ЗАВИСИМОСТ МЕЖДУ ФАВАРОВИ И ПОЗИТИВНИ ФУНКЦИОНАЛИ*

В. Чакалов

В своята работа [1] Ж. Фавар разглежда една класа линейни функционали $\{F(x)\}$, дефинирани върху линейното пространство X от всички реални полиноми $\{x(t)\}$. Всеки функционал от тази класа се характеризира със свойствата

а) $F(1) > 0$,

б) ако $F(x) = 0$, то полиномът $x(t)$ има поне един корен в крайния или безкраен интервал Δ (тук към Δ причисляваме всяка от границите му, която е крайно число).

За горната класа функционали, които ще наричаме Фаварови, авторът доказва, че съвпада с класата на позитивните в интервала Δ функционали. Като имаме пред вид теоремите за моментите на Хаусдорф, Стилтйес и Хамбургер, той заключава, че всеки Фаваров функционал е „моментен“ функционал, т. е. за него е в сила представянето

$$F(x) = \int_{\Delta} x(t)\, d\alpha(t),$$

гдето $\alpha(t)$ е монотонно растяща функция в Δ с поне една точка на растеж. В настоящата работа се изследва връзката между Фаваровите и позитивните линейни функционали, дефинирани върху дадено линейно пространство от реални функции.

1. Преди да започнем изложението, ще въведем някои означения и дефиниции и ще направим някои предварителни бележки.

Означаваме с X едно реално линейно пространство, чиито елементи $x(t)$ (или накратко x) са реални функции на променливата t, която от своя страна пробягва елементите на една непразна съвкупност T.

Един линеен функционал $F(x)$, дефиниран над X, ще наричаме **Фаваров**, ако винаги от равенството $F(x') = 0$ за някоя функция $x'(t)$ от X следва, че $x'(t)$ се анулира поне за едно значение на $t \in T$.

Както е прието, ще казваме, че един линеен функционал $F(x)$, дефиниран над X, е **позитивен**, ако винаги от неравенството $x'(t) \geqq 0$ за всяко $t \in T$ следва неравенството $F(x') \geqq 0$; при това, ако винаги от неравенството $x'(t) > 0$ следва неравенството $F(x') > 0$, ще казваме, че $F(x)$ е **съществено позитивен**.

---

* Настоящата работа представлява с някои допълнения част от моята дисертация, изработена под ръководството на проф. д-р Я. Тагамлицки.

Ако всяка функция от X се анулира за някоя стойност на t, то очевидно всеки линеен функционал е Фаваров и в такъв случай изучаването на Фаваровите функционали не представлява интерес. Това налага естественото допущане, че в X има поне една функция $x_0(t) \neq 0$ за всяко t. В същност ние ще предположим, че $x_0(t) > 0$ за всяко t, за да сме сигурни, че съществуват съществено позитивни функционали. Веднаж предположено, че $x_0(t)>0$, без ограничение на общността можем да допуснем, че $x_0(t)=1$. И наистина да образуваме пространството X', чиито елементи са функции от вида $\frac{x(t)}{x_0(t)}$. Ясно е, че всеки функционал, дефиниран над X, може да се разглежда като функционал, дефиниран над X'. При това, ако функционалът, дефиниран над X е Фаваров, позитивен или съществено позитивен, той си остава такъв и когато го разглеждаме като функционал, дефиниран над X'. Освен това пространството X' съдържа функцията $\frac{x_0(t)}{x_0(t)} = 1$. Ето защо занапред винаги ще считаме, че $x_0(t) = 1$.

Очевидно е, че ако $F(x)$ е Фаваров функционал, то $F(1) \neq 0$, тъй като в противен случай би излязло, че функцията $x(t) \equiv 1$ се анулира за някое t.

Ако $F(x)$ е Фаваров функционал, то $\mu F(x)$ (гдето $\mu \neq 0$ е реално число) е също Фаваров. Поради това, без да ограничаваме общността, ще считаме, че Фаваровите функционали са нормирани чрез умножение с подходяща по знак константа така, че $F(1) > 0$.

Ако фиксираме елемента t_1 от T, то очевидно $x(t_1)$ представлява един линеен функционал, дефиниран над X, който е Фаваров и съществено позитивен (а следователно и позитивен).

