ИЗПОЛЗВАНЕ НА КОМПЮТЪРНИ АЛГЕБРИЧНИ СИСТЕМИ ПРИ НАМИРАНЕ НА ФОРМУЛА ЗА ПРЕДСТАВЯНЕ НА РЕКУРЕНТНИ ЧИСЛОВИ РЕДИЦИ

Атанас Илчев

Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“
atanasilchev1@gmail.com

***Резюме**: Решаването на задачата за намиране на формула за общия член на хомогенни рекурентни уравнения изисква редица пресмятания. Написали сме последователност от команди в Maple, които извършват необходимите пресмятания. Представили сме и процедура, която извършва всичките пресмятания и извежда междинните резултати. Това помага на студентите да се концентрират върху методите за намиране на общата формула, вместо върху алгебричните пресмятания. Също така студентите могат да използват Maple за проверка на извършените пресмятания на всеки един етап.*

***Ключови думи**: компютърни алгебрични системи, рекурентна редица*

1. Въведение

Уменията да се работи с различни програмни продукти вече е не само желателно, а необходимост при обучението и изследванията. Един добър пример е използването на компютърни алгебрични системи (CAS) като *Maple* в часовете по математически анализ. Той помага на студентите да развиват умения за програмиране и алгоритмично мислене и повишава интереса към математиката дори и на студентите, които нямат необходимите математически умения. Студентите, които авторът обучава с помощта на CAS са от специалностите Математика, Приложна математика, Информатика във Факултета по математика и информатика при ПУ „Паисий Хилендарски“. На лекции преподавателят освен теорията и основните методи за решаване на задачите представя и възможностите да се използва Maple при решаването на задачи. Упражненията се провеждат в компютърни зали, където всеки студент работи сам на компютър. Хорариумът за специалностите Математика и Приложна математика е напълно достатъчен за развиване както на умения за решаване на задачите с лист и химикал, така и с помощта на CAS. Хорариумът на специалност Информатика е малък, което предполага да се преподават само най-основните резултати от математическия анализ, като за голяма част от тях се скицира само идеята на доказателствата. Всичко това дава основания за въвеждане на CAS при решаването на задачи. Използването на CAS не е сведено само да използване на вградените команди, а и към писането на код, който да извежда не само отговора, но и да извежда всички пресмятания, които би трябвало да бъдат извършени на ръка. Авторът използва CAS във всички теми, включени в учебната програма – редици, граница и непрекъснатост на функции, диференцируемост и приложение на диферецируемостта на функция, неопределен, определен и несобствен интеграл. Приложенията са при задачите за критерии за константност, монотонност на функция и доказване на неравенства, локални и глобални екстремуми на функция, решаване на интеграли с помощта на субституции и с интегриране по части. За част от приложенията се използват предварително дефинирани процедури, а за други се използват последователности от команди.

Така наречените три „М“ – *Maple*, *Mathemtica* и *MatLab* допринесоха много за промяната в използването на компютрите в числовите пресмятания. Всеки един от споменатите софтуери представлява завършен продукт за математически пресмятания. Разбира се, тези продукти постоянно се развиват и усъвършенстват. Първите два са известни още като CAS или символни изчисления, докато третият продукт е ориентиран по скоро към приближени пресмятания. Тази граница между трите „М“ все повече изчезва [3].

Maple манипулира информацията по символен начин. Можете да получите точни аналитични решения на много математически проблеми, включително интеграли, системи от уравнения, диференциални уравнения. *Maple* съдържа голям набор от графики, рутинни процедури за визуализиране на сложна математическа информация, цифрови алгоритми за осигуряване на прогнози и решаване на проблеми, където точно не съществуват решения и възможност за програмиране на нови процедури. *Maple* предоставя множество от различни опции в своя интерфейс [4] и [5]. Ние използваме режима за 2D визуализация на математиката, както при въвеждане така и при извеждане на резултатите. Този избор има предимството, че визуализацията изглежда възможно най-близка до класическата математика, писана с молив върху лист хартия [3].

