МАКСИМАЛНИ ОБЛАСТИ НА ЕДНОЛИСТНОСТ НА НЯКОИ КЛАСИ АНАЛИТИЧНИ ФУНКЦИИ

Л. Чакалов

1. Ако е дадена една класа (C) от аналитични функции на z, под област на еднолистност относно класата (C) ще разбираме такава област G* в равнината на комплексната променлива z, в която всяка функция от класата (C) е холоморфна и еднолистна. Една такава област G ще наричаме максимална, когато тя притежава още следното свойство: ако присъединим към G произволно малка околност на коя да е нейна контурна точка, то така разширената област G_1 вече не е област на еднолистност относно класата (C), което означава, че съществува поне една функция от (C), която или не е холоморфна в G_1, или ако е холоморфна, не е еднолистна в G_1. Така например за класата (C') на двучлените от вида az^2+b, където $a \neq 0$, всяка полуравнина, граничната права на която минава през точката $z=0$, представя максимална област на еднолистност за класата (C'). С това обаче не се изчерпват всички такива области. Така например не е мъчно да се види, че областта, състояща се от всички точки $z=x+iy$, които лежат над кубичната парабола $y=x^3$, представя също максимална област на еднолистност относно разглежданата класа (C').

В настоящата работа си поставяме за задача да намерим всевъзможните максимални области на еднолистност, отговарящи на някои класи аналитични функции. При това ще се ползуваме от следната

Помощна теорема. *Ако модулите на комплексните числа u и v са по-малки от $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, то реалната част на произведението $(1-u)(1-v)$ е положителна.*

И наистина, ако означим с $\operatorname{Re} z$ реалната част на комплексното число z и със $\bar{z}$ спрегнатото число на z, то

$$
\begin{aligned}
2\operatorname{Re}(1-u)(1-v) &= (1-u)(1-v)+(1-\bar{u})(1-\bar{v}) \\
&= 2-u-v-\bar{u}-\bar{v}+uv+\bar{u}\bar{v} \\
&= (1-u-\bar{v})(1-\bar{u}-v)+1-u\bar{u}-v\bar{v}
\end{aligned}
$$

---

* Тук под област разбираме, както е общоприето, такова свързано точково множество в равнината (z), което се състои само от вътрешни точки.

$$= |1-u-v|^2 + 1 - |u|^2 - |v|^2 > 0,$$

защото $|u|^2 < \frac{1}{2}$, $|v|^2 < \frac{1}{2}$.

2. Да разгледаме класата на рационалните функции от вида

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{z-a_k} \tag{1}$$

с положителни резидууми A_k и с произволен брой членове. Както ще видим, всяка функция от този вид е еднолистна в околността на безкрайно отдалечената точка. По-точно ще докажем следната

Теорема 1. Да означим с $C(z_0, R)$ класата на рационалните функции от вида (1) с положителни резидууми A_k, всички полюси на които лежат в кръга $|z-z_0| \leqq R$. При тези предположения единствената максимална област на еднолистност за класата $C(z_0, R)$ е кръговата област $|z-z_0| > R\sqrt{2}$.

Доказателство. Да означим със z и z_1 две комплексни числа, подчинени на неравенствата

$$|z-z_0| > R\sqrt{2}, \quad |z_1 - z_0| > R\sqrt{2}, \quad z \neq z_1. \tag{2}$$

Разликата

$$f(z) - f(z_1) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{z-a_k} - \frac{1}{z_1 - a_k} \right) A_k$$

може да се преобразува още така:

$$f(z) - f(z_1) = \frac{z_1 - z}{(z-z_0)(z_1-z_0)} \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{\left(1 - \frac{a_k - z_0}{z-z_0}\right)\left(1 - \frac{a_k - z_0}{z_1 - z_0}\right)} \tag{3}$$

Като вземем пред вид, че

$$|a_k - z_0| \leqq R, \quad |z-z_0| > R\sqrt{2}, \quad |z_1 - z_0| > R\sqrt{2}$$

и следователно

$$\left| \frac{a_k - z_0}{z-z_0} \right| < \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \left| \frac{a_k - z_0}{z_1 - z_0} \right| < \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

и приложим помощната теорема за сумата в дясната страна на (3), явно е, че числената стойност на израза (3) е различна от нула, щом са в сила неравенствата (2). Така ние доказахме, че функцията (1) е еднолистна в областта $|z-z_0| > R\sqrt{2}$.