2. Имайки пред вид казаното дотук, ще докажем следната почти очевидна

Лема. Всеки Фаваров функционал е съществено позитивен.

Доказателство. Нека $F(x)$ е Фаваров функционал. Ще покажем найнапред, че той е позитивен. И наистина нека $x'(t) \geq 0$ за всяко t от T. Търсим такова число λ, че $F(x') + \lambda F(1) = 0$. Такова λ сигурно съществува, понеже $F(1)>0$. Но от $F(x')+\lambda F(1)=0$ или което е същото, от $F(x'+\lambda)=0$ следва, че за някое t_1 ще имаме $x'(t_1) + \lambda = 0$, т. е. $-\lambda = x'(t_1) \geq 0$. Оттук пък следва веднага, че $F(x') = -\lambda F(1) \geq 0$, т. е. че $F(x)$ е позитивен. Че $F(x)$ е освен това съществено позитивен, се доказва така: ако $x'(t) > 0$, то $F(x') \geqq 0$, понеже $F(x)$ е позитивен функционал. Ако допуснем обаче, че $F(x')=0$, то понеже $F(x)$ е Фаваров, бихме имали за някое t_1 $x'(t_1)=0$, което е невъзможно. И тъй, ако $x'(t) > 0$, то и $F(x')>0$, т. е. $F(x)$ е съществено позитивен функционал.

По-интересен е обратният въпрос, а именно дали всеки съществено позитивен функционал е и Фаваров. По-долу ще формулираме едно необходимо и достатъчно условие за това. Преди това обаче ще дадем следната дефиниция.

Казваме, че функцията $x(t)$ удовлетворява условието на Дарбу, ако винаги щом за някои t_1 и t_2 имаме $x(t_1) > 0$ и $x(t_2) < 0$, то съществува поне едно такова t_3, че да имаме $x(t_3) = 0$. Казваме, че пространството X удовлетворява условието на Дарбу, ако всяка негова функция удовлетворява това условие.

Теорема. Необходимото и достатъчно условие, за да бъде всеки съществено позитивен функционал Фаваров, е пространството X да удовлетворява условието на Дарбу.

Доказателство. Необходимост. Нека всеки съществено позитивен функционал е Фаваров, т. е. съгласно предната лема нека съвкупността от Фаваровите функционали съвпада с тази на съществено позитивните. Избираме функцията $x'(t)$ така, че да имаме* $x'(t_1) > 0$ и $x'(t_2) < 0$. Тъй като $x'(t_1)$ и $x'(t_2)$ са Фаварови функционали, а следователно и съществено позитивни, то произволна тяхна линейна комбинация с положителни коефициенти представлява съществено позитивен, а следователно и Фаваров функционал. (Тук ще отбележим, че съвкупността от съществено позитивните функционали е изпъкнала.) Имайки пред вид това, определяме положителните числа A_1 и A_2 така, че да бъде изпълнено равенството

$$A_1 x'(t_1) + A_2 x'(t_2) = 0.$$

Разглеждаме сега функционала

$$F(x) = A_1 x(t_1) + A_2 x(t_2).$$

Тъй като $F(x)$ е Фаваров и $F(x_1) = 0$, то съществува едно t_3 такова, че $x'(t_3) = 0$. С това необходимостта е установена.

Достатъчност. Нека пространството X удовлетворява условието на Дарбу и нека $F(x)$ е съществено позитивен функционал. Ще покажем, че той е и Фаваров. И наистина, ако $F(x')=0$, то оттук следва, че не е възможно да имаме нито $x'(t) > 0$ за всяко t, нито $x'(t) < 0$ за всяко t, понеже в противен случай би излязло, че $F(x)$ не е съществено позитивен функционал. Оттук и от условието на Дарбу следва, че функцията $x'(t)$ сигурно се анулира за някое значение на t, а с това е установено, че $F(x)$ е Фаваров функционал, т. е. достатъчността на условието.

За да илюстрираме тази теорема, ще споменем, че ако X означава пространството от функциите $x(t)$ на числовата променлива t, дефинирани и притежаващи примитивни функции в даден интервал Δ, то условието, а следователно и твърдението на теоремата са изпълнени.

