ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЯ КОНУСОВ

Г. Георгиев (Яссы) и И. Попа (Яссы)

Геометрия многообразия конусов в эвклидовом пространстве была исследована различными авторами, первым из которых был Sophus Lie; изучение тех же многообразий в аффинном трехмерном пространстве было затронуто советским геометром В. Вагнером и одним из авторов этой статьи.

В настоящей работе исследуются различные свойства многообразия конусов трехмерного проективного пространства, начиная с вывода условий интегрируемости типа Gauss'а—Петерсона—Codazzi. Присоединяется, к каждой образующей локального конуса, инвариантный репер, для элементов которого даны соответствующие геометрические интерпретации. Устанавливаются все инварианты многообразия, указав, что число независимых из них не превышает 32.

Для геометрических интерпретаций используется обобщение поляритета Pantazi—Bompiani, известного из случая линейних неголономных многообразий, а также обобщение адъюнктной точки Voss'а и схождение и паралеллизм в смысле Myller'а. Это последнее понятие позволяет определить величины, обобщающие нормальную и геодезическую кривизны и геодезическое кручение какой либо допустимой кривой, а также чебышевскую кривизну и кривизну параллельности какой либо „сети" многообразия конусов. Голономия, в случае многообразия конусов, сводится к голономности всех ее линейных касательных многообразий. Разбирается частный случай многообразия конусов, образующие которых формируют комплекс прямых.

Исследуются затем особые случаи, не охватывающиеся общей теорией линейного неголомного многообразия (к теории которого даны лишь некоторые дополнения), а также случай многообразия конусов второго порядка. Для этих случаев обобщается естественным образом „неголономная сфера" (квадратное или линейное многообразие Tzitzeik'и) и устанавливаются некоторые их свойства.

Некоторые свойства, разобранные в настоящей работе, были вкратце сообщены в заметках (1).

§ I. Введение. Обозначим через M вершину локального конуса многообразия и через g одну из его образующих. Выбираем проективный репер $A_0 A_1 A_2 A_3$ так, чтобы $A_0 = M$ и $A_3 \in g$. Для малых смещений вершины A_0 имеем

$$dA_0 = \omega_0^i A_i \text{ и } dA_k = \omega_k^m A_m, \quad i, m = 0, 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, 3;$$

если формы Пфаффа ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3 суть переменные формы исследуемого многообразия, то

$$d\tau = [\omega_0^1 \, \omega_0^2 \, \omega_0^3] \neq 0.$$

Для малого смещения образующей g, вдоль локального конуса, выбираем какую либо параметрическую форму dt.

Для семейства присоединённых реперов к образующей g локального конуса (с фиксированной вершиной A_0) имеем первым долгом $\pi_3^1 = \pi_3^2 = 0$ и, в продолжении всего процесса выбора инвариантного репера образующей этого конуса, имеем также $\pi_0^i = \pi_i^0 = 0$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Применяя известный метод Cartan'a для установления канонического репера, в данном случае это сводится, в сущности, к определению инвариантного репера какой либо плоской кривой. Обозначая через $\tilde{\omega}_i^j$ формы Пфаффа, выражающие смещения репера при малом смещении образующей g вдоль локального конуса, для канонического репера они получают значения

$$\tilde{\omega}_1^1 = 0, \ \tilde{\omega}_1^2 = dt, \ \tilde{\omega}_1^3 = \varkappa dt,$$

$$\tilde{\omega}_2^1 = \varkappa dt, \ \tilde{\omega}_2^2 = 0, \ \tilde{\omega}_2^3 = dt,$$

$$\tilde{\omega}_3^1 = dt, \ \tilde{\omega}_3^2 = 0, \ \tilde{\omega}_3^3 = 0.$$

Для интерпретации репера, элемента дуги dt и кривизны $\varkappa$ локального конуса воспользуемся изоморфизмом, который существует между геометрией плоской кривой и геометрией конуса. Как известно, в процессе выбора канонического репера, были исключены из рассмотрения случаи многообразий конусов второго порядка и линейных многообразий (когда конусы вырождаются в плоскости). В первом из них можно выбрать реперы так, чтобы все $\tilde{\omega}_i^j = 0$, кроме $\tilde{\omega}_3^1 = \tilde{\omega}_1^2 = dt$, а во втором — все $\tilde{\omega}_i^j = 0$, кроме $\tilde{\omega}_3^1 = dt$.

У выбранных таким образом реперов остаются:

а) 4 степени свободы (четыре вторичных параметра), для общего случая — положение точек A_1, A_2, A_3 и U на рёбрах установленного трёхгранника и установленной единичной прямой, через A_0;

б) 6 степеней свободы (6 вторичных параметров), для случая конусов второго порядка — то же, что и в предыдущем случае и вдобавок произвольный выбор, на квадратичном конусе, рёбер $A_0 A_2$ и $A_0 U$;

с) 9 степеней свободы (9 вторичных параметров) для случая линейных многообразий — A_3 на образующей, A_1 в касательной плоскости и A_2 и U в пространстве.

§ 2. Условие интегрируемости. Присоединив какой либо репер к образующему элементу многообразия конусов (v), для произвольного смещения этого элемента имеем:

$$dA_i = \omega_i^j A_j \quad (i, j = 0, 1, 2, 3), \tag{1}$$

где

(2) $\omega_i^j = \Gamma_{ik}^j \omega_0^k + \Gamma_{it}^j dt \quad (i, k = 1, 2, 3;\ j = 0, 1, 2, 3 \text{ и } i = j = 0);$

предполагаем ещё, что:

$$\sum_{i=0}^{3} \omega_i^i = 0 .$$

Для реперов, установленных в § 1, Γ_{it}^j имеют следующие значения: для случая а) они будут

(3′) $\Gamma_{1t}^2 = \Gamma_{2t}^3 = \Gamma_{3t}^1 = 1, \quad \Gamma_{2t}^1 = \Gamma_{1t}^3 = k$, остальные $\Gamma_{it}^j \quad 0;$

для случая б) они будут:

(3″) $\Gamma_{3t}^1 = \Gamma_{1t}^2 = 1$, остальные $\Gamma_{it}^j = 0;$

для случая с) они будут:

(3‴) $\Gamma_{3t}^1 \quad 1$, остальные $\Gamma_{it}^j = 0$.

Если обозначим через:

(3) $$d\Gamma_{ik}^j = \Gamma_{ik,m}^j \omega_0^m + \Gamma_{ik,t}^j dt, \quad d\Gamma_{it}^j = \Gamma_{it,k}^j \omega_0^k + \Gamma_{it,t}^j dt ,$$

то из уравнений структуры

(s) $$d\omega_i^j = [\omega_j^k \omega_k^j]$$

следует

(I) $\Gamma_{jl,m}^j - \Gamma_{im,l}^j \quad \Gamma_{ik}^j(\Gamma_{lm}^k - \Gamma_{ml}^k) + \Gamma_{im}^k \Gamma_{kl}^j - \Gamma_{il}^k \Gamma_{km}^j + \Gamma_{im}^j \Gamma_{0l}^0 - \Gamma_{il}^j \Gamma_{0m}^0 ,$

(II) $\Gamma_{im,t}^j - \Gamma_{it,m}^j = \Gamma_{ik}^j \Gamma_{mt}^k + \Gamma_{it}^k \Gamma_{km}^j - \Gamma_{im}^k \Gamma_{kt}^j - \Gamma_{im}^j \Gamma_{0t}^0 .$

§ 3. Условия неподвижности. Если обозначим через x^i локальные координаты какой либой точки P, то есть $P = x^i A_i$, то из (I) следует:

$$(dx^j + \omega_k^j x^k) A_j = \tilde{\omega} P,$$

откуда

(III) $$dx^j + \omega_k^j x^k = \tilde{\omega} x^j .$$

Одно из следствий условий неподвижности приводит к следующему обобшению поляритета Pantazi-Bompiani, известного для случая линейных неголомных многообразий.

