БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ ТОМ VI

ВЪРХУ УСИЛЕНИЯ ЗАКОН ЗА ГОЛЕМИТЕ ЧИСЛА

Апостол Обретенов

Редицата от случайни величини

(1) $$\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots\ \eta_n,$$

се нарича усилено устойчива, ако съществуват константи $\{a_k\}_1^\infty$ такива, че да имаме

(2) $$P\{(\eta_n - a_n) \to 0)\} = 1.$$

В случай, когато (2) е изпълнено, лесно се вижда, че $a_n - m\eta_n \to 0$, където $m\eta_n$ е медианата на η_n, и следователно

(2′) $$P\{(\eta_n - m\eta_n) \to 0\} = 1.$$

В настоящата работа ще разгледаме случая, когато $\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$, където $\xi_k, k=1, 2, \ldots, n, \ldots$ са независими случайни величини, имащи функции на разпределение $F_k(x)$, за които

$$M|\xi_k| = \int_{-\infty}^{\infty}|x|dF_k(x) < +\infty.$$

В този случай, когато (2′) е изпълнено и $m\eta_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k \to 0$, казваме, че редицата $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ е нормално усилено устойчива (или че редицата $\{\xi_k\}$ се подчинява на нормалния усилен закон за големите числа). Едно достатъчно условие за нормална усилена устойчивост е редът $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D\xi_k}{k^2}$ да е сходящ. Това условие, станало вече класическо, е дадено от А. Н. Колмогоров. То обаче изисква съществуването на дисперсиите

$$D\xi_k = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M\xi_k)^2 dF_k(x).$$

Тук ще установим едно по-общо достатъчно условие, при което няма да се иска съществуването на моментна характеристика от какъвто и да е порядък. Това условие ще ни даде възможност да установим някои твърдения относно усилената устойчивост на една редица от независими случайни величини.

Да предположим, че независимите случайни величини $\{\xi_k\}_1^\infty$ имат крайни първи моменти $M\xi_k$, $k=1, 2, \quad n\ldots$ Ще докажем следната

Теорема 1. *Ако редът*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{k^2+x^2}\,dF\,(x+M\xi_k) \tag{3}$$

е сходящ, то редицата (1) *е усилено устойчива.*

Доказателство. Въвеждаме случайните величини

$$\chi_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k>2^{n-1}}^{2^n}\xi_k', \quad \text{където } \chi_0=\xi_1', \quad \xi_k'=\xi_k-M\xi_k,$$

и посредством χ_n определяме величините $\eta_{n,k}$ така:

$$\eta_{n,k}=\begin{cases}\dfrac{\xi_k'}{n}, & \text{ако } \dfrac{|\xi_k'|}{n}\leqq 1\\[2mm] 0, & \text{ако } \dfrac{|\xi_k'|}{n}>1\end{cases} \qquad 1\leqq k\leqq n$$

и

$$\overline{\chi}_n=\sum_{k>2^{n-1}}^{2^n}\eta_{2^n,k}.$$

Да означим с G_n събитието $\chi_n=\overline{\chi}_n$, а с $\overline{G}_n$ противоположното му. Тогава при произволно $\varepsilon>0$ ще имаме

$$P(|\chi_n-M\overline{\chi}_n|\geqq\varepsilon)=P(G_n)P(|\overline{\chi}_n-M\chi_n|\geqq\varepsilon/G_n) \tag{4}$$
$$+P(\overline{G}_n)P(|\chi_n-M\overline{\chi}_n|\geqq\varepsilon/\overline{G}_n)\leqq P(G_n)P(|\chi_n-M\overline{\chi}_n|\geqq\varepsilon/G_n)+P(\overline{G}_n).$$

Ако $F_{nk}(x)$ е функцията на разпределение на ξ_k'/n, то за вероятността $P(\overline{G}_n)$ имаме следната оценка:

$$P(\overline{G}_n\leqq\sum_{k>2^{n-1}}^{2^n}\int_{|x|>1}dF_{2^nk}(x). \tag{5}$$

От друга страна,

$$P(G_n P(|\chi_n-M\overline{\chi}_n|\geqq\varepsilon/G_n)\leqq P(|\overline{\chi}_n-M\overline{\chi}\quad\geqq\varepsilon) \tag{6}$$

