ТЕНЗОРНЫЕ ФОРМЫ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ КИНЕМАТИКИ ЦЕПЕЙ И МЕХАНИЗМОВ

Д. Манжерон и К. Дрэган (Яссы, НР Румыния)

1. Акад. И. И. Артоболевский установил [1], в рамках обширного доклада, представленного на пленарном заседании Второго всесоюзного совещания по основным проблемам теории машин и механизмов (Москва, 24—28 марта 1958 г.), в своем углубленном исследовании, посвященном анализу современного состояния ТММ и исследованию подходов к решениям важнейших задач в области механики машин, обеспечивающих быстрый прогресс комплексной проблемы автоматизации производственных процессов, главнейшие направления развития ТММ.

Одно из наиболее важных направлений этого развития выкристаллизовалось в последние годы в повсемерное углубление теории пространственных механизмов, для изучения которых привлекаются, параллельно с их последующим уточнением, разнообразные новые методы анализа этих механизмов.

Используя развитую А. П. Котельниковым [1, стр. 12] стройную теорию винтового исчисления, методы комплексной алгебры винтов, изложенные в сочинении Д. Н. Зейлигера [1, стр. 12] и применение этих методов к задачам о положениях в механизмах, сделанные Ф. М. Диментбергом [2], С. Г. Кислицыным [3] и Ю. Ф. Морошкиным [4], были рассмотрены наиболее трудные задачи кинематики пространственных механизмов, а именно задачи о положении звеньев. Ю. Ф. Морошкиным [4] была изложена общая идея метода и показана возможность решения с помощью этого метода задач кинематического и динамического анализа механизмов. С. Г. Кислицыным [3] был развит аналитический метод винтовых аффиноров и на ряде конкретных примеров показана плодотворность метода к задачам определения положений звеньев пространственных механизмов. На заседаниях секции вышеупомянутого Совещания анализа и синтеза механизмов [5], обзору основных работ по применению винтового исчисления был посвящен доклад Ф. М. Диментберга и С. Г. Кислицына [6]. Сюда относится и введение пространственного метода приведенных ускорений различных порядков, как обобщения развитой в [7]—[9] теории приведенных ускорений и ряда указаний возможных путей изучения плоских механизмов, уже примененных некоторыми авторами [10]—[12] к анализу и синтезу механизмов. Кроме винтового исчисления, в последние годы нашел применение матричный метод, который по своей природе соответствует решению многих задач анализа и отчасти синтеза механизмов. Это направление разрабатывается Ю. Ф. Морошкиным, Л. П. Рифтиным [13] и другими авторами. Некоторое самостоятельное развитие метод матриц получил также в работах Г. С. Калицина [14], [15] и Р. Бейера [16]. И. Денавит и Р. С. Гартенберг [17] развили стройную систему исследования пространственных механизмов, используя метод, который можно назвать символическим методом. С помощью развитого ими метода, имеющего некоторые аналогии, но не покрывающиеся с предлагаемыми здесь тензорными формами основных уравнений кинематики цепей и механизмов, можно как бы составить общую условную формулу механизма, образованного совокупностью кинематических пар различных классов и далее с помощью матриц провести анализ механизма [18].

Важные результаты были получены в решении задач синтеза пространственных механизмов с низшими парами Н. И. Левитским и К. Х. Шахбазяном [19] и В. А. Зиновьевым [20].

Развивая свои исследования по теории пространственных механизмов и общим методам синтеза механизмов, Р. Бейер [21] рассматривает кинематику различных пространственных механизмов и некоторые задачи их синтеза, применяя прямой аналитический метод. В целом цикле своих работ Ф. Ж. Альтман [22] изучает многочисленные реальные конструкции пространственных механизмов, дает их систематическое описание и рассматривает их кинематику и некоторые задачи синтеза, пользуясь прямым аналитическим методом. Некоторое число совершенно недавних работ, в которых переплетаются вопросы анализа и синтеза механизмов, показывает, что при рассмотрении теории структуры механизмов можно непосредственно получать практические выводы и заключения, относящиеся не только к анализу механизмов, но и к их синтезу [5], [23]. Сюда относятся, напр., работы Н. И. Колчина [24], Л. Н. Решетова [25], О. Мунтяну и Г. Тудора [26] и отчасти работы Я. Одерфельда [27], Е. Бугаевского, Р. Богдана и К. Пелекуди [28] и других.