Доколкото е известно на автора използването на CAS се практикува в различна степен и по различен начин в различни университети в България. Например в Технически университет - София студентите изучават Математика 1 и 2 без използването на CAS и в Математика 3 решават задачите в лабораторните упражнения с помощта на компютър; в Университета по хранителни технологии студентите изучават възможностите за решаване на задачи по математика с помощта на CAS само на лекции. На лабораторните упражнения в Технически университет - Варна задачите се решават чрез компютър, като се използва програмния продукт *Maple*. В Техническия университет - Габрово курсът по Висша математика 2 включва материал от математическия анализ. Традиционно се изучава темата „Есктремуми на функция на две променливи“. За специалности КСТ и КТТ са предвидени лабораторни упражнения, които се реализират със CAS. Тези часове помагат на студентите в ползването на математически софтуер, както и способстват за задълбочаване на техните знания по съответната дисциплина. В учебния процес са били използвани различни (CAS) като *Derive*, *Maple*, *Maxima* и др. При настоящите упражнения за решаване на задачи от съответната тема се използва системата *Julia* – съвременен софтуерен продукт, с който може да се работи и онлайн. В Русенски университет „Ангел Кънчев“ се използва *Maple* [7], *Matlab* [11] и *Mathematica* [10] за решаване на задачи, за проверка на решените задачи и за подготовка за Републиканската олимпиада по компютърна математика. Системата *Mathematica* се използва в курсовете по математически анализ в Нов български университет [2].

Доколкото е известно на автора, първи елементи в използването на компютър при преподаване на реален анализ има в учебника [6], където се използват езиците FORTRAN или BASIC и в учебника [9], където се използва езика ALGOL за решаване на отделни задачи. Развитието на Алгебричните компютърни системи позволява да се разшири множеството от задачи, които могат да бъдат решавани и с помощта на компютър [8].

2. Основен текст

Рекурентните редици имат множество приложения в математиката и в други области на науката и приложенията. Ще споменем пресмятането на неопределен и определен интеграл, теория на неподвижните точки, числени методи, финансовата математика, информатиката, биологията и други области. В монографията [1] са дадени приложения на рекурентните редици, тематика известна още като диференчни уравнения, която през последното десетилетие се развива изключително много.

Ще разгледаме един частен случай на редици, зададени с рекурентна връзка, а именно хомогенни рекурентни уравнения.

Задача 1 (редица на Фибоначи): Нека редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена с рекурентната връзка $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, за $n > 2$. Напишете процедура, която да извежда на екрана първите 20 члена на редицата и 112 -я член на редицата.

Използвайки лист и молив или калкулатора на компютъра, можем лесно да напишем първите няколко члена на редицата $1,1,2,3,5,8,13, \ldots$.

Ще дефинираме рекурсивна процедура, която да пресмята членовете на редицата на Фибоначи:

$g := proc\ (a)$

$if\ 2\ <\ a\ then\ thisproc(a-1) + thisproc(a-2)$

$elif\ 2\ =\ a\ then\ 1$

$else\ 1$

$end\ if$

$end\,proc;\ seq(g(i), i = 1..20);\ g(30)$

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597,$
$2584, 4181, 6765.$

Забелязваме, че времето необходимо за пресмятане на $g(112)$ е много и спираме пресмятанията. Това се случва, защото за да пресметне $g(112)$, Maple вижда, че $g(112) = g(111) + g(110)$. Софтуерът започва да пресмята $g(111)$, което е равно на $g(110) + g(109)$ и т.н. Пресмятайки веднъж $g(1)$ се връща обратно и намира $g(111) = g(110) + g(109)$. Проблемът е, че когато започне да пресмята g(110), цялата процедура се повтаря, понеже всички пресмятания до момента се изтриват. Ако добавим параметъра $option\,remember$, тогава всички пресметнати до момента стойности $g(k)$ се запазват за повторно използване, ако се окаже необходимо.

$g := proc\ (a)$
$option\,remember;$
$if\ 2 < a\ then\ thisproc(a-1) + thisproc(a-2)$
$elif\ 2 = a\ then\ 1$
$else\ 1$
$end\ if$
$end\,proc;$
$g(112);$
114059301025943970552219

Добре известно е, че общите членове на аритметичната и геометричната прогресии имат представяне както с рекурентна връзка, така и чрез формула.

Нека разгледаме отново редицата на Фибоначи.