Остава да докажем, че тази област е максимална относно разглежданата класа функции, т. е. че ако $\zeta = z_0 + R\sqrt{2}e^{i\varphi}$ е произволна точка върху контурната окръжност $|z-z_0| = R\sqrt{2}$, то съществува функция

$f(z) \in C(z_0, R)$, която не е еднолистна в околността на точката ζ. Такава е именно функцията

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0 - Ru_1 e^{i\varphi}} + \frac{1}{z - z_0 - Ru_2 e^{i\varphi}},$$

където u_1 и u_2 означават корените на квадратното уравнение

$$u^2 - \sqrt{2}\, u + 1 = 0.$$

И наистина

$$f'(z) = -\frac{2(z - z_0)(z - z_0 - R\sqrt{2}\, e^{i\varphi})}{(z - z_0 - Ru_1 e^{i\varphi})^2 (z - z_0 - Ru_2 e^{i\varphi})^2},$$

откъдето се вижда, че $f'(\zeta) = 0$, поради което $f(z)$ не може да бъде еднолистна в околността на точката $\zeta = z_0 + R\sqrt{2}\, e^{i\varphi}$.

Нека добавим тук, че областта $|z - z_0| > R\sqrt{2}$ е единствената максимална област на еднолистност относно класата $C(z_0, R)$. Достатъчно е за тази цел да докажем, че на всяка точка ζ_1, различна от z_0, която лежи в кръга $|z - z_0| \leqq R\sqrt{2}$, отговаря функция $f_1(z) \in C(z_0, R)$, която не е еднолистна в околността на точката ζ_1. Ако $\zeta_1 = z_0 + r\sqrt{2}\, e^{i\varphi}$, където $0 < r \leqq R$, то въпросното свойство притежава функцията

$$f_1(z) = \frac{1}{z - z_0 - ru_1 e^{i\varphi}} + \frac{1}{z - z_0 - ru_2 e^{i\varphi}},$$

където u_1 и u_2 имат същото значение, както по-горе, защото $f_1'(z)$ се анулира за $z = z_0 + r\sqrt{2}\, e^{i\varphi} = \zeta_1$.

3. Да разгледаме класата $C(h)$ от аналитични функции, представени чрез Стилтйесовия интеграл

$$h(z) = \int_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{z - t}, \tag{4}$$

където $\alpha(t)$ е растяща функция на реалната променлива t, дефинирана в интервала $-1 \leqq t \leqq 1$ и притежаваща поне една точка на растеж. Не е мъчно да се докаже, че всяка функция от вида (4) е еднолистна в областта $|z| > \sqrt{2}$. Нека z и z_1 да са две различни точки от тази област. Тогава

$$\frac{h(z) - h(z_1)}{z_1 - z} \cdot z z_1 = \int_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{\left(1 - \frac{t}{z}\right)\left(1 - \frac{t}{z_1}\right)}.$$

Като имаме пред вид, че

$$\left|\frac{t}{z}\right| < \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \left|\frac{t}{z_1}\right| < \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

и приложим за подинтегралната функция на последния интеграл помощната теорема от точка 1, явно е, че реалната част на този интеграл е положителна, откъдето следва, че

$$h(z) \neq h(z_1), \text{ ако } z \neq z_1, \ |z| > \sqrt{2}, \ |z_1| > \sqrt{2}.$$

Важно е обаче да забележим, че в случая областта на еднолистност $|z| > \sqrt{2}$ не е максимална, защото е в сила

Теорема 2. Областта $|z| > 1$ е единствената максимална област на еднолистност относно класата на аналитичните функции от вида (4), където $\alpha(t)$ означава произволна растяща и интегруема функция на t в интервала $-1 \leqq t \leqq 1$, притежаваща поне една точка на растеж.