Если $u_i x^i = 0$ уравнение плоскости π, солидарной с выбранным репером (то-есть u_l — постоянны), то для какого либо смещения (ω_0^i) точки A_0 характеристическая прямая этой плоскости дана уравнениями

$$u_i x^i = 0, \quad u_i \omega_k^i x^k = 0 .$$

Пользуясь соотношениями (2) второе уравнение будет вида $u_i \Gamma_{kl}^i \omega_0^l x^k = 0$. Отсюда следует, что какой либо прямой через A_0 соответствует, в плоскости π, характеристическая прямая, тангенциальные координаты которой выражаются линейно через ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3. Если плоскость π касается какого либо линейного неголономного многообразия, то имеем поляритет Pantazi—Bompiani.

Если плоскость π будет $A_0 A_3 A_1 (x^2=0)$, то поляритет выражается соотношениями

(4) $$\xi_0=\omega_0^2, \quad \xi_1=\Gamma_{1j}^2\omega_0^j, \quad \xi_3=\Gamma_{3j}^2\omega_0^j,$$

где ξ_i — тангенциальные координаты прямой в плоскости $x^2=0$, соответствующей прямой (A_0, A_0+dA_0).

§ 4. Определение канонического репера многообразия конусов (общий случай). Назовём проективной нормалью многообразия (v) ребро $A_0 A_2$ репера, установленное в § I. При смещении вдоль нормали $(\omega_0^1=\omega_0^3=0)$, характеристическая прямая касательной плоскости к локальному конусу будет:

(5) $$x^2=0, \quad x_0+\Gamma_{12}^2 x^1+\Gamma_{32}^2 x^3=0.$$

Выбирая вершины A_1 и A_3 в точках её пересечения с рёбрами $A_0 A_1$ и $A_0 A_3$, имеем:

$$\Gamma_{12}^2=\Gamma_{32}^2=0.$$

Подобным образом находим, что характеристическая прямая плоскости $A_0 A_2 A_3 (x^1=0)$, при смещении вдоль $A_0 A_1$, будет:

(6) $$x^1=0, \quad x^0+\Gamma_{21}^1 x^2+\Gamma_{31}^1 x^3=0,$$

а характеристическая прямая плоскости $A_0 A_1 A_2 (x^3=0)$, при смещении вдоль $A_0 A_3$, будет:

(7) $$x^3=0, \quad x^0+\Gamma_{13}^3 x^1+\Gamma_{23}^3 x^2=0.$$

При условии, что прямые (6) или (7) проходят через A_2, имеем:

$$\Gamma_{21}^1=0 \quad \text{или} \quad \Gamma_{23}^3=0.$$

Замечание. Если характеристические прямые (5), (6), (7) находятся в плоскости $x^0=0$, то (условие необходимое и достаточное)

$$\Gamma_{ki}^i=0 \quad i,k=1,2,3; \quad i\neq k.$$

В этом случае, как можно видеть из § 6, имеем одно пространственное обобщение сети Чебышева.

Для определения единичной точки U на единичной прямой A_0U, возьмём, например, плоскость $A_0 A_3 U$, характеристическая прямая которой для какого либо смещения dA_0 дана уравнениями:

$$x^1-x^2=0, \quad (\omega_k^1-\omega_k^2)x^k=0.$$

Для смещения по проективной нормали, характеристика этой плоскости будет:

$$x^1-x^2=0, \quad x^0+(\Gamma_{12}^2+\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^1-\Gamma_{22}^1)x^1+(\Gamma_{32}^2-\Gamma_{32}^1)x^3=0.$$

Для того, чтобы эта прямая содержала точку U, имеем:

$$\Gamma'^1_{12}+\Gamma'^1_{22}+\Gamma'^1_{32}=1+\Gamma'^2_{12}+\Gamma'^2_{22}+\Gamma'^2_{32}.$$

С этим канонический репер многообразия (v) вполне определён.

Многообразие конусов (v) дано уравнениями (2), коэффициенты которых удовлетворяют (3') и

(8) $$\Gamma'^1_{21}=\Gamma'^2_{12}=\Gamma'^2_{32}=\Gamma'^1_{12}+\Gamma'^1_{22}+\Gamma'^1_{32}-\Gamma'^2_{22}-1=0,$$

а также их дифференциальные следствия (I) и (II).

Отсюда нетрудно заметить, что числа независимых инвариантов многообразия (v) не более 32.

§ 5. Адъюнктные точки Voss'а; параллелизм и схождение в смысле Myller'а. Если A_0 описывает какую либо кривую Γ и $A_0A_1A_2A_3$ её сопровождающии тетраедр, обозначим через $\tilde{\omega}$ инвариантную форму Пфаффа, соответствующую смещению A_0 вдоль Γ. Присоединим к ребру $A_0\,A_i$ $(i=1,2,3)$ ребро A_0A_j $(i\neq j=1,2,3)$. Назовём точку $P=A_i+tA_0$ адъюнктной точкой Voss'а ребра A_0A_i по отношению к ребру $A_0\,A_j$ вдоль кривой Γ, точка для которой $\left[A_0A_iA_j\frac{dP}{\tilde{\omega}}\right]=0$, то-есть:

$$\left[A_0A_iA_j\frac{dA_i}{\tilde{\omega}}\right]+t\left[A_0A_iA_j\frac{dA_0}{\tilde{\omega}}\right]=0.$$

P находится на пересечении ребра A_0A_i с характеристикой плоскости $A_0A_iA_j$ при смещении вдоль Γ.

Если $P=A_i(t=0)$, имеем:

(9) $$\varrho=\left[A_0A_iA_i\frac{dA_i}{\tilde{\omega}}\right]=0.$$

В этом случае скажем, что ребро A_0A_i „параллельно в смысле Myller'а" по отношению к A_0A_j вдоль кривой Γ.

Если при $t=0$ имеем $\varrho\neq 0$, то назовём эту величину „отклонением от параллелизма Myller'а". Это понятие, как мы увидим в следующем параграфе, даёт возможность указать на геометрическую интерпретацию многим коэффициентами Γ'^j_{ik}, а также обобщить, на многообразиях проективного пространства, многие замечательные линии и сети поверхностей эвклидового пространства.