2. В настоящем исследовании, представляющем собою развитие результатов, установленных в [9], [29], исходя из необходимости углубления теории рабочих процессов машин, механизмов и машин-автоматов, теснейшим образом связанных с изучением геометрии рабочего органа и кинематики и динамики исполнительных механизмов [1], [23], приводятся новые тензорные формы основных уравнений конфигураций и скоростей кинематических цепей и механизмов, звенья которых подчинены голономным и склерономным связям. Некоторые из полученных результатов сопоставляются при этом с элегантными результатами Ю. Ф. Морошкина [30].

а. Пусть

$$x_{\nu-1,j} = x_j^\nu \quad \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij}^{(\nu,\nu-1)} x_{\nu i}, \quad (j = 1,\ 2, 3),$$

где

$$\alpha_{ij}^{(\nu,\ \nu-1)} = \cos(\tau_i^\nu,\ \tau_j^\nu),\ O_{\nu-1}\, x_{\nu-1,1}\, x_{\nu-1,2}\, x_{\nu-1,3} \in J_{\nu-1} \subset D_{\nu-1}^3,$$

$$O_\nu\, x_{\nu 1}\, x_{\nu 2}\, x_{\nu 3} \in J_\nu \subset D_\nu^3,\ O_\nu(x_1^\nu, x_2^\nu, x_3^\nu) \in J_{\nu-1}$$

устанавливают обоюдооднозначное соотношение между точками трехмерных областей $D^3_{\nu-1}$ и D^3_ν, связанных соответственно с двумя последующими звеньями $J_{\nu-1}$ и J_ν некоторой кинематической цепи, образующими кинематическую пару. Вводя новые переменные $X_{\lambda\mu}$, определяемые

(1) $$X_{\nu-1,i+1} = x_{\nu-1,i}\, X_{\nu-1,1}\,, \quad X_{\nu,i+1} = x_{\nu i}\, X_{\nu 1}\,, \quad X_{\nu-1,1} = X_{\nu 1}\,, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

аффинно-ортоганальный тензор второго порядка

(2) $$T^{(\nu,\nu-1)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^\nu & \alpha_{11}^{(\nu,\nu-1)} & \alpha_{21}^{(\nu,\nu-1)} & \alpha_{31}^{(\nu,\nu-1)} \\ x_2^\nu & \alpha_{12}^{(\nu,\nu-1)} & \alpha_{22}^{(\nu,\nu-1)} & \alpha_{32}^{(\nu,\nu-1)} \\ x_3^\nu & \alpha_{13}^{(\nu,\nu-1)} & \alpha_{23}^{(\nu,\nu-1)} & \alpha_{33}^{(\nu,\nu-1)} \end{Vmatrix}$$

четырехмерного эвклидова пространства, названный *тензором положения звена* J_ν *по отношению к звену* $J_{\nu-1}$, характеризует рассматриваемую кинематическую пару.

Введенный тензор, играя роль оператора аффинно-ортогональных преобразований

(3) $$X_{\nu-1,1} = X_{\nu 1}\,, \quad X_{\nu-1,i+1} = x_i^\nu X_{\nu 1} + \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ji} X_{\nu,j+1}\,, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

могущих быть интерпретированными как преобразования между областями $D^4_{\nu-1}$ и D^4_ν четырехмерного эвклидова пространства, ассоциированными соответственно звеньям $J_{\nu-1}$ и J_ν, полностью определяет положение звена J_ν в своем движении относительно звена $J_{\nu-1}$.

6. При исследовании кинематических цепей, в которых связь устанавливается при помощи лишь низших кинематических пар, тензоры положения, характеризующие соответственно винтовую, шарнирную и поступательную пары, выражаются

(4) $$T_b^{(\nu,\nu-1)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_\nu \cos\theta_\nu & \cos\theta_\nu & -\cos\eta_\nu \sin\theta_\nu & -\sin\eta_\nu \sin\theta_\nu \\ a_\nu \sin\theta_\nu & \sin\theta_\nu & \cos\eta_\nu \cos\theta_\nu & \sin\eta_\nu \cos\theta_\nu \\ s_\nu & 0 & -\sin\eta_\nu & \cos\eta_\nu \end{Vmatrix}$$