Доказателство. Нека z и z_1 да са две различни точки от въпросната кръгова област:

$$|z| > 1, \ |z_1| > 1, \ z \neq z_1. \tag{5}$$

Трябва да докажем на първо място, че $h(z) \neq h(z_1)$, т. е. че

$$\frac{h(z) - h(z_1)}{z_1 - z} = \int_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{(z-t)(z_1-t)} \neq 0. \tag{6}$$

Това е очевидно, ако комплексните числа z и z_1 са спрегнати или пък ако и двете са реални, защото тогава подинтегралната функция на интеграла (6) е реална и запазва при допълнителните условия (5) един и същ знак в целия интервал $-1 \leqq t \leqq 1$. Ето защо по-долу ще предполагаме, че числата $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$ [подчинени на условията (5)] не са спрегнати и че поне едно от тях не е реално. При тези предположения съществуват само две възможности, а именно: а) z и z_1 не лежат от двете страни на реалната ос и б) z и z_1 лежат от двете страни на реалната ос.

а) Точките z и z_1 не лежат от двете страни на реалната ос; с други думи предполагаме, че

$$z \neq z_1, \ |z| > 1, \ |z_1| > 1, \ yy_1 \geqq 0, \ y + y_1 \neq 0. \tag{7}$$

Ако означим с I и $\bar{I}$ интегралите

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{(z-t)(z_1-t)}, \quad \bar{I} = \int_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{(\bar{z}-t)(\bar{z}_1-t)}, \text{ то}$$

$$(z+z_1)I - (\bar{z}+\bar{z}_1)\bar{I} = \int_{-1}^{1} \frac{(z+z_1)(\bar{z}-t)(\bar{z}_1-t) - (\bar{z}+\bar{z}_1)(z-t)(z_1-t)}{|z-t|^2 |z_1-t|^2} d\alpha(t)$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{(z-\bar{z})(z_1\bar{z}_1 - t^2) + (z_1-\bar{z}_1)(z\bar{z} - t^2)}{|z-t|^2 |z_1-t|^2} d\alpha(t)$$

$$= -2i\int_{-1}^{1}\frac{y(|z_1|^2-t^2)+y_1(|z|^2-t^2)}{|z-t|^2|z_1-t|^2}\,d\alpha(t),$$

откъдето се вижда, че при предположенията (7) последният интеграл не е равен на нула, тъй като подинтегралната му функция е реална и запазва един и същ знак в интервала $-1\leqq t\leqq 1$, а именно знака на $y+y_1$. Оттук следва, че в случая а) интегралът (6) не може да бъде равен на нула, защото от $I=0$ би следвало $\overline{I}=0$, $(z+z_1)I-(\overline{z}+\overline{z_1})\overline{I}=0$.

б) Точките z и z_1 лежат от двете страни на реалната ос, т. е.

$$(8)\qquad |z|>1,\ |z_1|>1,\ yy_1<0.$$

За да докажем, че и в този случай интегралът (6) е различен от нула достатъчно е да покажем, че линейната комбинация

$$(9)\ (z-z_1)I-(\overline{z}-\overline{z_1})\overline{I}=\int_{-1}^{1}\frac{(z-z_1)(\overline{z}-t)(\overline{z_1}-t)-(\overline{z}-\overline{z_1})(z-t)(z_1-t)}{|z-t|^2|z_1-t|^2}\,d\alpha(t)$$

представя чисто имагинерно число, различно от нула. Числителят на подинтегралната функция е квадратен тричлен $At^2+2Bt+C$ с чисто имагинерни коефициенти

$$A=(z-z_1)-(\overline{z}-\overline{z_1})=2i(y-y_1),\quad 2B=2(\overline{z}z_1-z\overline{z_1}),$$

$$C=(z-z_1)\overline{z}\,\overline{z_1}-(\overline{z}-\overline{z_1})zz_1.$$

Понеже коефициентът A не е нула, квадратният тричлен може да се представи във вида

$$A\left\{\left(t+\frac{B}{A}\right)^2+\frac{AC-B^2}{A^2}\right\}$$

Тук $\frac{B}{A}$ е реално число и

$$AC-B^2=(z-z_1)(\overline{z}-\overline{z_1})(z-\overline{z})(\overline{z_1}-z_1)=|z-z_1|^2.4yy_1<0,$$

$$A^2=-4(y-y_1)^2,$$

откъдето следва, че при неравенствата (8) реалният квадратен тричлен

$$t^2+2\frac{B}{A}t+\frac{C}{A}$$

е положителен за всяко реално t. С това е доказано, че и в случая б) изразът (9), разделен с A, е положителен, т. е. че интегралът (6) е различен от нула при условията (5).