Если $\frac{dP}{\tilde{\omega}}$ коллинеарен с $A_0\,A_i$, то-есть $\left[A_0,A_i,\frac{dP}{\tilde{\omega}}\right]=0$, мы говорим, что P точка Malus'а. Эта точка существует, если касательная к кривой Γ является образующей конуса Malus'а, уравнение которого:

(10) $$\omega_i^j\omega_0^k-\omega_i^k\omega_0^j=0,\ \text{где}\ i,j,k=1,2,3;\ i\neq j\neq k\neq i.$$

Если $\frac{dP}{\tilde{\omega}}$ коллинеарен с P и A_j, то-есть $\left[A_j,P,\frac{dP}{\tilde{\omega}}\right]=0$, мы говорим, что ряд прямых A_0A_i сходится вдоль Γ по отношению к рёбрам $A_0\,A_j$. Точка P существует, если:

$$(11)\quad \omega_0^i(\omega_i^k)^2+\omega_0^k\omega_i^k(\omega_0^0-\omega_i^i)-\omega_i^0(\omega_0^k)^2=\omega_0^k d\omega_i^k-\omega_i^k d\omega_0^2;\qquad \begin{matrix} i,j,k=1,2,3;\\ i\neq j\neq k\neq i;\end{matrix}$$

то-есть касательная к кривой Γ будет образующей конуса третьего порядка (11), которой можно назвать „конусом Myller'а".

В частности, если $P=A_i$ и $\left[A_j, A_i, \frac{dA_i}{\tilde{\omega}}\right]=0$, мы скажем что сходимость Myller'а является особой.

Кроме точек Malus'а и Voss'а (это последняя, как в общем случае, так и в случае сходимости Myller'а), для интерпретации коэффициентов Γ_{ik}^j и их производных по ω_0^k, можно использовать и характеристические точки граней $A_i A_j A_k$, когда Γ является допустимой кривой многобразия (v).

§ 6. Инварианты кривой и „сети" многообразия конусов (v); замечательные линии этих многообразий. В виде приложения соображений, высказанных в § 4, введём некоторые проективные инварианты, которые обобщают для многообразий (v) понятия: геодезической и нормальной кривизны, геодезического кручения какой либо допустимой кривой, а также кривизну Чебышева и кривизну параллельности пары направлений касательной плоскости к (v), одно из направлений будучи образующей (g) локального конуса.

Если A_0A_3 — образующая (g), а $A_0A_3A_1$ — касательная плоскость к конусу (v) и A_0A_2 проективная нормаль к (v), то для частных значений ϱ из (9) имеем:

1) Γ — допустимая кривая многообразия (v) (касается ребра A_0A_3) $-\tilde{\omega}=\omega_0^3$;

если $i=3$, $j=2$, то:

$$\varrho=\varkappa_g=\left[A_0A_3A_2\frac{dA_3}{\omega_0^3}\right]=-\frac{1}{d\tau}[\omega_0^1\omega_0^2\omega_3^1]=-\left(\Gamma_{33}^1+\Gamma_{3t}^1\frac{dt}{\omega_0^3}\right);$$

назовём $\varkappa_g$ геодезической кривизной кривой Γ на (v).

Если $i=3$, $j=1$, то

$$\varrho=\varkappa_n=\left[A_0A_3A_1\frac{dA_3}{\omega_0^3}\right]=\frac{1}{d\tau}[\omega_0^1\omega_0^2\omega_3^2]=\Gamma_{33}^2+\Gamma_{3t}^2\frac{dt}{\omega_0^3};$$

назовём $\varkappa_n$ нормальной кривизной Γ на (v).

Если $i=2$, $j=3$, то

$$\varrho=\tau_g=\left[A_0A_2A_3\frac{dA_2}{\omega_0^3}\right]=\frac{1}{d\tau}[\omega_0^1\omega_0^2\omega_2^1]=\Gamma_{23}^1+\Gamma_{2t}^1\frac{dt}{\omega_0^3};$$

назовём τ_g геодезическим кручением Γ на (v).

2) Кривая Γ касается ребра $A_0A-\tilde{\omega}=\omega_0^1$;

если $i=3$, $j=2$, то отклонение от параллелизма

$$\varrho=\varkappa_{c_{31}}=\left[A_0A_3A_2\frac{dA_3}{\omega_0^1}\right]=\frac{1}{d\tau}[\omega_0^2\omega_0^3\omega_3^1]=-\left(\Gamma_{31}^1+\Gamma_{3t}^1\frac{dt}{\omega_0^1}\right);$$

назовём $\varkappa_{c_{31}}$ кривизной Чебышева направления $A_0 A_3$ по отношению к ребру $A_0 A_1$.

Если $i = 3$, $j = 1$, то отклонение от параллелизма

$$\varrho = \varkappa_{p_{31}} = \left[A_0 A_3 A_1 \frac{dA_3}{\omega_0^1} \right] = \frac{1}{d\tau} [\omega_0^2 \omega_0^3 \omega_3^2] = \Gamma_{31}^{\prime 2} + \Gamma_{3t}^{\prime 2} \frac{dt}{\omega_0^1};$$

назовём $\varkappa_{p_{31}}$ кривизной параллельности направления $A_0 A_3$ по отношению к $A_0 A_1$.

Если $\varkappa_g = 0$, то соприкасающаяся плоскость кривой Γ содержит нормаль $A_0 A_2$, а поэтому естественно назвать Γ геодезической линией на (v); в этом случае имеем

$$dt + \Gamma_{33}^{\prime 1} \omega_0^3 = 0.$$

Если $\varkappa_n = 0$, то соприкасающаяся плоскость кривой Γ совпадает с касательной плоскостью к (v); в этом случае $\Gamma_{33}^{\prime 2} = 0$ и Γ будет асимптотической линией на (v). Значения t, удовлетворяющие этому уравнению, определяют, на локальном конусе, асимптотические направления многообразия (v) в точке A_0.

Если $\tau_g = 0$, то нормаль $A_0 A_2$ образует, вдоль кривой Γ, развёртывающуюся поверхность; в этом случае назовём Γ — линией кривизны 2-го рода; она удовлетворяет уравнению:

$$\varkappa dt + \Gamma_{23}^{\prime 1} \omega_0^3 = 0.$$

Интересно заметить, что на многообразии (v) (общий случай) линии кривизны 2-го рода, как и геодезические линии существуют для каждого направления $A_0 A_3$ локального конуса.

Если $\varkappa_{c_{31}} = 0$, то $A_0 A_3$ смещается параллельно в смысле Myller'a вдоль Γ (касающаяся к рёбру $A_0 A_1$); сеть, образованная из кривых, касающихся к $A_0 A_3$ и A_0 A_1 естественно назвать получебышевской сетью; она удовлетворяет уравнению:

$$dt + \Gamma_{31}^1 \omega_0^1 = 0.$$

Если $\varkappa_{p_{31}} = 0$, то $A_0 A_3$ является характеристической прямой касательной плоскости $A_0 A_3 A_1$ вдоль Γ (касающаяся к $A_0 A_1$), а потому направление $A_0 A_3$ будет односторонне сопряжённым с направлением $A_0 A_1$. В этом случае $\Gamma_{31}^{\prime 2} = 0$.

Подобным образом можно получить кривизны и кручения кривых и „сетей“, находящихся на многообразиях, описанных остальными рёбрами инвариантного репера многообразия (v). Ниже даём таблицу этих инвариантов; в первой колонне указываются некоторые характерные элементы соответствующего многообразия.