Горната теорема ни дава едно условие, за да съвпада съвкупността на Фаваровите с тази на съществено позитивните функционали. За да намерим кога съвпадат Фаваровите с ненулевите позитивни функционали, достатъчно е да намерим условия, при които всеки ненулев позитивен функционал е съществено позитивен. Следващата точка е посветена на този въпрос.

3. Ще докажем най-напред следната

Теорема. Ако пространството X е съставено от ограничени функции, то необходимо и достатъчно условие, за

* Ако такава функция не съществува, то необходимостта следва автоматически.

да бъде всеки ненулев позитивен функционал съществено позитивен, е всяка функция $x(t)$ да достига точната си долна (а следователно и точната си горна) граница.

Доказателство. Необходимост. Нека всеки ненулев позитивен функционал е съществено позитивен. Ще покажем, че всяка функция от X достига точната си долна граница. За тази цел ще допуснем противното и ще означим с $x_1(t)$ една функция от X, която не достига точната си долна граница l. Тогава ще имаме неравенството

$$x_1(t) > l$$

за всяко t. Горното неравенство ни учи, че функцията

$$x_2(t) = x_1(t) - l$$

е положителна за всяко t, въпреки че $\inf\limits_{t \in T} x_2(t) = 0$. Разглеждаме линейното подпространство Y на X, съставено от всевъзможните линейни комбинации с реални коефициенти на функциите $x_2(t)$ и 1. Произволен елемент от Y ще има вида

$$y(t) = \lambda + \mu x_2(t).$$

Дефинираме над Y линейния функционал $F(y)$ чрез равенството

$$F(y) = \lambda.$$

Че така дефинираният функционал $F(y)$ е позитивен, се убеждаваме лесно, като вземем пред вид, че ако $y(t) = \lambda + \mu x_2(t) \geq 0$ за всяко t, то $\lambda \geq 0$. Действително, ако $\lambda < 0$, то благодарение на това, че $\inf\limits_{t \in T} x_2(t) = 0$, можем да изберем t_1 така, че $|\mu x_2(t_1)| < \frac{|\lambda|}{2}$, и следователно бихме имали

$$y(t_1) = \lambda + \mu x_2(t_1) < \lambda + \frac{|\lambda|}{2} = -\frac{|\lambda|}{2} < 0.$$

Ще покажем, че $F(y)$ може да се продължи над X. Ако $x(t) \in X$, то тъй като $x(t)$ е ограничена, възможно е да се намери положителна константа M така, че $M - x(t) \geqq 0$ за всяко t. Но $M \in Y$, тъй че за всеки елемент от X съществува такава функция $y_1(t)$ от Y, че $y_1(t) \geqq 0$ и $y_1(t) \geqq x(t)$ при всяко t. Полагаме $p(x) = \inf\limits_{y_1 \in Y} F(y_1)$, гдето $y_1(t)$ пробягва всички неотрицателни функции от Y, които мажорират $x(t)$. Съвършено очевидно е, че ще имаме

$$\begin{aligned} &p(x' + x'') \leqq p(x') + p(x''), \\ (1) \qquad &p(\lambda x) = \lambda p(x), \text{ при } \lambda \geqq 0, \\ &F(y) \leqq p(y), \text{ при } y \in Y. \end{aligned}$$

От (1) и от теоремата на Хан-Банах за продължение на линейните функционали е ясно, че $F(y)$ може да бъде продължена над X и при това $F(x) \leqq p(x)$ за всяко $x \in X$. Лесно се вижда също, че $F(x)$ е позитивен. И наистина нека $x'(t) \geqq 0$. В такъв случай ще имаме

$$F(-x') \leqq p(-x') = \inf_{\substack{y_1 \in Y \\ y_1 \geqq 0}} F(y_1) \leqq F(0) = 0$$

и следователно

$$F(x') \geqq 0,$$

т. е. $F(x)$ е позитивен функционал. Той не е тъждествено равен на нула, защото $F(1) = 1$. Но той не е и съществено позитивен, понеже $F(x_2)=0$, въпреки че $x_2(t) > 0$ за всяко t. Това противоречи на допущането, че всеки ненулев позитивен функционал е съществено позитивен. Полученото противоречие показва, че всяка функция от X достига точната си долна граница, с което необходимостта е установена.