с последующими уточнениями, причём выбранные обозначения соответствуют следующему выбору координатных осей: ось кинематической винтовой пары $B^{(\nu,\nu-1)}_{p(u)}$, шага p, имеющей единственной переменной u — угол вращения или же равносильный ему продольный аванс — берется за ось $x_{\nu-1,3}$, ось пары, ассоциирующей звенья J_ν и $J_{\nu+1}$, за ось $x_{\nu 3}$, общие парпендикуляры осей $x_{\nu-1,3}$ и $x_{\nu-2,3}$ или же $x_{\nu-1,3}$ и $x_{\nu 3}$, в направлении соответственно от звеньев $J_{\nu-2}$, $J_{\nu-1}$ к звеньям $J_{\nu-1}$, J_ν берутся за оси $x_{\nu-1,1}$ и $x_{\nu 1}$, оси же $x_{\nu-1,2}$ и $x_{\nu 2}$ образуют с уже избранными правые трехгранники, имеющие началами $O_{\nu-1}$, O_ν ступни проведенных общих перпендикуляров.

Что касается параметров, введенных в (4) и др., то θ_ν — угол образованный осью $x_{\nu-1,1}$ с параллельной проведенной через $O_{\nu-1}$ к оси x_{ν_1}; η_ν — угол между осью x_{ν_3} и параллельной к оси $x_{\nu-1,3}$ через O_ν; параметр a_ν измеряется по оси x_{ν_1}, от точки пересечения её с осью $x_{\nu-1,3}$ до O_ν, а параметр s_ν — по оси $x_{\nu-1,3}$ от $O_{\nu-1}$ до точки пересечения осей x_{ν_1} и $x_{\nu-1,3}$.

Простая незамкнутая кинематическая цепь или же простой незамкнутый цикл, выделенный из какой либо сложной кинематической цепи, характеризуется специфическим тензором цепи или же цикла

$$T^{(n,0)} = \prod_{\nu=1}^{n} T^{(\nu,\nu-1)}, \tag{5}$$

причем составляющие аффинного тензора второго порядка $T^{(n,0)}$ — непрерывные и дифференцируемые функции $N = \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu$ лагранжевых координат $q_1^{(1,0)}, q_2^{(1,0)}, \ldots, q_{r_1}^{(1,0)}, q_1^{(2,1)}, q_2^{(2,1)}, \ldots, q_{r_2}^{(2,1)}, \ldots, q_{r_n}^{(n,n-1)}$, а, следовательно, и всех переменных кинематических пар связывающих звенья между собою, где r_ν — ранг пары [4, стр. 35]. Уравнение (5) представляет собою предельно лаконическую форму основных уравнений геометрии механизмов, сопоставляемую с единственным уравнением преобразования (9) в дуальных плюккеровых координатах, полученным Ю. Ф. Морошкиным [30, стр. 747], как следствие уравнений А. П. Котельникова.

Усматривая условие замкнутости простой кинематической цепи или же простого кинематического цикла $J_0, J_1, \ldots, J_n$, а, значит, и совпадение координатных систем $O_n x_{n_1} x_{n_2} x_{n_3}$ и $O_0 x_{01} x_{02} x_{03}$, получается тензорное уравнение

$$T^{(n,0)} = E, \tag{6}$$

где E — единичный тензор, характеризующее конфигурацию простой замкнутой кинематической цепи или же цикла. Уравнение (6), сводясь лишь к 12 скалярным уравнениям между $N = \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu$ переменными кинематических пар, указывает на факт уменьшения при замкнутости числа лагранжевых независимых координат, по сравнению со случаем незамкнутой цепи или же цикла.

При сложной кинематической цепи рассматривается минимальное число циклов, образующихся при условии принадлежности каждой кинематической пары по крайней мере к одному циклу, причём число тензорных уравнений равно минимальному числу циклов.