и по неравенството на Чебишев ще получим

$$P(|\overline{\chi}_n-M\overline{\chi}_n|\geqq\varepsilon)\leqq\frac{1}{\varepsilon^2}D\overline{\chi}_n=\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k>2^{n-1}}^{n}D\eta_{2^n,k} \tag{6'}$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k>2^{n-1}}^{2^n} \int_{|x|\leq 1} x^2 dF_{2^n k}(x).$$

Неравенствата (5), (6) и (6′) заедно с (4) дават при $\varepsilon \leq 1$

$$(7) \quad P(|\chi_n - M\chi_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \left\{ \sum_{k>2^{n-1}}^{2^n} \left[\int_{|x|\leq 1} x^2 dF_{2^n k}(x + \int_{|x|>1} dF_{2^n k}(x) \right] \right\}$$

$$\leq \frac{2}{\varepsilon^2} \sum_{k>2^{n}-1}^{2^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{2^n k} = \frac{2}{\varepsilon^2} \sum_{k>2^{n}-1}^{2^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{2^{2n}+x^2} dF_k(x+M\xi_k).$$

Тъй като

$$\sum_{k>2^{n}-1}^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{2^{2n}+x^2} dF_k(x+M\xi_k) < \sum_{k>2^{n}-1}^{2^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{k^2+x^2} dF_k(x+M\xi_k),$$

то от условието (3) и неравенствата (7) следва, че редът $\Sigma P(|\chi_n - M\chi_n| \geq \varepsilon)$ е сходящ. От тази сходимост и по известната лема на Борел-Кантели заключаваме, че редицата $\{\chi_n\}$ е усилено устойчива. Но това е достатъчно за усилената устойчивост и на редицата $\{\eta_n\}$, тъй като съгласно един резултат на Ю. В. Прохоров [1] редиците $\{\chi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ са едновременно усилено устойчиви.

Да отбележим, че при горното доказателство не се използува съществено съществуването на $M\xi_k$ и тя може да се формулира така, че условието (3) да бъде заменено с условието

$$(3') \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{k^2+x^2} dF_k(x+m\xi_k) < +\infty.$$

Изискването $M|\xi_k| < +\infty$ поставихме за улеснение при извода на следващите твърдения.

Аналогично на горното разглеждане можем да направим и за фамилии от редици случайни величини. Нека $\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^{\infty}, \theta \in \Theta$ е фамилия от редици случайни величини, за които при всяко фиксирано $\theta_0 \in \Theta$ величините $\{\xi_k(\theta_0)\}$ са независими и $M|\xi_k(\theta)|$ е крайно за всяко $\theta \in \Theta$ и за всяко $k=1, 2, \ldots, n, \ldots$ Тогава имаме следното твърдение.

Теорема 2. *От равномерната сходимост относно θ на реда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[x-M\xi_k(\theta)]^2}{k^2+[x-M\xi_k(\theta)]^2} d_x F_k(x, \theta)$$

следва

$$(2'')\qquad P\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\theta)-m\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\theta)\to 0\right]=1,$$

равномерно относно* θ.

Доказателство. По същия начин, както при доказателството на теорема 1, намираме, че за всяко $\theta\in\Theta$

$$(8)\qquad P\{|\chi_n(\theta)-\overline{M}\chi_n(\theta)|\geqq\varepsilon \text{ за всички } n\geqq N(\varepsilon)\}=0.$$

От (8) по лемата на Борел ($\chi_n(\theta)$ са независими), като предварително заменим** $\overline{M}\chi_n(\theta)$ с $m\chi_n(\theta)$, следва

$$(8')\qquad \sum_{n=1}^{\infty}P(|\chi_n(\theta)-m\chi_n(\theta)|\geqq\varepsilon)<+\infty,$$

равномерно относно θ.