Достатъчност. Нека всяка функция от X достига точната си долна (а следователно и точната си горна) граница и нека $F(x)$ е един ненулев позитивен функционал, дефиниран над X. Очевидно $F(1) > 0$, защото в противен случай, ако $F(1) = 0$, поради ограничеността на всяка функция от X щяха да са в сила неравенствата

$$-\infty < l = \inf_{t \in T} x(t) < x(t) \leq \sup_{t \in T} x(t) = M < \infty$$

и следователно поради позитивността на $F(x)$ бихме имали

$$0 = lF(1) = F(l) < F(x) \leq F(L) = LF(1) = 0,$$

отгдето би следвало, че $F(x)$ е нулевият функционал.

Ако $x(t) > 0$, то очевидно $\inf\limits_{t \in T} x(t) > 0$, защото иначе би следвало, че $x(t)$ се анулира за някое t. В такъв случай

$$x(t) - l \geqq 0$$

за всяко t и следователно

$$F(x) \geqq F(l) = lF(1) > 0.$$

Последното неравенство ни учи, че $F(x)$ е съществено позитивен функционал. С това и достатъчността е установена.

Горната теорема ни дава необходимо и достатъчно условие за съвпадане на ненулевите позитивни и съществено позитивни функционали в случая, когато пространството X е съставено от ограничени функции. По-долу ще дадем едно достатъчно условие за съвпадане на ненулевите позитивни и съществено позитивни функционали, при което изискването за ограниченост на функциите от X ще заменим с друго. Ще докажем именно следната

Теорема. Ако произведението и частното на всеки две функции от X принадлежат пак на X(разбира се, при условие че знаменателят на частното не се анулира), то всеки ненулев позитивен функционал е съществено позитивен.

Доказателство. Да означим с $F(x)$ един ненулев позитивен функционал. Лесно се вижда, че $F(1) > 0$. Наистина, ако $F(1)=0$, то от неравенството

$$(x(t) + a)^2 \geqq 0),$$

което е изпълнено при всяко a и всяко $x(t) \in X$, следва, че ще е в сила неравенството

$$0 < F((x+a)^2) = F(x^2) + 2aF(x) + a^2F(1) = F(x^2) + 2a\,F(x).$$

(Нека отбележим, че $(x(t)+a)^2 \in X$ съгласно с предположението на теоремата.) Тъй като последното неравенство трябва да е в сила за всяко a, то ясно е, че трябва да имаме $F(x)=0$ при всяко $x(t) \in X$, което ще рече, че $F(x)$ е нулевият функционал, а това противоречи на избора на $F(x)$. И тъй $F(1) > 0$.

Да допуснем сега, че $F(x)$ не е съществено позитивен и нека $x_1(t)>0$ е такава функция, за която $F(x_1)=0$. Разглеждаме функционала

$$F_1(x) = F(x\,.\,x_1).$$

Очевидно $F_1(x)$ е линеен позитивен функционал. Но тъй като

$$F_1(1) = F(x_1) = 0,$$

то $F_1(x)$ е тъждествено нула за всяко $x(t)$ от X. Оттук обаче следва, че и $F(x)$ е нулевият функционал, както се вижда от равенствата

$$F(x) = F\left(\frac{x}{x_1}\,x_1\right) = F_1\left(\frac{x}{x_1}\right) = 0.$$

(Тук използуваме обстоятелството, че $\dfrac{x(t)}{x_1(t)} \in X$ заедно с $x(t)$ и $x_1(t)$.) Противоречието, до което достигнахме, доказва верността на теоремата.

4. Тук ще формулираме две непосредствени следствия от горните теореми, на чиито доказателства не ще се спираме.

Нека X е пространството от всички реални, ограничени и непрекъснати функции $x(u,v)$ на двете променливи u и v, с обща дефиниционна област R. При тези условия от горните теореми следва, че за да съвпадат Фаваровите и ненулевите позитивни функционали, дефинирани над X, необходимо и достатъчно е R да е свързана, затворена и ограничена съвкупност.

Ако X означава пространството от всички реални непрекъснати функции, дефинирани в R, то за да съвпадат Фаваровите и ненулевите позитивни функционали, необходимо и достатъчно е R да е свързана.

Постъпила на 20. III. 1960 г.

ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

1. Favard J., Les théorèmes de la moyenne pour les polynômes, Actualités scientifiques et industrielles, **302** (1936).

ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ФАВАРОВЫМИ И ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ*

В. Чакалов

РЕЗЮМЕ

В своей работе [1] Ж. Фавар рассматривает K класс линейных функционалов $F(x)$, дефинированных над линейным пространством X, состоящем из реальных полиномов $x(t)$ переменной t. Пусть Δ означает один крайний или бесконечный промежуток, содержащий те из своих окончаний, которые являются крайними числами. Функционалы класса K можно охарактеризовать следующими двумя свойствами: а) если $F(x)$ является одним из функционалов класса K и $x_0 = x_0(t)$ полиномом в пространстве X, для которого $F(x_0)=0$, то $x_0(t)$ обладает по крайней мере одним нулем в Δ; б) $F(1) > 0$ для всех функционалов из K.

В своей вышеупомянутой работе Фавар доказывает, что определенный таким способом класс k функционалов, которые для краткости мы будем называть фаваровыми, совпадает с классом положительных в промежутке Δ функционалов, дефинированных над пространством X. При помощи теорем Гаусдорфа, Стильтйеса и Гамбургера легко убедиться, что каждый функционал, удовлетворяющий обоим условиям а) и б) является „моментным функционалом", т. е. существует возрастающая функция с по крайней мере одной точкой роста $a(t)$ в промежутке Δ так, что $F(x)$ должно обладать интегральным представлением $F(x) = \int\limits_{\Delta} x(t)\, d\,a(t)$.

В болгарском тексте настоящей работы исследуется связь между фаваровыми и положительными функционалами, дефинированными над линейным пространством из реальных функции. При этом в силе остаются следующие определения и обозначения:

Пусть X обозначает линейное пространство из реальных функций $x(t)$ параметром t, пробегающим все элементы одной не пустой совокупности T. Предполагаем, кроме того, что константа $x(t) = 1$, рассматриваемая как функция t, принадлежит X.

Линейный функционал $F(x)$ называется фаваровым функционалом, если из равенства $F(x) = 0$ всегда следует существование одного значения t_0 параметром t, для которого имеется $x(t_0) = 0$. Ввиду того, что $F(1) \neq 0$, мы можем нормировать фаваровые функционалы условием $F(1) > 0$.

Как обыкновенно, линейный функционал, дефинированный над X, называется положительным, когда из неравенства $x(t) \geqq 0$ для каждого $t \in T$ всегда вытекает неравенство $F(x) \geqq 0$. При этом, если из $x(t) > 0$ для каждого $t \in T$ следует строгое неравенство $F(x) > 0$, то $F(x)$ называется существенно положительным.

* С известными дополнениями настоящая работа составляет част диссертации автора, разработанной под руководством проф. д-р Я. Тагамлицкого.

Функция $x(t)$ удовлетворяет условию Дарбу, если она обладает следующим свойством: из $x(t_1)>0$ и $x(t_2)<0$ всегда следует существование по крайней мере одного значения t_3 аргумента t, для которого имеется $x(t_3)=0$. Пространство X удовлетворяет условию Дарбу, когда каждая его функция удовлетворяет этому условию.

Доказываются следующие теоремы:

1. Каждый фаваровый функционал является вместе с тем и положительным.

2) Необходимым и достаточным условием для того, чтобы каждый существенно положительный функционал был бы фаваровым, то, что пространство X должно удовлетворять условию Дарбу.

3) Если пространство X состоит из ограниченных функций, то для того, чтобы каждый положительный (различный от нулевого) функционал был существенно положительным, необходимо и достаточно, чтобы каждая функция X доходила точно до своей нижней, (а следовательно и до своей точной верхней) границы.

4) Если произведение и частное (знаменатель которого не аннулируется) каждых двух функций X принадлежит X, то каждый различный от нулевого положительный функционал является существенно положительным.

Вышеприведенные теоремы иллюстрируются примерами.