в. При помощи тензора скорости, определяемого

$$T_{ck}^{(\nu,\nu-1)} = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{x}_1^\nu & \dot{\alpha}_{11}^{(\nu,\nu-1)} & \dot{\alpha}_{21}^{(\nu,\nu-1)} & \dot{\alpha}_{31}^{(\nu,\nu-1)} \\ \dot{x}_2^\nu & \dot{\alpha}_{12}^{(\nu,\nu-1)} & \dot{\alpha}_{22}^{(\nu,\nu-1)} & \dot{\alpha}_{32}^{(\nu,\nu-1)} \\ \dot{x}_3^\nu & \dot{\alpha}_{13}^{(\nu,\nu-1)} & \dot{\alpha}_{23}^{(\nu,\nu-1)} & \dot{\alpha}_{33}^{(\nu,\nu-1)} \end{array} \right\|_\nu \tag{7}$$

и получаемого как производная по временни тензора положения (2), а также и квадратичных матриц

$$(8)\qquad M^{(\nu,\nu-1)} = \left\| \alpha_{ij}^{(\nu,\nu-1)} \right\| \text{ и } M_{ck}^{(\nu,\nu-1)} = \left\| \dot{\alpha}_{ij}^{(\nu,\nu-1)} \right\|, \ (i=1,\ 2,\ 3)$$

ассоциированных тензорам (2) и (7), получается мгновенная угловая скорость в виде антисимметричного тензора второго порядка трёхмерного (действительного) эвклидова пространства

$$(9)\qquad \omega^{(\nu,\nu-1)} = \left\| \begin{matrix} 0 & -\sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1}^{(\nu,\nu-1)} \dot{\alpha}_{i2}^{(\nu,\nu-1)} & \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i3}^{(\nu,\nu-1)} \dot{\alpha}_{i1}^{(\nu,\nu-1)} \\ \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1}^{(\nu,\nu-1)} \dot{\alpha}_{i2}^{(\nu,\nu-1)} & 0 & -\sum_{i=1}^{3} \alpha_{i2}^{(\nu,\nu-1)} \dot{\alpha}_{i3}^{(\nu,\nu-1)} \\ -\sum_{i=1}^{3} \alpha_{i3}^{(\nu,\nu-1)} \dot{\alpha}_{i1}^{(\nu,\nu-1)} & \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i2}^{(\nu,\nu-1)} \dot{\alpha}_{i3}^{(\nu,\nu-1)} & 0 \end{matrix} \right\|$$

и скорость $v_{o_\nu}^{(\nu,\nu-1)}$ точки O_ν в движении звена J_ν по отношении к звену $J_{\nu-1}$, отнесенная к трёхграннику $O_{\nu-1}x_{\nu-1,1}x_{\nu-1,2}x_{\nu-1,3}$. Следовательно, тензор положения (2) содержит все характеристики относительного движения звена J_ν по отношению к звену $J_{\nu-1}$.

Выбирая как систему приведения $O_0x_{01}x_{02}x_{03}$ систему координатных осей, неразрывно связанных с неподвижным звеном J_0 (основанием механизма), соотношения

$$(10)\qquad \omega^{(\nu,\nu-1)} = \left\| \begin{matrix} 0 & -\sum_{i_{\nu-1}=1}^{3} \alpha_{i_{\nu-1},3}^{(\nu-1,0)} \omega_{x_{\nu-1,i_{\nu-1}}}^{(\nu,\nu-1)} & \sum_{i_{\nu-1}=1}^{3} \alpha_{i_{\nu-1},2}^{(\nu-1,0)} \omega_{x_{\nu-1,i_{\nu-1}}}^{(\nu,\nu-1)} \\ \sum_{i_{\nu-1}=1}^{3} \alpha_{i_{\nu-1},3}^{(\nu-1,0)} \omega_{x_{\nu-1,i_{\nu-1}}}^{(\nu,\nu-1)} & 0 & -\sum_{i_{\nu-1}=1}^{3} \alpha_{i_{\nu-1},1}^{(\nu-1,0)} \omega_{x_{\nu-1,i_{\nu-1}}}^{(\nu,\nu-1)} \\ -\sum_{i_{\nu-1}=1}^{3} \alpha_{i_{\nu-1},2}^{(\nu-1,0)} \omega_{x_{\nu-1,i_{\nu-1}}}^{(\nu,\nu-1)} & \sum_{i_{\nu-1}=1}^{3} \alpha_{i_{\nu-1},1}^{(\nu-1,0)} \omega_{x_{\nu-1,i_{\nu-1}}}^{(\nu,\nu-1)} & 0 \end{matrix} \right\|$$

и

$$(11)\qquad v_{O_\nu x_{oj}}^{(\nu,\nu-1)} = \sum_{i_{\nu-1}=1}^{3} \alpha_{i_{\nu-1},j}^{(\nu-1,0)} v_{O_\nu x_{\nu-1,i_{\nu-1}}}^{(\nu,\nu-1)}, \quad (j=1,\ 2,\ 3)$$

дают проэкции псевдовектора мгновенной угловой скорости $\overline{\omega}^{(\nu,\nu-1)}$ и вектора скорости $v_{O_\nu}^{(\nu,\nu-1)}$ на координатные оси, неразрывно связанные со звеном J_0 (основанием).