Эти формулы дают возможность интерпретировать 18 инвариантов $\Gamma_{ik}^{\prime j}$ с $i, j, \varkappa = 1, 2, 3$ $(i \neq j)$.

Имея введённым понятие нормальной кривизны допустимой кривой, нетрудно ввести и понятие главного направления к (v) и, с этим, и линии кривизны первого рода. Назовём главным направление $A_0 A_3$ локального конуса, для которого нормальная кравизны $\varkappa_n$ будет экстремальной, то-есть $\frac{d\varkappa_n}{dt} = 0$. Для многообразия (v) они даны значениями t удовлетворяющими уравнения:

$$\Gamma^{2}_{33,\,t} = 0. \tag{12}$$

Если (12) удовлетворяется тождественно, то-есть главные направления неопределённы, имеем первое обобщение многообразий Tzitzeik'н.

Из условий интегрируемости (11) следует, что в этом случае имеем и соотношение:

$$\Gamma'^{1}_{33} = \Gamma'^{2}_{13} + \Gamma'^{2}_{31}. \tag{13}$$

Характерные элементы многообразия	$\varkappa_{g_i}$	$\varkappa_{n_i}$	τ_{g_i}	$\varkappa_{c_{ij}}$	$\varkappa_{p_{ij}}$
a) ребро $A_0 A_3$ b) грань $A_0 A_3 A_1$ c) нормаль $A_0 A_2$ $i=3,\ j=1$	$-\Gamma'^{1}_{33} - \frac{dt}{\omega_0^3}$	Γ'^{2}_{33}	$\Gamma'^{1}_{23} + \varkappa \frac{dt}{\omega_0^3}$	$-\Gamma'^{1}_{31} - \frac{dt}{\omega_0^1}$	Γ'^{2}_{31}
a) $A_0 A_3$ b) $A_0 A_3 A_2$ c) $A_0 A_1$ $i=3,\ j=2$	Γ'^{2}_{33}	$-\Gamma'^{1}_{33} - \frac{dt}{\omega^3}$	$-\Gamma'^{2}_{13} - \frac{dt}{\omega_0^3}$	Γ'^{2}_{32}	$-\Gamma'^{1}_{32} - dt$
a) $A_0 A_1$, b) $A_0 A_1, A_3$ c) $A_0 A_2$, $i=1,\ j=3$	$\Gamma'^{3}_{11} + \varkappa \frac{dt}{\omega_0^1}$	$-\Gamma'^{2}_{11} - \frac{dt}{\omega_0^1}$	$-\Gamma'^{3}_{21} - \frac{dt}{\omega_0^1}$	$\Gamma'^{3}_{13} + \varkappa \frac{dt}{\overset{0}{3}}$	$-\Gamma'^{2}_{13} - \frac{dt}{\omega_0^3}$
a) $A_0 A_2$ b) $A_0 A_2 A_1$ c) $A_0 A_3$ $i=2,\ j=1$	$\Gamma'^{1}_{22} + \varkappa \frac{dt}{\omega_0^2}$	$-\Gamma'^{3}_{22} - \frac{dt}{\omega_0^2}$	$-\Gamma'^{1}_{32} - \frac{dt}{\omega_0^2}$	$\Gamma'^{1}_{21} + \varkappa \frac{dt}{\omega_0^1}$	$-\Gamma'^{3}_{21} - \frac{dt}{\omega_0^1}$
a) $A_0 A_2$ b) $A_0 A_2 A_3$ c) $A_0 A_1$ $i=2,\ j=3$	$-\Gamma'^{3}_{22} - \frac{dt}{\omega_0^2}$	$\Gamma'^{1}_{22} + \varkappa \frac{dt}{\omega_0^2}$	$\Gamma'^{3}_{12} + \varkappa \frac{dt}{\omega_0^2}$	$-\Gamma'^{3}_{23} - \frac{dt}{\omega_0^3}$	$\Gamma'^{1}_{23} + \varkappa \frac{dt}{\omega_0^3}$

§ 7. Приложения. a) *Комплекс прямых.* Если образующие локальных конусов многообразия (v) формируют комплекс прямых, то все допустимые кривые этого многообразия, касающиеся одной прямой комплекса в одной и той-же ёе точке, как известно, имеют общую соприкасающуюся плоскость — касающаяся локального конуса этого комплекса. Все допустимые кривые комплекса, будучи асимптотическими линиями многообразия (v_k) его локальных конусов, в этом случае удовлетворяется тождественно условие

$$\Gamma_{33}^{2} = 0.$$

Очевидно, что многообразия Tzitzeik'и охватывают многообразия (v_k). Из условий интегрируемости (11), применённых последовательно, следует, первым долгом, соотношение (13), а также следующие равенства:

(14) $$2(\Gamma_{13}^{1} + \Gamma_{31}^{1} - \Gamma_{11}^{2}) = \Gamma_{33}^{3} + \Gamma_{23}^{2} + \Gamma_{32}^{2},$$

(15) $$2\Gamma_{11}^{1} + \Gamma_{23}^{1} + \Gamma_{32}^{1} = \Gamma_{13}^{3} + \Gamma_{31}^{3} + \Gamma_{21}^{2} + \Gamma_{12}^{2},$$

(16) $$2\Gamma_{11}^{3} + \Gamma_{23}^{3} + \Gamma_{32}^{2} + \Gamma_{22}^{2} = 2(\Gamma_{21}^{1} + \Gamma_{12}^{1}) + \Gamma_{33}^{1},$$

(17) $$2(\Gamma_{11}^{2} - \Gamma_{21}^{3} - \Gamma_{12}^{3}) + 3(\Gamma_{13}^{1} + \Gamma_{31}^{1} - \Gamma_{12}^{3} - \Gamma_{21}^{3} - \Gamma_{33}^{3}) + 5\Gamma_{22}^{1} = 0.$$

Соотношения (13—17) уменьшают, очевидно, число независимых инвариантов комплекса прямых как многообразие (v_k) его локальных конусов. Интересно было бы сравнить эти инварианты с инвариантами комплекса как многообразие ∞^3 прямых проективного пространства.

в) *Характеристические линии. Случай голономии многообразия* (v). Характеристические линии многообразия (v) даны равенством:

$\varkappa_{p_{31}} + \varkappa_{p_{13}} = 0$, то-есть

(18) $$dt + (\Gamma_{13}^{2} - \Gamma_{31}^{2})\,\omega_0^3 = 0.$$

Инвариант $\tau = \Gamma_{31}^{2} - \Gamma_{13}^{2}$ следовало бы назвать кручением многообразия (v). Если $\tau = 0$, получаем случай голономного многообразия (v). Из (18) очевидно следует, что линии $dt = 0$, которые естественно назвать линиями тока, будут характеристическими линиями многообразия (v). Обратная теорема очевидно справедлива.

