АДДИТИВНЫЕ ЗАДАЧИ С РАСТУЩИМ ЧИСЛОМ СЛАГАЕМЫХ*

А. Г. Постников (Москва)

За последние годы широкое развитие получили вероятностные методы в теории чисел. Суть метода заключается в том, что задача теории чисел интерпретируется как задача теории вероятностей и сочетание общих теорем теории вероятностей со специфическими теоретикочисловыми особенностями задачи позволяет её решить. Обзор большого количества таким образом полученных фактов можно найти в обзоре [1].

§ 1

Рассмотрим такую задачу. Пусть имеется какая-либо функция $f(x)$, принимающая при целых значениях целые значения. Ищется число представлений целого N в виде

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n),$$

когда $0 \leq x_i \leq P, \quad i=1, 2, \ldots, n$ и $n \to \infty$.

Если P фиксировано, то такая задача просто решается указанным вероятностным методом, а именно непосредственным применением локальной предельной теоремы для сумм независимых случайных величин [2, стр. 250].

Остановимся на этом подробнее в случаях, когда $f(x)=x$ и $f(x)=x^2$.

Пример 1. Пусть $r_{n,P}(N)$ обозначает число решений уравнения

$$x_1+x_2+\quad+x_n=N \tag{1}$$

в числах $0 \leq x_i \leq P, \quad i=1, 2, \ldots, n$; P—фиксировано.

Рассмотрим независимые случайные величины ξ_i, определенные следующим законом распределения

Значения:	0	1	P
Вероятности:	$\frac{1}{1+P}$	$\frac{1}{1+P}$	$\frac{1}{1+P}$

* Содержание доклада перед Научной сессией болгарских математиков. София, октябрь 1956.

Рассмотрим случайную величину

$$\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n.$$

Сосчитаем вероятность $P(\zeta_n = N)$. Вероятность есть отношение числа благоприятствующих событию случаев к общему числу случаев. Общее число случаев $(P+1)^n$, число благоприятствующих случаев равно $r_{n,P}(N)$,

$$P(\zeta_n = N) = \frac{r_{n,P}(N)}{(P+1)^n}.$$

Слагаемые являются решетчатыми случайными величинами с максимальным шагом $h=1$.

Поэтому для определения $P(\zeta_n = N)$ и, следовательно, для $r_{n,P}(N)$ можно применить локальную предельную теорему.

Мы получаем, что равномерно относительно целых N имеет место формула

$$r_{n,P}(N) = \frac{(P+1)^n}{\sqrt{\pi n \frac{P^2+2P}{6}}} e^{-\frac{\left(N-n\frac{P}{2}\right)^2}{n\frac{P^2+2P}{6}}} + O\left(\frac{(P+1)^{n-1}}{n}\right). \tag{2}$$

Если рассматривается задача о представлении N в виде

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = N \tag{3}$$

$0 \leq x_i < P$, $i = 1, 2, \ldots$; P—фиксированно (число рещений снова будем обозначать $r_{n,P}(N)$, то надо рассмотреть независимые случайные величины ξ_i со следующим законом распределения:

Значения:	0	1^2	P^2
Вероятности:	$\frac{1}{P+1}$	$\frac{1}{P+1}$	$\frac{1}{P+1}$

и их суммы

$$\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n.$$

Снова применяя локальную предельную теорему, мы получаем: при $P \to \infty$

$$r_{n,P}(N) = \frac{(P+1)^n}{\sqrt{\pi n \frac{P(P+2)(2P+1)(8P-3)}{90}}} e^{-\frac{\left(N-n\frac{P(2P+1)}{6}\right)^2}{n\frac{P(P+2)(2P+1)(8P-3)}{90}}} + O\left(\frac{(P+1)^{n-2}}{n}\right). \tag{4}$$

§ 2

Одним из методов доказательства локальной предельной теоремы является метод характеристических функций. Анализ этого до-

казательства показывает, что в приложении к нашим задачам, он основывается на нижеследующем представлении числа решений:

$$r_{n,P}(N)=\int\limits_0^1\Big(\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i\alpha x}\Big)^n e^{-2\pi i\alpha N}\,d\alpha \tag{5}$$

в линейном случае;

$$r_{n,P}(N)=\int\limits_0^1\Big(\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i\alpha x^2}\Big)^n e^{-2\pi i\alpha N}\,d\alpha \tag{6}$$

в квадратичном случае.

Таким образом здесь применяется такое же представление, как и в классических аддитивных задачах.

Однако обращение с этим выражением в теории вероятностей и в аддитивной теории чисел разное: в теории вероятностей растет n, а P остается фиксированным, в задачах типа проблемы Варинга наоборот n фиксировано, а P увеличивается, в частности применяются оценки тригонометрических сумм

$$\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i\alpha x^k} \qquad (k\text{—целое}) \tag{7}$$

при $P\to\infty$.