Вводя матрицы $M^{(\nu-1,0)}$, $M^{(\nu,0)}$

$$M^{(\nu-1,0)} = \prod_{i=1}^{\nu-1} M^{(i,i-1)} \text{ и } M^{(\nu,0)} = \prod_{i=1}^{\nu} M^{(i,i-1)},$$

в которых $M^{(1,0)}$, $M^{(2,1)}, \ldots$ аналогичны матрице (8), имеющие элементами соответственно $\alpha_{i_{\nu-1}, i_0}^{(\nu-1, 0)}$ и $\alpha_{i_{\nu}, i_0}^{(\nu, 0)}$,

$$(12) \qquad \omega^{(\nu, 0)} = \begin{Vmatrix} 0 & -\sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1}^{(\nu, 0)} \dot{\alpha}_{i2}^{(\nu, 0)} & \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i3}^{(\nu, 0)} \dot{\alpha}_{i1}^{(\nu, 0)} \\ \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1}^{(\nu, 0)} \dot{\alpha}_{i2}^{(\nu, 0)} & 0 & -\sum_{i=1}^{3} \alpha_{i2}^{(\nu, 0)} \dot{\alpha}_{i3}^{(\nu, 0)} \\ -\sum_{i=1}^{3} \alpha_{i3}^{(\nu, 0)} \dot{\alpha}_{i1}^{(\nu, 0)} & \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i2}^{(\nu, 0)} \dot{\alpha}_{i3}^{(\nu, 0)} & 0 \end{Vmatrix}$$

и

$$(13) \quad v_{O_\nu x_{oj}}^{(\nu, 0)} = \sum_{\mu=1}^{\nu} \left[v_{O_\mu x_{oj}}^{(\mu, \mu-1)} + x_{o, j+1}^{\nu} \, \omega_{x_{o, j+2}}^{(\mu, \mu-1)} - x_{0, j+2}^{\nu} \, \omega_{x_{o, j+1}}^{(\mu, \mu-1)} \right], \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$j + i \equiv i \bmod 3, \ (j = 3, \ i = 1, \ 2); \ j + 2 \equiv 1 \bmod 3, \ (j = 2)$$

дают составляющие псевдовекторы мгновенной угловой скорости $\overline{\omega}^{(\nu, 0)}$ и скорости $\overline{v}_{O_\nu}^{(\nu, 0)}$ точки O_ν звена J_ν на координатные оси, неразрывно связанные со звеном J_0. В случае механизма ввиду того, что в замкнутом цикле, выделенном из механизма и содержащем основание J_0, последнее звено J_n цикла совпадает с его начальным звеном J_0, каждому такому циклу соответствуют дополнительные дифференциальные уравнения вида

$$(14) \qquad \omega^{(n, 0)} = 0, \quad v_{O_n}^{(n, 0)} = 0,$$

представляющие собою условия замкнутости.

3. Изложенные основы новых тензорных форм кинематики цепей и механизмов позволяют сжато характеризовать, при помощи однозначных кинематических элементов, положение какого либо звена цепи в его относительном движении по отношению к предыдущему звену или же любого цикла выделенного из сложной кинематической цепи.

