нормальных координат, а именно совпадение с точностью до знака с частными производными половины квадрата расстояния до начала, имеет место и в римановой геометрии. В качестве приложения дается представление дифференциальных инвариантов с помощью нормальных координат и, кроме того, рассматривается данное А. Рапчак'ом инвариантное представление формулы Тейлора.