Если (v) голономно, то, применяя последовательно условия интегрируемости (11), получаем, как и в предыдущем случае, цепь простых соотношений между инвариантами:

(19) $$\Gamma_{13}^{2} - \Gamma_{31}^{2} = 0,$$

(20) $$\Gamma_{31}^{1} - \Gamma_{13}^{1} + \Gamma_{23}^{2} - \Gamma_{32}^{2} = 0.$$

(21) $$2(\Gamma_{32}^{1} - \Gamma_{23}^{1}) + \Gamma_{13}^{3} - \Gamma_{31}^{3} + \Gamma_{21}^{2} - \Gamma_{12}^{2} = 0,$$

(22) $$\varkappa_3 = 3(\Gamma_{23}^{3} - \Gamma_{32}^{3} + \Gamma_{12}^{1} - \Gamma_{21}^{1}).$$

Частный случай. Если кривизна $\varkappa$ локальных конусов равна нулю, скажем, что наше многообразие (w) состоит из конусов совпадения (coïncidence). Заметим, первым долгом, что в отличие от общего многообразия (v), у многообразия (w) число линий кривизны второго рода ($\Gamma_{23}^{1} = 0$) будет, как и в случае линейных многообразий, дискретно (вообще говоря — конечно).

Если многообразие конусов совпадения будет в то же время и голономным, то соотношения (19), (20), (21) остаются в силе и (22) будет, в данном случае:

$$\Gamma_{23}^{3} - \Gamma_{32}^{3} + \Gamma_{12}^{1} - \Gamma_{21}^{1} = 0; \tag{23}$$

применяя последовательно (11), получаем ещё равенства:

$$\Gamma_{13}^{3} - \Gamma_{31}^{3} + \Gamma_{21}^{2} - \Gamma_{12}^{2} = 0, \tag{24}$$

$$\Gamma_{21}^{3} - \Gamma_{12}^{3} = 0, \tag{25}$$

$$\Gamma_{32}^{1} - \Gamma_{23}^{1} = 0, \tag{26}$$

и с этим цепь закрывается.

Нам кажется, что представляло бы особый интерес исследовать более детально многообразия (w) конусов совпадения и его частичные случаи голономии ($\tau = 0$) и комплекса прямых ($\Gamma_{33}^{2} = 0$). Для (w) имеем все $\Gamma_{it}^{j} = 0$, кроме $\Gamma_{1t}^{2} = \Gamma_{2t}^{3} = \Gamma_{3t}^{1} = 1$. Следовало бы начать это исследование из выписки всех условий интегрируемости, рассмотрение которых могло бы указать на часть инвариантов конусов совпадения.

Замечание. Отметим, между прочим, как выразятся проективные обобщения некоторых задач S. Lie, предложенные им в конце своего знаменитого трактата (2).

а) многообразия (v), на которых характеристические линии будут в то-же время и геодезическими линиями, удовлетворяет соотношению:

$$\Gamma_{13}^{2} - \Gamma_{31}^{2} = \Gamma_{33}^{1}$$

и, конечно, всем его дифференциальным следствиям

в) многообразия (v), на которых характеристические линии будут в то-же време и линиями кривизны 2-го рода, характеризуются соотношением между инвариантами:

$$\varkappa(\Gamma_{13}^{2} - \Gamma_{31}^{2}) = \Gamma_{23}^{1}.$$

с) многообразия (v) на которых геодезические линии будут в то-же време и линиями кривизны 2-го рода, удовлетворяют соотношению:

$$\varkappa\Gamma_{33}^{1} - \Gamma_{23}^{1} = 0.$$

§ 8. Многообразия конусов второго порядка. Перейдем сейчас к одному из случаев, исключенных из общей теории многообразия квадратичных конусов (w_Q). Напомним, что присоединённый репер к образующей локального конуса второго порядка удовлетворял условиям: A_0 — вершина конуса, A_0A_3 — его образующая, A_0A_2 — фиксированная образующая этого конуса, а A_0A_1 находится на пересечении касательных плоскостей конуса вдоль A_0A_3 и A_0A_2. Единичную прямую A_0U выбираем так, чтобы уравнение конуса в локальных координатах было

$$(x^1)^2 - 2x^2x^3 = 0.$$

Эти реперы зависят от шести вторичных параметров. В данном случае условия интегрируемости (II) сводятся к:

$$\Gamma_{im,t}^{j} + \Gamma_{im}^{k}\Gamma_{kt}^{j} - \Gamma_{km}^{j}\Gamma_{it}^{k} - \Gamma_{ik}^{j}\Gamma_{mt}^{k} = 0, \tag{II'}$$

где Γ_{it}^{j} даны соотношениями (3″).

Отсюда выводится без особого труда, что часть инвариантов семейства присоединённых реперов будут и инвариантами локальных конусов нашего многообразия (w_Q). Отметим некоторые из этих инвариантов и именно линейные комбинации коэффициентов $\Gamma_{ik}^{\prime j}$:

$$\Gamma_{22}^{\prime 0}, \Gamma_{22}^{\prime 3}, \Gamma_{12}^{\prime 0}-\Gamma_{21}^{\prime 0}, \Gamma_{12}^{\prime 3}-\Gamma_{21}^{\prime 3}, \Gamma_{22}^{\prime 1}+\Gamma_{21}^{\prime 3}, \Gamma_{11}^{\prime 0}-\Gamma_{23}^{\prime 0}-\Gamma_{32}^{\prime 0}, \Gamma_{11}^{\prime 3}-\Gamma_{23}^{\prime 3}-\Gamma_{32}^{\prime 3}, \Gamma_{22}^{\prime 2}+\Gamma_{21}^{\prime 1}+\Gamma_{23}^{\prime 3},\ldots$$

Это обстоятельство побуждает присоединить проективный репер к локальному конусу взятому в целом. Таким образом, исследование многообразия конусов второго порядка можно будет свести к рассмотрению определённого линейного неголономного многообразия. Мы займёмся этим вопросом в следующих параграфах.

Из условий (3″) следует: $\dfrac{dA_2}{dt}=0, \dfrac{dA_3}{dt}=A_1, \dfrac{dA_1}{dt}=A_2.$

Интегрируя эти соотношения, приходим к:

$$A_2=A_2^0,\quad A_1=A_1^0+tA_2^0,\quad A_3=A_3^0+tA_1^0+\frac{t^2}{2}A_2^0.$$

Если обозничим через $\tilde{\omega}_i^j$ формы Пфаффа, соответсвующие малому смещению по отношению к реперу $A_0 A_i^0$ $(i=1, 2, 3)$, то имеет место:

$$dA_0=\tilde{\omega}_0^i A_i^0=\tilde{\omega}_0^i A_i,\quad dA_2^0=\tilde{\omega}_2^k A_k^0=\omega_2^l A_l,\quad dA_1^0=\tilde{\omega}_1^k A_k^0=\omega_1^l A_l+t\omega_2^m A_m,$$

$$dA_3^0=\tilde{\omega}_3^k A_k^0=\omega_3^l A_l+t\omega_1^m A_m+\frac{t^2}{2}\omega_2^n A_n.$$