К тому же они приводят, кроме обширного ряда приложений к задачам анализа и синтеза пространственных механизмов с высшими и низшими кинематическими парами [29], [36], к полному охарактеризованию движений звеньев и к выражению кинетической энергии как функции минимального числа лагранжевых координат, служащему основой для систематического использования аналитической механики, в общепринятом или же в различных обобщенных в недавнее время акад. Ив. Ценовым и Г. Пайу смыслах [31]—[36], в теории машин и механизмов и в основной задаче современной техники — повсемерной автоматизации фабрик, заводов, транспорта и т. д.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский И. И. Современное состояние теории машин и механизмов. В сборнике Итоги Второго Всесоюзного совещания по основным проблемам ТММ, АН СССР, Ин-т Машиноведения, М., 1958, стр. 6—23.
2. Диментберг Ф. М. Определение положений пространственных механизмов, АН СССР, Ин-т Машиноведения, М., 1950, 142 стр.
3. Кислицын С. Г. Труды Сем. ТММ, 14, вып. 54, 1954, стр. 51—75.
4. Морошкин Ю. Ф. Ibidem, 14, вып. 54, 1954, стр. 25—50.
5. Левитский Н. И. Итоги работы секции анализа и синтеза механизмов. В сборнике Итоги Второго всесоюзного совещания по основным проблемам ТММ, АН СССР, Ин-т Машиноведения, М. 1958, стр. 29—24.
6. Диментеберг Ф. М. и С. Г. Кислицын. Применение винтового изчисления к анализу пространственных механизмов. В сборнике Труды Второго всесоюзного совещания по основным проблемам теории машин и механизмов, АН СССР, Ин-т Машиноведения, под ред. акад. И. И. Артоболевского (в печати).
7. Манжерон Д. и К. Дрэган. Исследование механизмов методом приведенных ускорений. В выше цитированном сборнике Трудов (в печати).
8. Mangeron D., C. Drăgan, V. Svijevschi, Rev. Méc. appl., 2, 1, 1957, 145—156.
9. Манжерон Д. ДАН СССР, 102, № 5, 1955, стр. 897—898; 112, № 1, 1957, стр. 27—28.
10. Mangeron D., B. Drăgan, O. Munteanu, Bul. Inst. Polit. Iaşi, 2 (6), 3—4 1956, 263—281.
11. Зильберман Я. С. Ibidem, 3 (7), 1—2, 1957, 165—174.
12. Manafu V. Ibidem, 2 (6), 1—2, 1956, 311—320.
13. Рифтин Л. П. Труды Сем. ТММ, 14, вып. 63, 1956, стр. 41—63.
14. Калицин Г. С. Второто Всесъюзно съвещание по основните проблеми на теорията на машините и механизмите. Природа, 7, № 4. 1958, БАН, София, стр. 85—87.
15. — О некоторых применениях матричного исчисления в теории механизмов, в выше цитированном сборнике Трудов (в печати).
16. Beyer R. A survey of techniques for analysing motion properties of all types of 3-D mechanisms. В сборнике Transaction Fifth Conf. Mechanisms, Purdue University, 1958, 141—163.
17. Hartenberg R. S., J. Denavit, J. Appl. Mechanics, 22, 2, 1955, 215—222.
18. Hartenberg, R. S. V. D. I. — Berichte, 12, 1956, 145—156.
19. Левитский Н. И. К. Х. Шахбазян. Изв. АН АрмССР (сер. физ-мат.), 10, 4, 1957, стр. 87—99.
20. Зиновьев В. А. Труды Сем. ТММ, 14, вып. 55, 1954, стр. 49—62.
21. Hain K. Mechanism design in Germany, в сборнике Transactions Fourth Conf. on Mechanisms, Purdue University, 1957, 84—104.
22. Altmann F. G. V. D. I. — Berichte, 12, 1956, 69—76.
23. * * *, Основные проблемы теории машин и механизмов (под ред. акад. И. И. Артоболевского), АН СССР, Ин-т Машиноведения, М., 1956, 156 стр.
24. Колчин Н. И. Опыт построения расширенной структурной классификации механизмов, в уже цитированном сборнике Трудов (в печати).
25. Решетов Л. Н. К вопросу о применении механизмов без пассивных связей, в уже цитированном сборнике Трудов (в печати).
26. Munteanu O., G. Tudor, Bul. Inst. Polit. Iaşi, 4 (8), 1—2, 1958, 349—352.
27. Oderfeld J. Archiwum Budowy Maszyn, Polska Akad. Naük, 4, 3, 1957.
28. Bugaievski E., R. Bogdan, C. Pelecudi, Rev. Méc. appl., 2, 1, 1957, 157—170
29. Mangeron D., C. Drăgan, Bul. Inst. Polit. Iaşi, 3 (7), 1—2, 1957, 151—164 4 (8), 1—2, 1958, 327—338.
30. Морошкин Ю. Ф. ДАН, 91, № 4, 1953, 745—748; 119, № 1, 1958, 38—41.
31. Ценов Ив. Върху уравненията на аналитичната динамика. Годишник на Софийския Унив-т, Физ.-мат. фак., 49, 1954/55, 23 стр., София, 1956.