Естественно пытаться соединить обе техники. Это было осуществлено (в случае этих двух задач) А. Г. Постниковым в работе [3]. Именно был оставлен теоретиковероятностный план, но были использованы оценки тригонометрических сумм в растущим верхним пределом суммирования.

Оказалось при этом, что написанные формулы (2) и (4) остаются в силе, когда P может и расти с ростом n. Именно эти формулы остаются в силе при P изменяющимся между 1 и k^n, где k константа > 1.

§ 3

Исследования такого рода были продолжены Г. А. Фрейманом (Казань) [4]. Теоремы, полученные при помощи локальной предельной теоремы, нетривиальны лишь когда N не отклоняется далеко от среднего значения. В рассматриваемых случаях: в формуле (2) при $\left|N-n\frac{P}{2}\right| \quad CP\sqrt{n}\,o(\ln n)$, C — константа, $P\leq k^n$; в формуле (3) при $\left|N-n\frac{P(2P+1)}{6}\right|<CP^2\sqrt{n}\,o(\ln n)$.

Для исследования далеких отклонений в теории вероятностей развит (повидимому А. Я. Хинчиным*) метод, аналитическая природа которого состоит в использовании вместо преобразования Фурье — Стильтьеса

* *Примечание при коректуре:* Ранее А. Я. Хинчина этот прием был у Г. Крамера.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)$$

(характеристической функции) преобразования Лапласа—Стильтьеса

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma+itx}\, dF\,(x).$$

А. Я. Хинчин [5, стр. 254] этим методом решает (для нужд квантовой статистики) задачу, которая в терминах теории чисел ставится так: находится асимптотическая формула для числа решений диофантова уравнения

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=N$$

когда $n\to\infty$ и $\frac{N}{n}$ остается постоянным. Без изменения метода может быть решена задача об асимптотической формуле для числа решений уравнения

$$x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k=N \tag{8}$$

при k — фиксированном, $n\to\infty$, $\frac{N}{n}$ остается постоянным. Соединив идею А. Я. Хинчина с идеей использования тригонометрических неравенств, Г. А. Фрейман снимает ограничение о том, что $\frac{N}{n}$ остается постоянным и тем самым решает проблему Варинга с растущим числом слагаемых. Приводим формулировку теоремы Г. А. Фреймана

Теорема. Пусть $r_n(N)$ число решений уравнения (8) при $n\to\infty$ и $n<\gamma N$, где $0<\gamma<1$. Имеет место следующая формула:

$$r_n(N)=\frac{1}{\sqrt{2\pi n D\xi}}\, e^{\sigma N}\, \Phi^n(\sigma)\left[1+O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\right)\right], \tag{9}$$

где σ определяется из уравнения

$$\frac{N}{n}=\frac{\sum\limits_{x=1}^{\infty} x^k e^{-\sigma x^k}}{\sum\limits_{x=1}^{\infty} e^{-\sigma x^k}}$$

(легко доказать, что это уравнение имеет корень при $n<\gamma N$);

$$\Phi(\sigma)=\sum_{x=1}^{\infty} e^{-\sigma x^k}$$

ξ случайная величина, которая принимает значения x^k $(x=1, 2, \ldots)$ с вероятностями $\frac{e^{-\sigma x^n}}{\Phi(\sigma)}$, $D\xi$ — её дисперсия; $\varepsilon > 0$ постоянная сколь угодно малая.

Поступило в редакцию 6. XI. 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Кубилюс, И. П. Вероятностные методы в теории чисел. Успехи математических наук, 11, (1956).
2. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей. Москва, 1954.
3. Постников, А. Г. Аддитивные задачи с растущим числом слагаемых. Печатается в Известиях Академии наук СССР.
4. Фрейман, Г. А. Проблема Варинга с растущим числом слагаемых. Печатается в Трудах Пединститута гор. Елабуги.
5. Хинчин, А. Я. Математические основания квантовой статистики. Москва, 1951.

АДИТИВНИ ЗАДАЧИ С РАСТЯЩ БРОЙ НА СЪБИРАЕМИТЕ

А. Г. Постников (Москва)

РЕЗЮМЕ

Работата съдържа преглед на новите приложения на граничните теореми на теорията на вероятностите във връзка с метода на тригонометричните суми.

ÜBER ADDITIVE AUFGABEN MIT WACHSENDER SUMMANDENANZAHL

A. G. Postnikov (Moskau)

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Vortrag wird eine Übersicht über neue Anwendungen der Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, in Verbindung mit der Methode der trigonometrischen Summen, für additive Aufgaben gegeben.