Отсюда следует

$$\omega_0^0=\tilde{\omega}_0^0,\quad \omega_0^1=\tilde{\omega}_0^1+t\tilde{\omega}_0^3,\quad \omega_0^2=\tilde{\omega}_0^2+t\tilde{\omega}_0^1+\frac{t^2}{2}\tilde{\omega}_0^3,\quad \omega_0^3=\tilde{\omega}_0^3,$$

$$\omega_2^0=\tilde{\omega}_2^0,\quad \omega_2^1=\tilde{\omega}_2^1+t\tilde{\omega}_2^3,\quad \omega_2^2=\tilde{\omega}_2^2+t\tilde{\omega}_2^1+\frac{t^2}{2}\tilde{\omega}_2^3,\quad \omega_2^3=\tilde{\omega}_2^3,$$

$$\omega_1^0=\tilde{\omega}_1^0-t\tilde{\omega}_2^0,\quad \omega_1^1=\tilde{\omega}_1^1+t(\tilde{\omega}_1^3-\tilde{\omega}_2^1)-t^2\tilde{\omega}_2^3,$$

$$\omega_1^2=\tilde{\omega}_1^2-t\tilde{\omega}_2^2+t(\tilde{\omega}_1^1-t\tilde{\omega}_2^1)+\frac{t^2}{2}(\tilde{\omega}_1^3-t\omega_2^3),\quad \omega_1^3=\tilde{\omega}_1^3-t\tilde{\omega}_2^3$$

$$\omega_3^0=\tilde{\omega}_3^0-t\tilde{\omega}_1^0-\frac{t^2}{2}\tilde{\omega}_2^0,\quad \omega_3^1=\tilde{\omega}_3^1-t\tilde{\omega}_1^1+\frac{t^2}{2}\tilde{\omega}_2^1+t\left(\tilde{\omega}_3^3-t\tilde{\omega}_1^3+\frac{t^2}{2}\tilde{\omega}_2^3\right),$$

$$\omega_3^2=\tilde{\omega}_3^2-t\tilde{\omega}_1^2+\frac{t^2}{2}\tilde{\omega}_2^2+t\left(\tilde{\omega}_3^1-t\tilde{\omega}_1^1+\frac{t^2}{2}\tilde{\omega}_2^1\right)+\frac{t^2}{2}\left(\tilde{\omega}_3^3-t\tilde{\omega}_1^3+\frac{t^2}{2}\tilde{\omega}_2^3\right),$$

$$\omega_3^3=\tilde{\omega}_3^3-t\tilde{\omega}_1^3+\frac{t^2}{2}\tilde{\omega}_2^3.$$

§ 9. Замечательные линии на многообразии (w_Q) конусов второго порядка. Нормальная кривизна допустимой кривой моогообразия будучи:

$$\Gamma_{33}^{\prime 2}=\frac{1}{d\tau}[\omega_0^1\omega_0^2\omega_3^2],$$

в нашем случае, используя (27) и обозначая через $L_{ik}^j\tilde{\omega}_0^k=\tilde{\omega}_i^j$ имеем:

$$\Gamma'^2_{32}[\tilde{\omega}^1_0\tilde{\omega}^2_0\tilde{\omega}^3_0] = L^2_{33} + t(L^1_{33} - L^2_{13} - L^2_{31}) + t^2\left\{L^2_{11} - L^1_{31} - L^1_{13} + \frac{1}{2}(L^2_{33} + L^2_{32} + L^3_{33})\right\} +$$
$$+ t^3\left\{L^3_{12} + L^1_{11} + \frac{1}{2}(L^1_{23} - L^3_{13} - L^2_{12} - L^1_{32} - L^2_{21} - L^3_{31})\right\} +$$
$$+ \frac{t^4}{2}\left\{L^3_{11} - L^1_{21} - L^1_{12} + \frac{1}{2}(L^2_{22} + L^2_{32} + L^3_{23})\right\} + \frac{t^5}{2}\left\{-L^3_{21} + \frac{1}{2}(L^1_{22} - L^3_{12})\right\} + \frac{t^6}{8}L^2_{22}$$

Отсюда следует, что на каждом локальном конусе второго порядка существует вообще шесть асимптотических направлений и пять главных направлений. Если $\Gamma'^2_{33} = 0$ удовлетворяется тождественно, то, кроме соотношений (13), (14) и 15), имеем ещё:

$$(28') \quad 2\Gamma'^3_{11} + \Gamma'^3_{23} + \Gamma'^2_{32} + \Gamma'^2_{22} = 2(\Gamma'^1_{21} + \Gamma'^1_{12}), \quad \Gamma'^1_{22} = \Gamma'^3_{21} + \Gamma'^3_{12}, \quad \Gamma'^2_{22} = 0$$

и с этим замыкается цепь соотношений, которые удовлетворены в случае многообразия (w_Q) конусов второго порядка, образующие которого составляют комплекс прямых.

Заметим, между прочим, что в (28) все коэффициенты t — всего семь — аннулируются, и находим снова равенства (13—15) и (28′).

Число линий кривизны второго рода, на конусах многообразия (w_Q), как и на многообразиях конусов совпадения и на линейных многообразиях, проходящих через точку A_0, конечно. Они даны соотношением:

$$[\omega^1_2\omega^1_0\omega^2_0] = 0.$$

Используя (27), находим

$$(29) \qquad L^1_{23} + t(L^3_{23} - L^1_{21}) + t^2\left(\frac{1}{2}L^1_{22} - L^3_{21}\right) + \frac{t^3}{2}L^3_{22} = 0.$$

Итак, чрез каждую точку A_0 проходят три линии кривизны 2-го рода.

§ 10. Определение канонического репера локального конуса второго порядка. Исключая случай многообразия (w_Q), образующие конусов которого формируют комплекс прямых, выберем как $A_0A^0_2$ одно из асимптотических направлений локального конуса ($L^3_{22} = 0$), которое будет исполнять роль нормали для всех касательных плоскостей этого конуса. В этом случае остальные две касательные к линиям кривизны 2-го рода выберем как $A_0A^0_3$ ($L^1_{23} = 0$) и A_0U^0 (единичная прямая репера локального конуса; тогда: $L^3_{23} + \frac{1}{2}L^1_{22} = L^1_{21} + L^3_{21}$). Единичную прямую можно еще выбрать так, чтобы: $L^3_{23} - L^1_{21} = \sqrt{2}\left(L^3_{21} - \frac{1}{2}L^1_{22}\right)$, которое соответствует следующей интерпретации: $A_0A^0_3$ и A_0V, будут остальными двумя касательными к линиям кривизны 2-го рода; $A_0A^0_1$, будучи пересечением касательных плоскостей конуса вдоль $A_0A^0_2$ и $A_0A^0_3$, проводим плоскость

$A_0 A_1 V$, которая пересекает конус по $A_0 V'$. В этой плоскости выберем $A_0 U^0$ так, чтобы:

$$A_0[V, V';\ A_1, U^0] = -(1+\sqrt{2})^2.$$

Для дальнейшей фиксации репера исполняем в точности проделанное в § 4, которое определяет положение точек A_i^0 $(i = 1, 2, 3)$ и U^0 на рёбрах канонического репера. Коэффициенты L_{ij}^k удовлетворяют и соотношениям:

$$L_{12}^2 = L_{32}^2 = L_{21}^1 = L_{12}^1 + L_{22}^1 + L_{32}^1 - L_{22}^2 - 1 = 0. \tag{30}$$