Остава да докажем още, че областта на еднолистност $|z|>1$ е максимална и че не съществува друга максимална еднолистна област относно класата (h). За тази цел е достатъчно да докажем, че на всяка точка z_0

от затворената кръгова област $|z| \leqq 1$ отговаря една функция от вида (4), която не е еднолистна в околността на z_0. Нека $z_0 = re^{i\varphi}$ да е една точка от поменатата кръгова област, която точка не лежи върху реалната ос, тъй че

(10) $$0 < r \leqq 1 \text{ и } \varphi \text{ не е кратно на } \pi.$$

Да дефинираме функцията $\alpha(t)$ така:

$$\alpha(t) = 0 \text{ за } t \leqq -r,$$

$$\alpha(t) = 1 + \cos\varphi \text{ за } -r < t < r,$$

$$\alpha(t) = 2 \text{ за } t \geqq r.$$

Лесно се вижда, че при този избор на растящата функция $\alpha(t)$ функцията (4) приема вида

$$h(z) = \frac{1+\cos\varphi}{z+r} + \frac{1-\cos\varphi}{z-r}$$

и производната ѝ

$$h'(z) = \frac{-2(z^2 - 2zr\cos\varphi + r^2)}{(z^2-r^2)^2} = \frac{-2(z-z_0)(z-\bar{z}_0)}{(z^2-r^2)^2}$$

се анулира за $z = z_0$, поради което $h(z)$ не може да бъде еднолистна в околността на z_0. Понеже точките $z_0 = re^{i\varphi}$, модулите и амплитудите на които удовлетворяват условията (10), покриват навсякъде гъсто единичния кръг $|z| \leqq 1$, то никоя подобласт на този кръг не може да бъде област на еднолистност относно класата $C(h)$. Оттук заключаваме, че единствената максимална област на еднолистност относно тази класа е областта $|z| > 1$.

4. Тук ще изведем някои следствия от теорема 2.

а) В областта $|z| > 1$ функцията (4) се развива в ред по степените на $\frac{1}{z}$:

$$h(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}}, \quad c_n = \int_{-1}^{1} t^n \, d\alpha(t).$$

Като заместим $\frac{1}{z}$ със z, получаваме степенния ред

$$h\left(\frac{1}{z}\right) = c_0 z + c_1 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$$

чиито коефициенти са моментите на $\alpha(t)$ относно интервала $-1 \leqq t \leqq 1$. Този ред е сходящ в кръга $|z| < 1$ и според теорема 2 сумата му представя в този кръг една еднолистна функция на z.

б) Когато растящата функция $\alpha(t)$ е стълбовидна с n изолирани точки на растеж $a_1, a_2, \ldots, a_n$, функцията (4) представя рационална функция от вида

$$h(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{z-a_k} \tag{11}$$

с положителни резидууми A_k. Чрез подходяща линейна трансформация можем да се освободим от ограничението полюсите a_k да принадлежат на интервала $[-1, 1]$ и да произнесем следната

Теорема 3. *Ако полюсите a_k на рационалната функция* (11) *принадлежат на интервала $[a, b]$ и резидуумите A_k са положителни, то тази функция е еднолистна в областта**

$$\left|z-\frac{a+b}{2}\right|>\frac{b-a}{2} \tag{12}$$

Следствие. Ако всички нули на полинома $P(z)$ са реални и се съдържат в интервала $[a, b]$, то логаритмичната му производна $\frac{P'(z)}{P(z)}$ е еднолистна в областта (12). С други думи областта (12) е област на еднолистност за логаритмичната производна на всеки полином $P(z)$, нулите на който принадлежат на интервала $[a, b]$. Нещо повече: ако означим с $C(a, b)$ класата на логаритмичните производни на тези полиноми, то областта (12) е *единствената* максимална област на еднолистност относно класата $C(a, b)$. В това се убеждаваме, като вземем пред вид, че ако $[a', b']$ е подинтервал на $[a, b]$, то логаритмичната производна

$$\frac{m}{z-a'}+\frac{n}{z-b'}=\varphi_{m,n}(z)$$

на полинома $P_{m,n}(z)=(z-a')^m(z-b')^n$ принадлежи на $C(a, b)$ и когато m и n пробягват редицата на естествените числа, нулите на $\varphi'_{m,n}(z)$ покриват навсякъде гъсто окръжността с диаметър $a' \dots b'$. А при подходящ избор на подинтервала $[a', b']$ тази окръжност може да мине през произволна точка z_0, стига тя да не принадлежи на областта (12). Ясно е оттук, че колкото и малка да е една околност на точката z_0, която не принадлежи на областта (12), съществуват функции от класата $C(a, b)$, производните на които се анулират в тази околност, вследствие на което тези функции не могат да бъдат еднолистни в околността на z_0.