Остава да установим, че от (8′) следва равномерността на (2″). За тази цел ще използуваме начина, употребен от Ю. В. Прохоров в [1].

Нека

$$\chi_n^s(\theta)=\frac{1}{2^n}\sum_{k>2^n}^{s}\xi_k(\theta),\qquad 2^n<s\leqq 2^{n+1}.$$

От неравенството на Колмогоров (вж. [1])

$$P\{\max_{2^n<s\leqq 2^{n+1}}|\chi_n^s-m\chi_n^s|>2\varepsilon\}\leqq 4P(|\chi_n(\theta)-m\chi_n(\theta)|>\varepsilon)$$

и от равномерната сходимост на (8′) следва равномерната сходимост относно θ на реда

$$(9)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}P\{\max_{2^n<s\leqq 2^{n+1}}|\chi_n^s-m\chi_n^s|>2\varepsilon\}<+\infty.$$

* Релацията $P(E_n(\theta)\to 0)=1$ (или 0) и е в сила равномерно относно θ, ако $\lim\limits_{N\to\infty}P\left\{\bigcup\limits_{n>N}(|E_n(\theta)|>\varepsilon)\right\}=0$ (или 1), което изискване е изпълнено, ако $\sum\limits_{n\geqq N}P(|E_n(\theta)|\geqq\varepsilon)\to 0$, равномерно относно θ.

** Тази замяна запазва равномерността на (8). Действително от $P(|\chi_n(\theta)-\overline{M}\chi_n(\theta)|<1)\to 1$ равномерно относно θ, и от неравенството

$$P(|\chi_n(\theta)-\overline{M}\chi_n(\theta)|<\varepsilon)\leqq\max\{1/2,\ P(|\chi_n(\theta)-m\chi_n(\theta)|<2\varepsilon\}$$

следва $P(|\chi_n(\theta)-m\chi_n(\theta)<2\varepsilon)\to 1$, равномерно относно θ.

Да положим

$$A_n(\theta)=\left(\frac{m\chi_0}{2^{k_n}}+\frac{m\chi_1}{2^{k_n}}2+\dots+\frac{m\chi_{k_n}^{-1}}{2^{k_n}}2^{k_n-1}+m\chi_{k_n}^n\right)\frac{2^{k_n}}{n},$$

където $k_n=\left[\frac{\ln n}{\ln 2}\right]$.

Ако $\varepsilon>0$ е произволно, то от (8′) при $\nu\geqq\nu_0(\varepsilon)$ и за всяко θ имаме $|\chi_\nu-m\chi_\nu|\leqq\varepsilon$. От друга страна, от (9) следва неравенството $\max\limits_n|\chi_{k_n}^n-m\chi_{k_n}^n|\leqq\varepsilon$ при $k_n\geqq k_n^0(\varepsilon)$, независимо от θ. Тогава от неравенството

$$R_n=\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\xi_k(\theta)-A_n(\theta)\right|\leqq\left|\chi_0-m\chi_0\right|\frac{1}{2^{k_n}}+|\chi_1-m\chi_1|\frac{1}{2^{k_n-1}}$$

$$+\dots+\left|\chi_{k_n}^n-m\chi_{k_n}^n\right|$$

за $k_n\geq\max(\nu_0,\ k_n^0)$ следва

$$R_n\leqq|\chi_0-m\chi_0|\frac{1}{2^{k_n}}+|\chi_1-m\chi_1|\frac{1}{2^{k_n-1}}$$

$$+\dots+\left|\chi_{\nu_0-1}-m\chi_{\nu_0-1}\right|\frac{1}{2^{k_n-\nu_0+1}}+\varepsilon\left(\frac{1}{2^{k_n-\nu_0}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2^{k_n-\nu_0-1}}+\dots+1\right),$$

откъдето получаваме (2″).

При условията на теорема 1 се твърди само, че редицата (1) е усилено устойчива. Устойчивостта би била и нормална, ако имахме

$$m\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\xi_k\right)-M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\xi_k\right)\to 0. \tag{10}$$

Така че не е излишно да видим при какви условия, наложени на величините ξ_k, е изпълнено (10).