Задача 2 (редица на Фибоначи): Нека редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена с рекурентната връзка $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, за $n > 2$. Намерете формула, която да задава общия член a_n, като функция на n.

Добре известният метод [8] е да потърсим редица от вида $\{\alpha^n\}_{n=1}^{\infty}, \alpha \neq 0$, която удовлетворява рекурентната връзка. Тогава би трябвало $a_n = \alpha^n$. След заместване в рекурентното условие получаваме уравнението $\alpha^n = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}$, което се нарича характеристично. Отчитайки $\alpha \neq 0$ получаваме, че характеристичното уравнение е еквивалентно на квадратното уравнение $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$. Решенията на последното уравнение са

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ и } \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Всяка от редиците $\{\alpha_i^n\}_{n=1}^{\infty}, i = 1,2$, както е редицата $\{x\alpha_1^n + y\alpha_2^n\}_{n=1}^{\infty}$ за произволни $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяват рекурентното условие $a_n = a_{n-1} +$

a_{n-2}. Ще намерим $x, y \in \mathbb{R}$, така че $x\alpha_1^1 + y\alpha_2^1 = a_1$ и $x\alpha_1^2 + y\alpha_2^2 = a_2$. Така след решаване на системата

$$\left| \begin{array}{l} x\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + y\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \\ x\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + y\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{array} \right.$$

получаваме $x = \frac{1}{\sqrt{5}}, y = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Следователно формулата за общия член на редицата е $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Maple дава възможност лесно да извършим поредицата от пресмятания, необходими за намиране на формула за общия член на рекурентната редица [8]. Да дефинираме

$f := (u, v) \to u + v;$

Решаваме характеристичното уравнение

$sol := solve(\alpha^n = f(\alpha^{n-1}, \alpha^{n-2}), \alpha).$

Различните от нула корени на характеристичното уравнение са $sol[1]$ и $sol[2]$. Дефинираме уравненията $eq1 := x. sol[1] + y. sol[2] = a1$ и $eq2 := x. (sol[1])^2 + y. (sol[2])^2 = a2$. Полагаме $a1 = 1, a2 = 1$ и решаваме системата уравнения

$sol2 := solve(\{eq1, eq2\}, \{x, y\}).$

Дефинираме формулата за общия член на редицата

$a := n \to (eval(x, sol2[1])) \cdot (sol[1])^n + (eval(y, sol2[1])) \cdot (sol[2])^n.$

С командата $seq(simplify(a(i)), i = 1..10)$ извеждаме на екрана първите 10 члена на редицата.

Използвайки току що написаните команди, можем лесно да решим всяка задача за намиране на формула за общия член на редица, зададена с рекурентна връзка $a_n = ca_{n-1} + da_{n-2}$ и $a_1 = a, a_2 = b$. Ще илюстрираме със следващата задача, която не е от учебника [7].

Задача 3: Нека редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена с рекурентната връзка $a_1 = 2, a_2 = 3, a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$. Намерете формула, която да задава общия член a_n, като функция на n.

Дефинираме

$f := (u, v) \to u + 2v;$

Решаваме характеристичното уравнение

$sol := solve(\alpha^n = f(\alpha^{n-1}, \alpha^{n-2}), \alpha).$

Дефинираме уравненията $eq1 \coloneqq x.sol[1] + y.sol[2] = a1$ и $eq1 \coloneqq x.(sol[1])^2 + y.(sol[2])^2 = a2$. Полагаме $a1 = 2, a2 = 3$ и решаваме системата уравнения

$sol2 \coloneqq solve(\{eq1, eq2\}, \{x, y\})$.

Получаваме решения $\left\{\frac{-1}{3}, \frac{5}{6}\right\}$.

Дефинираме формулата за общия член на редицата

$$a \coloneqq n \to (eval(x, sol2[1])) \cdot (sol[1])^n + (eval(y, sol2[1])) \cdot (sol[2])^n$$

и получаваме $a(n) = -\frac{(-1)^n}{3} + \frac{5}{6}2^n$

С командата $seq\big(simplify\big(a(i)\big), i = 1..100\big)$ извеждаме на екрана първите 100 члена на редицата.