5. Да изследваме накрая максималните области на еднолистност относно класата $C(g)$ на аналитичните функции, представени чрез Стилтйесови интеграли от вида

$$g(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\alpha(t)}{z-\exp it}\ ^{**},\quad (|z|>1), \tag{13}$$

* Нека забележим изрично, че областта (12) не зависи от броя n на полюсите на функцията (11).

** За удобство при набора с $\exp z$ означаваме e^z.

където $\alpha(t)$ означава растяща функция на t в интервала $-\pi \leqq t \leqq \pi$ с поне една точка на растеж. Този интеграл дефинира изобщо две аналитични функции на комплексната променлива z, от които едната е холоморфна вън от единичния кръг, а другата — вътре в него. Ние ще означим с $g(z)$ първата от тях, дефинирана и холоморфна за $|z| > 1$, и ще докажем

Теорема 4. Единствената максимална област на еднолистност относно класата $C(g)$ на аналитичните функции от вида (13), отговарящи на всевъзможните растящи функции $\alpha(t)$ в интервала $-\pi \leqq t \leqq \pi$, е кръговата област $|z| > \sqrt{2}$.

Доказателство. Ако z и z_1 са две точки, подчинени на неравенствата

$$|z| > \sqrt{2}, \quad |z_1| > \sqrt{2}, \quad z \neq z_1,$$

то

$$\frac{g(z_1)-g(z)}{z-z_1} \cdot zz_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha(t)}{\left(1-\frac{1}{z}\exp it\right)\left(1-\frac{1}{z_1}\exp it\right)}$$

Но според помощната теорема от т. 1 реалната част на подинтегралната функция е положителна, защото

$$\left|\frac{\exp it}{z}\right| < \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \left|\frac{\exp it}{z_1}\right| < \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Следователно при направените предположения за z, z_1 и за функцията $\alpha(t)$ разликата $g(z_1)-g(z)$ е различна от нула.

За да докажем, че областта $|z| > \sqrt{2}$ е максимална област на еднолистност относно функциите от класата $C(g)$, и то единствената такава област, достатъчно е да докажем следното твърдение: на всяка точка z_0 от венеца $1 < |z| \leqq \sqrt{2}$ отговаря една функция от класата $C(g)$, която не е еднолистна в околността на z_0. Да означим за тази цел с φ и α две реални числа, от които φ е съвсем произволно, а α е подчинено на неравенствата $0 < \alpha \leqq \frac{\pi}{4}$. Да определим след това реалните числа a и b тъй, че да принадлежат на полузатворения интервал $-\pi < t \leqq \pi$ и при това всяка една от разликите $\varphi+\alpha-a$, $\varphi-\alpha-b$ да е кратна на 2π. С тези условия числата a и b са еднозначно определени и $a \neq b$. Възможни са при това два случая: $a < b$ и $b < a$. Ако $a < b$, дефинираме функцията $\alpha(t)$ така:

$$\alpha(t) = 0 \quad \text{за} \quad t \leqq a,$$

$$\alpha(t) = 1 \quad \text{за} \quad a < t < b,$$

$$\alpha(t) = 2 \quad \text{за} \quad t \geqq b.$$

Тогава

$$g(z)=\int_a^b \frac{d\alpha(t)}{z-\exp it}=-\frac{1}{z-\exp ia}+\frac{1}{z-\exp ib}$$

$$=-\frac{1}{z-\exp i(\varphi+\alpha)}+\frac{1}{z-\exp i(\varphi-\alpha)}.$$

В случай че $b<a$, стълбовидната функция $\alpha(t)$ дефинираме така:

$$\alpha(t)=0 \text{ за } t\leqq b,$$

$$\alpha(t)=1 \text{ за } b<t<a,$$

$$\alpha(t)=2 \text{ за } t\geqq a.$$

Тогава

$$g(z)=\int_b^a \frac{d\alpha(t)}{z-\exp it}=\frac{1}{z-\exp ib}+\frac{1}{z-\exp ia}$$

$$=\frac{1}{z-\exp i(\varphi-\alpha)}+\frac{1}{z-\exp i(\varphi+\alpha)}.$$

И в двата случая се получава за $g(z)$ една и съща рационална функция която е холоморфна вън от единичния кръг и чиято производна $g'(z)$ се анулира за

$$z_0=(\cos\alpha+\sin\alpha)\exp i\varphi=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\exp i\varphi.$$