Лема 1. *Ако $\xi_1,\xi_2,\ \dots,\xi_n,\dots$ са независими и еднакво разпределени случайни величини с функция на разпределение $F(x)$, имаща краен първи момент, то*

$$\lim_{n\to\infty} mS_n=\int_{-\infty}^{\infty}xdF(x),\ \textit{където}\ S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\xi_k.$$

Наистина нека $\varphi(t)$ е характеристичната функция на ξ_k, а $\varphi_n(t)$ тази на S_n. Поради съществуването на първия момент имаме представянето

$$\varphi_n(t)=\varphi^n\left(\frac{t}{n}\right)=\left[1+\frac{it}{n}M\xi+o\left(\frac{}{n}\right)\right]^n$$

Оттук намираме

$$\lim_{n\to\infty} \lg \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \left[itM\xi + no\left(\frac{t}{n}\right) + no\left(\frac{t^2}{n^2}\right)\right] = itM\xi,$$

т. е. разпределението на S_n клони към несобственото разпределение в точката $M\xi$. Следователно за достатъчно големи стойности на n ще имаме $M\xi-\delta \leqq mS_n \leqq M\xi+\delta$ за произволно $\delta>0$.

Лема 2. *Ако $\{\xi_k\}$ са независими случайни величини с крайни дисперсии и редът*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{D\xi_k}{k^2} \tag{11}$$

е сходящ, то (10) е изпълнено.

Наистина от дефиницията на медианата и от неравенството на Чебишев намираме

$$mS_n - MS_n \leqq \sqrt{\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\xi_k}\,.$$

Но тъй като от (11) с прилагане лемата на Кронекер* следва

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\xi_k \to 0, \text{ ясно е, че } mS_n - MS_n \to 0.$$

Ще направим някои приложения на доказаните твърдения.

Теорема 3. *Нека случайните величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ са независими и $F_k(x)$ са съответните им функции на разпределение. Ако функциите*

$$\Phi(x) - F_k(x+M\xi_k),\ k=1,\ 2, \ldots \tag{12}$$

са монотонно растящи, където $\Phi(x)$ е монотонна функция, за която

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, d\Phi(x) < +\infty$$

то редицата (1) е усилено устойчива.

Доказателство. Достатъчно е да покажем, че при горните условия е изпълнено (3). От дефиницията на Стилтесовия интеграл, като вземем пред вид, че $\frac{x^2}{2^{2n}+x^2} \geqq 0$, и от условието (12) получаваме

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{2^{2n}+x^2}\, dF_k'(x) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{2^{2n}+x^2}\, d\Phi(x),\ F_k'(x) = F_k(x+M\xi_k).$$

---

* Ако $\Sigma x_n < +\infty$, $b_n \uparrow$, то $\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k x_k \to 0$.

Така за a_n следва оценката

$$a_n = \sum_{k>2^{n-1}}^{2^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{2^{2n}+x^2}\, dF_k'(x) \leq 2^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{2^{2n}+x^2}\, d\Phi(x),$$

откъдето ще имаме

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \sum_{n=1}^{N} \frac{2^{n-1}}{2^{2n}+x^2}\, d\Phi(x). \tag{13}$$

Неравенството (13), като използуваме, че

$$\sum_{k=2}^{2^N} \frac{1}{k^2+x^2} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{2^{n-1}}{2^{2n}+x^2},$$

ни дава

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{k=2}^{2^N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{k^2+x^2}\, d\Phi(x) \leq \int_{2}^{2^N} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{y^2+x^2}\, d\Phi(x)\right] dy \tag{13'}$$

$$= \lg 2 \int_{1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2^y x^2}{2^{2y}+x^2}\, d\Phi(x)dy < \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2^y x^2}{2^{2y}+x^2}\, d\Phi(x)dy.$$

От (13′), понеже

$$\frac{2^y x^2}{2^{2y}+x^2} \leq \frac{|x|}{2} \quad \text{и} \quad \int_{0}^{\infty} \frac{2^y x^2}{2^{2y}+x^2}\, dy < \pi |x|,$$