ZUSAMMENHANG ZWISCHEN FAVARDSCHEN UND POSITIVEN FUNKTIONALEN*

V. Tchakaloff

ZUSAMMENFASSUNG

In seiner Arbeit [1] betrachtet J. Favard eine Klasse K linearer Funktionale $\{F(x)\}$ über den Linearraum X, der aus sämtlichen reelen Polynome $x(t)$ einer reellen Veränderlichen t besteht. Es bedeute Δ ein (endliches oder unendliches) Intervall, welches als abgeschlossen vorausgesetzt wird in dem Sinne, daß jeder endliche Grenzpunkt von Δ zu Δ angehören soll. Die Funktionale der Klasse K lassen sich durch folgende zwei Eigenschaften charakterisieren: a) ist $F(x)$ ein Funktional der Klasse K und $x_0=x_0(t)$ ein Polynom des Raumes X für welches $F(x_0)=0$, so besitzt $x_0(t)$ mindestens eine Nullstelle in Δ; b) es ist $F(1)>0$ für jedes Funktional von K J. Favard hat nun in seiner zitierten Arbeit bewiesen, daß die so definierte Funktionalklasse K, die wir kurz Favardsche Funktionalklasse nennen wollen, mit der Klasse der im Intervall positiven Funktionale über den Funktionenraum X übereinstimmt. Durch Anwendung bekannter Sätze der Momententheorie von Stieltjes, Hamburger und Hausdorff schließt er, daß jedes

* Diese Arbeit stellt einen mit einigen Ergänzungen verschenen Auszug aus meiner Dissertation unter der Leitung von Professor Dr. I. Tagamlitzki dar.

den Bedingungen a) und b) genügende Funktional $F(x)$ ein „Momentenfunktional" darstellt, d. h. es gibt eine wachsende nichtkonstante Funktion $a(t)$ im Intervall Δ, so daß $F(x)$ die Integraldarstellung

$$F(x) = \int_{\Delta} x(t)\,da(t)$$

zulässt.

Im bulgarischen Text dieser Arbeit wird der Zusammenhang zwischen den Favardschen und den positiven Funktionalen über einen gegebenen linearen Raum reeller Funktionen des Parameters t untersucht. Es werden dabei folgende Definitionen und Bezeichnungen eingeführt.

X bedeutet einen linearen, aus reellen Funktionen $x(t)$ des Parameters t bestehende Raum, wobei t eine gewisse nichtleere Menge T von Elementen durchläuft. Es wird außerdem vorausgesetzt, daß die Konstante $x(t) \equiv 1$, als Funktion von t betrachtet, dem Raum X angehört.

Das lineare Funktional $F(x)$ heißt ein Favardsches Funktional, wenn aus der Gleichung $F(x) = 0$ stets die Existenz eines Wertes t_0 des Parameters t folgt, so daß $x(t_0) = 0$ ist. Wegen $F(1) \neq 0$ kann man die Favardschen Funktionale derart normieren, daß $F(1) > 0$ wird.

Wie üblich, heißt ein lineares über X definiertes Funktional positiv, wenn aus der Ungleichung $x(t) \geq 0$ für jedes t aus T die Ungleichung $F(x) \geq 0$ folgt; das Funktional $F(x)$ heißt wesentlich positiv falls aus der schärferen Ungleichung $x(t) > 0$ für jedes $t \in T$ stets die (ebenfalls schärfere) Ungleichung $F(x) > 0$ folgt.

Die Funktion $x(t)$ genügt der Darbouxschen Bedingung, wenn sie folgende Eigenschaft besitzt: Aus $x(t_1) > 0$, $x(t_2) < 0$ folgt stets die Existenz eines dritten Argumentes $t_3 \in T$, so daß $x(t_3) = 0$. Der Funktionenraum X genügt der Darbouxschen Bedingung falls jede Funktion von t eine „Darbouxsche" Funktion ist.

Es werden folgende Sätze bewiesen:

1. Jedes Favardsche Funktional ist wesentlich positiv.

2. Dann und nur dann ist jedes wesentlich positive Funktional über den Funktionenraum X ein Favardsches, wenn dieser Raum der Darbouxschen Bedingung genügt.

3. Besteht der Funktionenraum X aus beschränkten Funktionen, so ist jedes nicht identisch verschwindende positive Funktional wesentlich positiv dann und nur dann, wenn jede Funktion $x(t)$ ihre genaue obere (und folglich auch ihre genaue untere) Grenze erreicht.

4. Gehört das Produkt und der Quotient (Division durch Null ausgeschlossen) zweier beliebigen Funktionen des Raumes X zu demselben Raum, so ist jedes nicht identisch verschwindende positive Funktional über X wesentlich positiv.

Die Sätze 1 bis 4 werden an einige Beispiele spezieller Funktionenräume erläutert.