Явно е оттук, че при подходящ избор на реалните числа φ и α (където $0<\alpha\leqq\frac{\pi}{4}$) точката z_0 може да съвпадне с произволна точка от венеца $1<|z|<\sqrt{2}$. Следователно никоя точка на този венец не може да принадлежи на една област на еднолистност относно класата $C(g)$ и единствената максимална област на еднолистност относно тази класа е областта $|z|>\sqrt{2}$.

6. Да разгледаме на последно място класата $C(g_1)$ на аналитичните функции от вида

$$g_1(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\alpha(t)}{z-\exp it},\quad (|z|<1) \tag{14}$$

дефинирани пак чрез интеграла (13), само че вътре в единичния кръг; при това $\alpha(t)$ означава пак растяща функция на t поне с една точка на растеж. Както ще видим, нито кръгът $|z|<1$, нито коя да е негова подобласт не може да бъде област на еднолистност за функционната класа $C(g_1)$. Достатъчно е да докажем, че точките от единичния кръг, в които се анулират производните на функции от класата $C(g_1)$, покриват навсякъде гъсто този кръг. И наистина, както видяхме в точка 5, ако φ е произволно реално число и $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$, то рационалната функция

$$\frac{1}{z-\exp i(\varphi+\alpha)}+\frac{1}{z-\exp i(\varphi-\alpha)}$$

принадлежи както на класата $C(g)$, тъй и на класата $C(g_1)$ и при това производната й притежава двата корена

$$z=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm\alpha\right)\exp i\varphi,$$

единият от които лежи вътре в единичния кръг и при подходящ избор на φ и α може да съвпадне с коя да е точка z_0 на този кръг. Така избраната функция от класата $C(g_1)$ очевидно не може да бъде еднолистна в околността на z_0.

Нека забележим тук, че всяка функция от вида

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{z\,d\alpha(t)}{1-z\exp it}\quad(|z|<1,\quad \alpha(t)\ \text{растяща}) \tag{15}$$

е еднолистна в единичния кръг и този кръг е единствената максимална област на еднолистност за класата (15). В това се убеждаваме непосредствено, като вземем пред вид, че интегралът (15) се получава от (14), като заменим z с $\frac{1}{z}$.

Постъпила на 6. I. 1959

ОБ ОБЛАСТЬЯХ ОДНОЛИСТНОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Л. Чакалов

РЕЗЮМЕ

Если обозначить буквой (C) один класс аналитических функций, то под „областью однолистности" этого класса будем понимать область D в плоскости комплексных чисел, в которой каждая функция класса (C) является однолистной. Такую область называем „максимальной", когда она обладает дополнительно следующим свойством: если z_0 является произвольной точкой контура D и если присоединим к D произвольную окрестность точки z_0, то такая расширенная область уже не будет являться областью однолистности класса (C). Так, например, для класса (C') двучленов az^2+b, $a\neq 0$ каждая полуплоскость, предельная прямая которой проходит чрез точку $z=0$, представляет собой область однолистности и, притом, максимальной области однолистности относительно класса (C').

Основные результаты, полученные в настоящей работе, могут быть сформулированы следующим образом:

1. Пусть $C(z_0, R)$ будет означать класс рациональных функций вида

$$f(z)=\sum_{1}^{n}\frac{A_k}{z-a_k},$$

где вычеты A_k являются положительными и полюсы принадлежат кругу $|z-z_0|<R$. Единственной максимальной областью однолистности этого класса является область $|z-z_0|>R\sqrt{2}$.

2. Рассмотрим класс $C(h)$ аналитических функций, определенных через интеграл Стилтьеса

$$h(z)=\int_{-1}^{1}\frac{d\alpha(t)}{z-t},$$

где $\alpha(t)$ означает возрастающую функцию в интервале $-1\leq t\leq 1$, обладающую хотя бы одной точкой роста. Единственно максимальной областью однолистности для класса $C(h)$ является область $|z|>1$.