32. Tzénoff Iv. Доклады Болгарской Академии Наук. 9, № 3, 1956, 5—8.
33. — , Bul. Inst. Polit. Iaşi, 5 (9), 1—2, 1959 (в печати).
34. Pailloux H. Ann'Ec. Norm. Sup. (3), 69, 3, 1956, 213—257.
35. — , Mémorial des Sci. Math., 130, Paris, Gauthier-Villars, 1955, 74 p.
36. Mangeron D., R. Bogdan. Research in the field of machines and mechanisms carried out in the Romanian People's Republic. Future outcome, Studii şi Cerc. Mec. apl., Acad. RPR, Inst. Mecanică „Traian Vuia", 9, 4, 1958, 1093—1098.

ТЕНЗОРНА ФОРМА НА ОСНОВНИТЕ УРАВНЕНИЯ НА КИНЕМАТИКАТА НА ВЕРИГИ И МЕХАНИЗМИ

Д. Манжерон и К. Дръган

РЕЗЮМЕ

За разрешаването на една от най-трудните проблеми от теорията на механизмите и машините, именно тази за определянето на конфигурации от кинематични вериги и механизми в пространството, са използувани редица методи, между които трябва да се споменат: методът на геометрическите места [1], [5], този със сферично представяне [1], методът с винтово изчисление [2]—[4], [6], аналитичният метод [16] и наскоро методът със символични означения [17], [18] и методът на редуцираните ускорения от кой да е ред [7]—[9] и т. н.

В работата се дават няколко тензорни форми на уравненията на движението на вериги и механизми, на които получаването се състои в пресмятането на тензора на положението на звеното J_ν относно звеното $J_{\gamma-1}$ (2), в използуване на тензора на скоростта (7) и на специфичния тензор на една кинематична верига (5), както и в изразяване условието за затвореност (6).

Получените от авторите формули са били приложени за изследване на редица проблеми от анализа и синтеза на механизмите в съобщенията им [29], поместени в бюлетина на Политехническия институт в Яш.

Посочва се и възможността за използуване на получените резултати за установяване класичните уравнения на аналитичната механика, както и новите уравнения на И. Ценов от аналитичната динамика [31]—[33].

FORMES TENSORIELLES DES EQUATIONS DE MOUVEMENT DES CHAINES ET MÉCANISMES

D. Mangeron et C. Drăgan (à Jassy)

RÉSUMÉ

Pour la résolution de l'un des problèmes les plus difficiles de la théorie des mécanismes et des machines, à savoir celui de la détermination des con-

figurations des chaînes cinématiques et des mécanismes de l'espace* on a utilisé nombre de méthodes, parmi lesquelles on doit citer: la méthode des lieux géométriques [1], [5], celle de la représentation sphérique [1], la méthode du calcul virial]2]—[4], [6], la méthode analytique [16] et tout récemment la méthode des notations symboliques [17]—[18], la méthode des accélérations réduites d'ordre quelconque [7]—[9] etc.

On expose ci-dessus quelques formes tensorielles des équations de mouvement des chaînes et mécanismes dont la formation consiste dans l'élaboration du tenseur de position de l'organe J_ν par rapport à l'organe $J_{\nu-1}$ (2), dans l'utilisation du tenseur vitesse (7) et du tenseur spécifique d'une chaîne cinématique (5), tant que dans l'explicitation de l'équation de fermeture (6).

Quelques applications des formes tensorielles des équations de mouvement élaborées ont été données par les auteurs concernant nombre de problèmes relatifs à l'analyse et la synthèse des mécanismes à coulisse de l'espace, des mécanismes aux cames de l'espace et des mécanismes à bielle-manivelle de l'espace dans les notes [29] insérées dans le Bulletin de l'institut polytehnique de Jassy.

On indique ensuite la possibilité de l'utilisation des résultats acquis pour l'établissement des équations classiques de la mécanique analytique ou bien pes nouvelles équations de M. Iv. Tzénoff da la dynamique analytique 31] — [33].

* Voir le rapport consacré à l'analyse profonde des travaux intéressant la théorie des mécanismes et des machines parus depuis les séances de la Conférence Unionale des Mécanismes (Moscou, Juin, 1956), présenté par M. I. I. Artobolevski [1] de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S. à la seconde Conférence Unionale concernant les problèmes fondamentaux de la TMM (Moscou, 24—28 mars 1958).