Можем да напишем процедура, която да включва всичките команди, които използваме за намирането на формула, която да задава общия член на рекурентната редица:

$g := proc\ (f, a1, a2)$
$local\ sol, eq1, eq2, sol2, a;$
$sol := solve(alpha^2 = f(alpha, 1), alpha);\ print(sol);$
$eq1 := x \cdot sol[1] + y \cdot sol[2] = a1;\ print(eq1);$
$eq2 := x \cdot sol[1]^2 + y \cdot sol[2]^2 = a2;\ print(eq2);$
$sol2 := solve(\{eq1, eq2\}, [x, y]);\ print(sol2);$
$a := n \to \big(eval(x, sol2[1])\big) \cdot sol[1]^n + \big(eval(y, sol2[1])\big) \cdot sol[2]^n;$
$print\big(a(n)\big); seq\big(simplify\big(a(i)\big), i = 1..20\big)$
$end\ proc;$

Да дефинираме редиците $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ и $a_1 = 2, a_2 = 1, a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$: $f{:}\,(u, v) \to u + v$ и $h{:}\,(u, v) \to 3 \cdot u - 2 \cdot v$. Пресмятаме $g(f, 1,1)$, $g(h, 2,1)$ и получаваме:

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$x\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right) + y\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$x\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + y\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\left[\left[x = \frac{\sqrt{5}}{5}\right], \left[x = \frac{-\sqrt{5}}{5}\right]\right]$$

$$\frac{-\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)^n$$

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597,$
$2584, 4181, 6765$

и

$1, 2$

x$+2y$=2

x$+4y$=1

$$\left[[x = 3], \left[x = \frac{-1}{2}\right]\right]$$

$$3 - \frac{2^n}{2}$$

$2, 1, -1, -5, -13, -29, -61, -125, -253, -509, -1021, -2045, -4093,$
$-8189, -16381, -32765, -65533, -131069, -262141, -524285$

Сега нека разгледаме по-сложна задача, която доколкото е известно на автора, не е включена в учебниците, където $a_n = a.a_{n-1} + ba_{n-2} + ca_{n-3}, n > 3$.

Задача 4: Нека редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена с рекурентната връзка $a_1 = 5, a_2 = 69, a_3 = 221, a_n = 4.a_{n-1} + 7a_{n-2} - 10a_{n-3}, n > 3$. Намерете формула, която да задава общия член a_n, като функция на n.

Дефинираме

$f := (u, v) \rightarrow 4u + 7v - 10t;$

Решаваме характеристичното уравнение

$sol := solve(\alpha^3 = f(\alpha^2, \alpha, 1), \alpha)$

и получаваме корените $\{5,1,-2\}$.

Дефинираме уравненията

$eq1 := x.sol[1] + y.sol[2] + z.sol[3] = a1,$

$eq2 := x.(sol[1])^2 + y.(sol[2])^2 + z.(sol[3])^2 = a2$

$eq3 := x.(sol[1])^3 + y.(sol[2])^3 + z.(sol[3])^3 = a3$

Полагаме $a1 = 5, a2 = 69, a3 = 221$ и решаваме системата уравнения $sol2 := solve(\{eq1, eq2, eq3\}, \{x, y, z\})$.

Получаваме решения $\{2, 3,4\}$.

Дефинираме формулата за общия член на редицата

$$a := n \rightarrow \big(eval(x, sol2[1])\big) \cdot (sol[1])^n + \big(eval(y, sol2[1])\big) \cdot (sol[2])^n + (eval(z, sol2[1])) \cdot (sol[3])^n$$

и получаваме $a(n) = 2.5^n + 3 + 4.(-2)^n$

С командата $seq(simplify\big(a(i)\big), i = 1..10)$ извеждаме на екрана първите 10 члена на редицата.