3. Когда $P(z)$ пробегает множество многочленов переменной z с реальными нулями, заключенными в интервале $[a, b]$, то логарифмическая производная $\frac{P'(z)}{P(z)}$ является однолистной в области $\left|z-\frac{a+b}{2}\right|>\frac{b-a}{2}$ и эта область является единственно максимальной областью однолистности относительно класса упомянутых логарифмических производных.

4. Интеграл Стилтьеса

$$(*)\qquad g(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\alpha(t)}{z-e^{it}}$$

где $\alpha(t)$ является возрастающей функцией t в интервале $-\pi\leq t\leq\pi$, определяя вообще две аналитические функции: одну — внутри единичного круга и другую — вне его. Когда $\alpha(t)$ пробегает всех возврастающие функции t, соответствующий класс аналитических функции (*) определенных в круге $|z|<1$ не обладает областью однолистности; напротив, класс функций (*), определенных и голоморфных для $|z|>1$, обладает единственной максимальной областью однолистности $|z|>\sqrt{2}$.

SUR LES DOMAINES D'UNIVALENCE DE CERTAINES CLASSES DE FONCTIONS ANALYTIQUES

L. Tchakaloff

RÉSUMÉ

Etant donnée une classe (C) de fonctions analytiques nous entendons par **domaine d'univalence** relativement à la classe (C) un domaine D du plan des nombres complexes où chaque fonction de (C) est univalente. Un tel domaine sera appelé dans ce qui suit un domaine **exclusif** par rapport à la classe (C) lorsqu'il jouit de plus de la propriété suivante: z_0 désignant un point arbitraire du contour de D si l'on ajoute à D les points d'un voisinage de z_0, le domaine D' ainsi obtenu n'est plus un domaine d'univalence par rapport à la classe (C).

Pour illustrer ces définitions, envisageons comme exemple la classe des binômes de la forme az^2+b où $a \neq 0$. On voit sans peine qu'une droite arbitraire passant par l'origine du plan complexe divise le plan en deux demi-plans chacun desquels représente un domaine exclusif d'univalence par rapport à la classe des binômes considérée.

Voici les principaux résultats que nous avons obtenus dans la présente communication pour quelques classes de fonctions analytiques.

1° Soit $C(z_0, R)$ la classe des fonctions rationnelles de la forme

$$f(z) = \frac{A_1}{z-a_1} + \frac{A_2}{z-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{z-a_n},$$

les résidus A_k étant positifs et les pôles a_k appartenant au cercle $|z-z_0| \leqq R$. Le seul domaine exclusif par rapport à cette classe est le domaine $|z-z_0| > R\sqrt{2}$.

2°. Considérons la classe $C(n)$ des fonctions analytiques définies par l'intégrale de Stieltjes

$$h(z) = \int_{-1}^{1} \frac{d\,\alpha(t)}{z-t},$$

où $\alpha(t)$ désigne une fonction croissante et possédant au moins un point de croissance dans l'intervalle $-1 \leqq t \leqq 1$. Le seul domaine exclusif d'univalence par rapport à $C(h)$ est le domaine $|z| > 1$.

3°. Lorsque $P(z)$ parcourt l'ensemble des polynomes de z à zéros réels est contenus dans l'intervalle $[a, b]$, chacune des dérivées logarithmiques $\frac{P'(z)}{P(z)}$ est univalente dans le domaine $\left|z-\frac{a+b}{2}\right| > \frac{b-a}{2}$ et c'est le seul domaine exlusif par rapport à la classe des dérivées logarithmiques en question.

4° L'intégrale de Stieltjes

$$g(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\,\alpha(t)}{z - e^{it}}, \tag{*}$$

où $\alpha(t)$ est croissante et possède au moins un point de croissance dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$, définit en général deux fonctions holomorphes: l'une à l'intérieur du cercle unité et l'autre à l'extérieur de ce cercle. Lorsque $\alpha(t)$ parcourt l'ensemble des fonctions croissantes dans $[-\pi, \pi]$, le classe correspondante des fonctions holomorphes (*) définies dans le cercle $|z| < 1$ n'a pas de domaine d'univalence; au contraire, la classe des fonctions (*) définies et holomorphes pour $|z| > 1$ possède comme domaine d'univalence le domaine $|z| > \sqrt{2}$ qui est en même temps le seul domaine exclusif par rapport à la classe considérée.