Отметим, между прочим, что из условий интегрируемости (1) выводится следующее соотношение второй степени:

$$L_{22}^1(L_{31}^2 - L_{13}^2) + L_{21}^3 L_{33}^1 + L_{11}^1 L_{03}^0 + L_{23}^3 L_{31}^1 = 0.$$

Замечание. Для фиксации канонического репера, связанного с локальным квадратным конусом, одним из важнейших моментов, составляет выбор нормали $A_0 A_2^0$. Выше мы видели, что для многообразия (w_Q), которое не есть (v_k) (комплекс прямых), одно из шести асимптотических направлений мы выбрали нормально. Очевидно, что, если многообразие (ω_Q) будет комплексом прямых, эта возможность отпадает. Укажем другой способ выбора нормали $A_0 A_2^0$ в случае, когда многообразие (w_Q) н е г о л о н о м н о е. В этом случае, линии тока $(dt = 0)$ будут и характеристическими линиями только для направлений, удовлетворяющих уравнению:

$$\Gamma_{31}^2 - \Gamma_{13}^2 = 0.$$

Используя соотношения (27), получаем:

$$\left[\tilde\omega_3^2 + t(\tilde\omega_3^1 - \tilde\omega_1^2) + t^2\left(\frac{1}{2}\tilde\omega_2^2 - \tilde\omega_1^1 + \tilde\omega_3^3\right) + t^3\left(\frac{1}{2}\tilde\omega_2^1 - \frac{1}{2}\tilde\omega_1^3\right) + \frac{t^4}{4}\tilde\omega_2^3, \tilde\omega_0^2 + t\tilde\omega_0^1 + \frac{t^2}{2}\tilde\omega_0^3, \tilde\omega_0^3\right] =$$

$$= \left[\tilde\omega_1^2 + t(\tilde\omega_1^1 - \tilde\omega_2^2) + t^2\left(\frac{1}{2}\tilde\omega_1^3 - \tilde\omega_1^2\right) - \frac{t^3}{2}\tilde\omega_2^3,\ \tilde\omega_0^1 + t\tilde\omega_0^3,\ \tilde\omega_0^2 + t\tilde\omega_0^1 + \frac{t^2}{2}\tilde\omega_0^3\right],$$

которое даёт шесть направлений на каждом конусе; одно из этих направлений можно выбрать как нормаль $A_0 A_2^0$ для всех касательных плоскостей локального конуса второго порядка. Далее применяется вышеуказанный способ.

§ 11. Многообразия (w_Q) Tzitzeik'и. Если на многообразии (w_Q) линии кривизны 2-го рода неопределены, то, как следует из (29), имеем:

$$L_{23}^1 = L_{22}^3 = L_{23}^3 = L_{21}^1 = 0,\ L_{22}^1 = 2L_{21}^3. \tag{31}$$

Конус Malus'а для направления нормали будет:

$$\tilde\omega_0^1 L_{2j}^3 \tilde\omega_0^j - \tilde\omega_0^3 L_{2j}^1 \tilde\omega_0^j = 0.$$

В силу соотношений (30) и (31) это уравнение сводится к:

$$L_{21}^3[(x_1)^2 - 2x^2 x^3] = 0.$$

Итак, если $L_{21}^3 \neq 0$, конус Malus'a совпадает с локальным конусом второго порядка многообразия (w_Q).

Обратно: присоединяя к локальным конусам многообразия (w_Q) канонический репер $A_0 A_i^0$ $(i = 1, 2, 3)$, конус Malus'a направления $A_0 A_2$ имеет уравнение

$$L_{21}^3 [(x^1)^2 - 2x^2 x^3] + L_{23}^3 (x^1 + 2x^2) x^3 = 0.$$

Он совпадает с локальным конусом многообразия, если $L_{23}^3 = 0$, $L_{21}^3 \neq 0$. Но, в этом случае, линии кривизны 2-го рода неопределены, то-есть (w_Q) будет многообразием Tzitzeik'и конусов второго порядка. Отметим, между прочим, что условия интегрируемости приводят и к соотношениям:

$$2L_{11}^3 + L_{32}^1 = 0, \quad L_{33}^1 = 2(L_{13}^2 + L_{23}^2 - L_{31}^2).$$

Было бы интересно рассмотреть многообразия (w_Q) Tzitzeik,и, для которых и линии кривизны первого рода неопределены, а также несколько более ограниченный случай, когда образующие конусов многообразия (w_Q) Tzitzeik'и составляют комплекс прямых.

§ 12. Линейные многообразия. Линейные неголономные многообразия трёхмерного проективного пространства были исследованы за последние тридцать лет многими геометрами, начиная с Al. Pantazi, E. Bompiani, E. Bortolotti и т. д., поэтому мы ограничимся здесь лишь некоторыми замечаниями, указывая, между прочим, на вывод всех проективных инвариантов этого многообразия.

В этом случае, условия интегрируемости (11), имея в виду (3''), сводятся к:

$$\Gamma_{im,t}^j = \Gamma_{i1}^j \Gamma_{mt}^1 + \Gamma_{it}^1 \Gamma_{1m}^j - \Gamma_{im}^3 \Gamma_{3t}^j.$$

Различим здесь случаи i, m равны или $\neq 3$ и j равен или $\neq 1$, когда часть членов этого равенства исчезает. Из этих уравнений можно вывести, чисто алгебраическим путём, инварианты линейного многообразия (w_L); в этом смысле отмечаем инварианты многообразия:

$$\Gamma_{im}^j, \text{ где } i, m \neq 3, \ j \neq 1;$$

$$\Gamma_{i1}^3 - \Gamma_{3i}^1, \text{ где } i = 0, 2, 3.$$

Исключая случай, когда (w_L) вырождается в линейный комплекс, известно, что выбор репера, присоединённого к касательной плоскости (w_L) в A_0, будет состоять из: $A_0 A_i^0$ $(i = 1, 3)$ будут асимптотическими направлениями многообразия (w_L); $A_0 A_2^0$ — проективная нормаль (w_L), введенная Enea Bortolotti.* Нам кажется, что целесообразно было бы выбрать единичной прямой $A_0 U^0$ одну из общих образующих конусов Malus'a соответствующих двум асимптотическим направлениям. Что касается выбора точек A_i^0 $(i = 1, 2, 3)$ и U^0, то оне определятся способом, указанным выше (§ 4).

* Эта нормаль находится на пересечении полярных плоскостей каждого асимптотического направления по отношению к конусу Malus'a, соответсвующего другому асимптотическому направлению.

Для связи канонического репера многообразия (w_L), только что вполне определённого, с репером, присоединённым образующей g из касательной плоскости, проинтегрируем систему:

$$\frac{dA_3}{dt} = A_1, \quad \frac{dA_1}{dt} = \frac{dA_2}{dt} = 0$$

и имеем: $A_1 = A_2^0, \quad A_2 = A_2^0, \quad A_3 = A_3^0 + tA_1^0$.