чрез смяна на реда на интегрирането получаваме

$$\sum_{n=1}^{N} a_n < \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, d\Phi(x),$$

откъдето следва

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

Очевидно е, че ако случайните величини $\{\xi_k\}$ са еднакво разпределени и $M|\xi_k| = \int |x|\, dF < +\infty$, то условието (12) ще е изпълнено. Следователно редицата (1) е усилено устойчива, при това нормално, в което се убеждаваме, като вземем под внимание лема 1. Така получаваме, че:

Необходимото и достатъчно условие редицата от независими и еднакво разпределени случайни величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ да е усилено (нормално) устойчива е съществуването на първия момент. Този резултат е получен от А. Н. Колмогоров.

Ако случайните величини $\{\xi_k\}$ имат крайни дисперсии, то от изискването

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D\xi_k}{k^2} < +\infty \tag{11}$$

понеже

$$M\frac{(\xi_k - M\xi_k)^2}{k^2+(\xi_k - M\xi_k)^2} \leq \frac{D\xi_k}{k^2},$$

следва, че (3) е изпълнено. Следователно редицата (1) е усилено устойчива, ако е изпълнено условието (11). При това устойчивостта е нормална, което се осигурява от лема 2.

Накрая посредством теорема 2 ще установим един резултат, принадлежащ на К. Л. Чънг [2]. А именно

Ако за всяко положително ε *съществува константа* A, *зависеща само от* ε, *така че*

$$\int\limits_{|x|>A} |x| d_x F(x,\theta) < \varepsilon, \tag{14}$$

то релацията

$$P\left\{\frac{1}{n} S_n(\theta) - m\frac{1}{n} S_n(\theta) \to 0\right\} = 1 \tag{15}$$

е изпълнена равномерно относно θ.

Действително да положим

$$a_n(\theta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^2}{2^n + x^2} dF(x,\theta)$$

и

$$r_N(\theta) = \sum_{n \geq N}^{\infty} a_n(\theta).$$

Лесно се получава, че

$$r_N(\theta) < \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{2^N}{|x|}\right) dF(x,\theta).$$

Нека сега ε е произволно положително число и A е константа, за която е в сила (14). Тогава за достатъчно големи стойности на N (зависещи само от ε) е изпълнено неравенството

$$r_N(\theta) < \varepsilon \int\limits_{|x| \leq A} dF(x,\theta) + \pi \int\limits_{|x|>A} |x| dF(x,\theta) < \varepsilon(\pi + 1).$$

Следователно редът $\Sigma a_n(\theta)$ е равномерно сходящ относно θ, откъдето следва равномерността и на (15).

Постъпила на 11. X. 1958 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прохоров Ю. В. Об усиленном законе больших чисел. *Известия АН СССР, Сер. мат.* **14** (1950), 523—536.
2. Chung K. L. The Strong Law of Great Numbers. *Proceedings of the Second Berkeley Symp.* (1951), p. 341—352.

ОБ УСИЛЕННОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

А. Обретенов

(Резюме)

В работе доказывается, что условие (3) достаточно для того, чтобы последовательность $\eta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ была усиленно устойчивой, где ξ_k, $k=1, 2, \ldots, n, \ldots$ независимые случайные величины. Подобное условие (3′) формулируется и для величин, зависящих от параметра.

В качестве приложения выводится достаточность условия (12) теорема 3) и один результат К. Л. Чжуна [2].

SUR LA LOI FORTE DES GRANDS NOMBRES

A. Obretenov

(Résumé)

Dans cette note l'auteur démontre que la condition (3) est suffisante pour que la suite $\eta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ soit asusjettie à la loi forte des grands nombres, où ξ_k, $k=1, 2, \ldots, n\ldots$ sont des variables aléatoires indépendantes. Une condition analogue (3′) est donnée aussi pour les variables aléatoires dépendantes d'un paramètre.

Comme application on déduit la suffisance de la condition (12) (voir le théorème (3)), ainsi qu'un résultat de K. L. Chung [2].