Колкото по-далечни елементи от редицата на Фибоначи се вземат, толкова частното на две съседни числа се доближава до златното сечение (приблизително 1.618 или 0.618) в зависимост дали вземаме $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ или $\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

Лесно можем да докажем този факт. Да разгледаме редицата $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Изпълнени са неравенствата $\frac{a_3}{a_2} > \frac{a_4}{a_3} > \frac{a_6}{a_5}$. Да допуснем, че е в сила неравенството $\frac{a_{n-1}}{a_n} > \frac{a_n}{a_{n+1}}$. Тогава $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} > 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$. Следователно по индукция получаваме, че $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n=2}^{\infty}$ е монотонно растяща и следователно редицата $\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\}_{n=2}^{\infty}$ е монотонно намаляваща. Очевидно е ограничена от долу от нулата, следователно е сходяща. Тогава, ако означим $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$, след граничен преход в рекурентната връзка $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_n + a_{n-1}} = \frac{\mathbf{1}}{1+\frac{a_{n-1}}{a_n}}$ получаваме $l = \frac{\mathbf{1}}{1+l}$ или $l = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. От $l \geq 0$ следва, че

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}.$$

Не е толкова лесно да се намери границата на редицата от Задача 4.

Възможно е да се опитаме да намерим приближени стойности на границата $\frac{a_n}{a_{n+1}}$, като използваме процедурата $g(a)$ за пресмятане на членовете на редиците $seq\left(eval\left(\frac{g(a_n)}{g(a_{n+1})}\right), n = 1..100\right)$.

Maple дава възможност за намиране на границата или на приближени стойности на границата за редиците $\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ от разгледаните задачи 2, 3 и 4. Ако използваме представянето на редиците от задачи 2, 3 и 4 чрез формули, можем да пресметнем границите с помощта на *Maple* с командата $\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{a(n+1)}$ и получаваме съответно $\frac{2}{1+\sqrt{5}}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{5}$.

Заключение

Представените примери са използвани при обучението на студентите във Факултета по математика и информатика при Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“. С удоволствие искаме да отбележим, че използването на CAS в часовете по математически анализ повиши интереса на студентите към предмета. Въвеждането на компютърни алгебрични системи в часовете по математика обогатява познанията на студентите и ги подготвя за предизвикателствата на информационното общество. Студентите проявяват интерес не само да решават задачи от сборниците, но и се опитват самостоятелно да съставят нови задачи и да експериментират с помощта на *Maple*.

Благодарности

Авторът е частично финансиран по проект МУ-ФМИ-007 на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“.

Авторът изказва благодарности на анонимните рецензенти за техните препоръки, които повишиха качеството на статията.

Литература

1. R. Agarwal, Difference Equations and Inequalities – Theory, Methods, and Applications, Marcel Dekker, Inc., Ney York-Basel, 2000.
2. P.Asenova, M.Marinov: Teaching mathematics with computer systems, Proceedings of theForty-seventh Spring Conference of theUnion of Bulgarian Mathematicians Borovets, April 2–6, 2018, 213-221.
3. J. Borwein, H. Holden: An Introduction to Modern Mathematical Computing with Maple™, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011
4. B. Char: MapleLearningGuide, WaterlooMapleInc. 2003
5. A. Heck: IntroductiontoMaple, Springer, New York, 2003.
6. R. Wilson: Much Ado about Calculus - A Modern Treatment with Applications Prepared for Use with the Computer, Springer –Verlag, New York, 1979
7. Р. Василева-Иванова, Е. Великова: Съвременни методи на обучение по математика, Научни трудове на Русенския университет, **54**(6.4), 40-45, 2015.
8. Б Златанов: Математически анализ - интегрално смятане на функция на една променлива (onlinehttp://fmi-plovdiv.org/GetResource?id=1760) (под печат)
9. В. Ильин, В. Садовничий, Бл. Сендов: Математический анализ - начальный курс, Издательство Московского университета, 1985.
10. С. Караколева, И. Георгиев: Компютърна математика за мотивирани студенти, VI -та Национална конференция „Образованието в информационното общество”, 120-127.
11. А. Михова: Използване на компютърната системата Mathematica при изучаване на определен интеграл, Научни трудове на Русенския университет, 52(6.1), 47-51, 2013.

USE OF COMPUTER ALGEBRA SYSTEMS IN FINDING OF A FORMULA FOR THE n TERM OF A RECURRENT SEQUENCE

Abstract: *Solving the problem of finding a formula for the n term of a recurrent sequence with a linear dependence requires a series of calculations. We have written a sequence of commands in Maple that make all the necessary calculations. This helps students concentrate on methods of finding the general formula instead of algebraic calculations. Also, students can use Maple to check the completed calculations at each stage. Students can try to compose more difficult problems with linear connection between* 4 *and more consecutive terms of the recurrent sequence.*