Обозначив через $\tilde{\omega}_i^j$ формы Пфаффа по отношению к реперу $A_0 A_i^0$ имеем

$$\omega_i^j = \tilde{\omega}_i^j \ (i=0,\ 1,\ 2;\ j=0,\ 2,\ 3); \quad \omega_i^1 = \tilde{\omega}_i^1 - t\tilde{\omega}_i^3 \ (i = 0,\ 1,\ 2);$$

$$\omega_3^j = \tilde{\omega}_3^j + t\tilde{\omega}_1^j \ (j = 0,\ 2,\ 3); \qquad \omega_3^1 = \tilde{\omega}_3^1 + t(\tilde{\omega}_1^1 - \tilde{\omega}_3^3) - t^2\tilde{\omega}_1^3.$$

Обозначая через $L_{ik}^j \tilde{\omega}_0^k = \tilde{\omega}_i^j$, для установленного выше канонического репера должны быть выполнены соотношения:

$$L_{11}^2 = L_{33}^2 = L_{32}^2 = L_{13}^3 = L_{31}^3 = L_{21}^1 = 0,$$

$$L_{11}^3 + L_{12}^3 = L_{13}^2, \ L_{33}^1 + L_{32}^1 = L_{31}^2, \ L_{12}^1 + L_{22}^1 + L_{32}^1 = 1 + L_{22}^2,$$

а из условий интегрируемости (1) получаем ещё соотношения:

$$L_{13}^2(L_{12}^3 - L_{21}^3) + L_{12}^3 L_{31}^2 - L_{11}^3 L_{32}^2 = 0,$$

$$L_{31}^2(L_{23}^1 - L_{32}^1) + L_{33}^3 L_{32}^2 - L_{32}^1 L_{13}^2 = 0.$$

Отсюда следует, что число независимых инвариантов многообразия (w_L) не превышает 23. Остальные независимые коэффициенты L_{ij}^k составляют полную систему инвариантов этого многообразия.

Линейные многообразия Tzitzeik'и. Как и в предыдущем параграфе, эти многообразия характеризуются тем, что на них линии кривизны 2-го рода неопределены. Так как:

$$\tau_g = \frac{1}{d\tau}[\omega_0^1 \omega_0^2 \omega_2^1] = \frac{1}{d\tau}[\tilde{\omega}_0^1 - t\tilde{\omega}_0^3, \tilde{\omega}_0^2, \tilde{\omega}_2^1 - t\tilde{\omega}_2^3] = 0,$$

получаем:

$$L_{23}^1 + (L_{21}^1 - L_{23}^3)t - L_{21}^3 t^2 = 0.$$

Отсюда имеем:

(32) $$L_{23}^1 = L_{21}^3 = L_{21}^1 - L_{23}^3 = 0$$

Из этих условий следует, что многообразия (w_L) Tzitzeik'и обладают следующими свойствами: направление $A_0 A_2$ односторонне сопряжено с рёбрами $A_0 A_1$ и $A_0 A_2$ на неголономных (w_L), касающихся плоскостям $A_0 A_2 A_1$ и $A_0 A_2 A_3$. На этих же многообразиях $A_0 A_2$ имеет равные чебышевские кривизны по отношению к $A_0 A_1$ и $A_0 A_3$ соответственно.

Частный случай. Насколько нам известно, только частный случай этих многообразий был исследован T. Mihăilescu (3) и был назван неголономным многообразием типа Tzitzeik'и—Wilczynsk'ого. В наших обозначениях этот класс удовлетворяет, кроме соотношений (32), ещё и равенствам: $L^1_{22} = L^3_{22} = 0$, а это указывает на то, что проективные нормали $A_0 A_2$ во всех точках этого многообразия образуют конгруэнцию прямых. Получаем таким образом проективный аналог изотропной конгруэнции прямых. В общем случае многообразия (w_L) Tzitzeik'и, указанного нами, кривые линии, касающиеся проективной нормали $A_0 A_2$ этих многообразий образуют проективный аналог изотропной конгруэнции линий, исследованной впервые Levi—Civita в эвклидовом пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gheorghiev Gh. et Popa I. — Géométrie différentielle des variétés de cônes. Comptes R. de l'Acad. des Sciences, Paris, T. 251 (1960), p. 1208—1210, 1268—1269.
2. Lie S. & Scheffers G. — Geometrie der Berührungstransformationen. I. B. Teubner, Leipzig, 1896.
3. Mihăilescu, T. —Varietăţi neolonome de tip Ţiţeica—Wilczynski. Studii şi cercetări matematice, Acad. R. P. Romine, t. VI (1955), p. 175—192.

ПРОЕКТИВНО-ДИФЕРЕНЦИАЛНА ГЕОМЕТРИЯ НА МНОГООБРАЗИЯТА ОТ КОНУСИ В ПРОСТРАНСТВОТО С ТРИ ИЗМЕРЕНИЯ

Г. Георгиев и И. Попа

РЕЗЮМЕ

Геометрията на многообразия от конуси в Евклидовата геометрия е била изследвана от редица автори, след началните работи на Софус Ли. Изучаването на същите многообразия в афинната геометрия е било започнато от съветския геометър Вагнер и от един от авторите на настоящата статия.

В тази работа, като използуват метода на Картан, авторите изучават многообразията от конуси в проективното пространство. Като присъединяват към всяка образуваща на локалния конус един инвариантен репер, те намират условията за интегруемост от типа Гаус—Петерсен—Кодаци и инвариантите на многообразията, като показват, че максималният брой на тези инварианти е 32. За геометрическата интерпретация се използува обобщението на поляритета на Пантаци—Бонпиани, известна за линейните нехолономни многообразия, а също така обобщението на адюнктната точка на Вос и паралелизмът в смисъл на Милер. Това последно понятие им дава възможност да въведат определени величини, представляващи обобщение на нормална кривина, на геодезична кривина и кривина на паралелността на коя да е мрежа от конуси. Изучава се и частният случай на многообразия от конуси, образуващите на които са комплекси от прави.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE DES VARIÉTÉS DE CÔNES DE L'ESPACE À TROIS DIMENSIONS

Gh. Gheorgiev (Jassy) et I. Popa (Jassy)

RÉSUMÉ

La géométrie des variétés de cônes de l'espace euclidéen à fait l'objet des recherches de nombreux auteurs, en commençant avec Sophus Lie; l'étude des mêmes variétés dans l' espace affine a été abordée par le géomètre soviétique V. Wagner et par l'un de nous deux.

Dans le présent travail, en utilisant la méthode de E. Cartan, nous étudions les variétés de cônes de l'espace projectif. En attachant, à chaque génératrice du cône local, un répère invariant, nous établissons les conditions d'admissibilité du type Gauss—Peterson—Codazzi et les invariants de la variété, en montrant que le nombre maximum de ces invariants est 32. Pour avoir des interprétations géométriques tant du repère que des invariants, nous avons donné des extensions de la polarité Pantazi—Bompiani et de la concurrence Voss—Myller. Cette dernière notion nous a permis l'introduction de certaines grandeurs, extensions des courbures normale, géodésique, de parallélisme et celle de Tschebycheff ou de la torsion géodésique d'une courbe ou d'un réseau de la variété. A l'aide de ces grandeurs, nous avons introduit — d'une manière semblable à celle de la géométrie classique — des lignes ou réseaux remarquables de la variété de cônes. L'holonomie, dans le cas des variétés de cônes, se réduit à l'holonomie des variétés linéaires tangentes. Nous étudions ensuite la variété de cônes se réduisant à des complexes de droites, en déterminant le système complet des invariants.

L'étude de la variété linéaire et de celle de cônes quadratiques — cas d'exception de la méthode du repère mobile — fait l'objet des deux derniers paragraphes. Pour ces cas, nous donnons une extension tout à fait naturelle de la „sphère non-holonome“ — variété linéaire ou quadratique de Tzitzeika — en présentant quelques-unes de ses propriétés.