БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ ТОМ VI

ε-ЕНТРОПИЯ И ε-КАПАЦИТЕТ НА ПРОСТРАНСТВОТО ОТ НЕПРЕКЪСНАТИТЕ ФУНКЦИИ

Бл. Сендов и Б. Пенков

В настоящата работа се дават оценки за ε-ентропията и ε-капацитета на пространството F_D и пространството C_Δ^M ($C_\Delta^M \subset F_D$) на положителните и непрекъснати функции, дефинирани в интервала $\Delta=[a, b]$ и ограничени отгоре с константата $M>0$. § 0 е уводен и съдържа необходимите за по-нататъшното изложение дефиниции и означения; в § 1 се разглежда метриката r_Δ в F_D; в § 2 се дават оценки за ε-ентропията и ε-капацитета на F_D и C_Δ^M спрямо тази метрика и в § 3 се разглеждат метриката r_ε, както и ε-ентропията и ε-капацитетът на C_Δ^M спрямо нея.

Кратко изложение на резултатите, получени в настоящата работа (без доказателства), се съдържа в [1].

Авторите считат за свой приятен дълг да благодарят тук на А. Н. Колмогоров за вниманието, оказано от него към тази работа.

§ 0

Както знаем [2], ентропия на една крайна съвкупност A, съдържаща n елемента, наричаме числото $H(A)=\log n$*. То ни дава възможност да определим колко разреда трябва да съдържа най-икономичното двоично кодиране на елементите на A [3, стр. 18]. За безкрайно A тази дефиниция не може да се обобщи непосредствено, поради което елементите на такова безкрайно A не могат да бъдат кодирани с краен брой двоични разреди. Това може да стане обаче, ако обединим достатъчно близки по свойствата си елементи на A в една група, така че броят на групите да бъде краен. Тогава можем да кодираме елементите на A, тъй да се каже, с точност до принадлежността им към дадена група. При такова кодиране играе роля възприетата вече дефинация на А. Н. Колмогоров за ε-ентропия на едно метрично пространство [4], [5]. По-нататък в нашето изложение ще се ползуваме от дефинициите и означенията, дадени в [6], където читателят може да намери подробно изложение на засегнатите в тия няколко реда въпроси.

Нека R е метрично пространство и нека $A \neq \emptyset$, $A \subset R$.

---

* Навсякъде по-долу с log ще означаваме логаритъм при основа 2.

Дефиниция 0.1. [6, стр. 3]. Множеството γ от съвкупности $U \subset R$ се нарича ε-покритие на съвкупността A, ако диаметърът $d(U)$ на всяко $U \in \gamma$ не надминава 2ε и

$$A \subset \bigcup_{U \in \gamma} U.$$

Дефиниция 0.2. [6, стр. 3]. Съвкупността $U \subset R$ се нарича ε-различима, ако всеки две нейни точки се намират на разстояние, по-голямо от ε.

Дефиниция 0.3. [6, стр. 3]. Една съвкупност $A \subset R$ се нарича напълно ограничена, ако при всяко ε съществува крайна ε-мрежа за A.

В сила е следната:

Теорема 0.1. [7, стр. 201]. Пълната ограниченост на A е еквивалентна на всяко от следните две условия:

0α. За всяко $\varepsilon > 0$ съществува крайно ε-покритие за A;

0β. За всяко $\varepsilon > 0$ произволно ε-различимо множество е крайно.

А. Н. Колмогоров е въвел следните функции, характеризиращи в известен смисъл „масивността" на една напълно ограничена съвкупност:

$N_\varepsilon(A)$ — минималният брой елементи в едно ε-покритие на A;

$M_\varepsilon(A)$ — максималният брой точки в едно ε-различимо подмножество на съвкупността A.

За двоичния логаритъм на тези функции са възприети следните означения и названия:

$$H_\varepsilon(A) = \log N_\varepsilon(A) \text{ — } \varepsilon\text{-ентропия на } A;$$

$$C_\varepsilon(A) = \log M_\varepsilon(A) \text{ — } \varepsilon\text{-капацитет на } A.$$

В [6] е обяснена връзката между ε-ентропията и ε-капацитета, от една страна, и съответните основни понятия от теорията на информацията. Там е дадена и следната теорема, основна за по-горе дефинираните функции.

Теорема 0.2. За всяко напълно ограничено $A \subset R$ са в сила следните неравенства

$$M_{2\varepsilon}(A) \leq N_\varepsilon(A) \leq M_\varepsilon(A),$$

а следователно и

$$C_{2\varepsilon}(A) \quad H_\varepsilon(A) \quad C_\varepsilon(A). \tag{0.1}$$

§ 1

Нека D е един затворен правоъгълник в равнината xOy с основа интервала $\Delta = [a, b]$ върху оста x и височина $M > 0$. С F_D ще означаваме множеството от всички затворени съвкупности G от точки, принадлежащи на D, със следните свойства:

1 α. Ако $G \in F_D$ и $x \in \Delta$, тогава в G има точка с абсциса x;

2 β. Съвкупността от всички точки, които принадлежат на дадено множество $G \in F_D$ и имат една и съща фиксирана абсциса, е затворен интервал (който може да се изражда и в точка).

С C_Δ^M означаваме пространството на непрекъснатите функции, дефинирани в Δ и удовлетворяващи там неравенството

$$0 \leq f(x) \leq M.$$

Ако $f \in C_\Delta^M$, със съответната главна буква F ще означаваме съвкупността от точките на графиката на f. Под C_Δ^M ще разбираме и съвкупността от графиките на непрекъснатите функции, дефинирани в Δ (което не може да доведе до двусмислие). Очевидно $C_\Delta^M \subset F_D$.

Елементите на F_D имат едно свойство, аналогично на свойството на Дарбу. По-точно, в сила е следната

Лема 1.1. *Ако $F \in F_D$ и $X_1(x_1, y_1)$, $X_2(x_2, y_2)$, $x_1 \leqq x_2$, $y_1 < y_2$ са две точки от F, за всяко y_0, $y_1 < y_0 < y_2$ има такова x_0, $x_1 \leqq x_0 \leqq x_2$, че точката $X_0(x_0, y_0)$ да принадлежи на F.*

Доказателство. Да разгледаме ония точки от F, чиито абсциси лежат в интервала $[x_1, x_2]$ и чиито ординати не надминават y_0. Нека x_0 е точната горна граница на абсцисите им. Не е трудно да се види (свойство 1α), че съществува сходяща редица от точки $\{A_n(\alpha_n', \alpha_n'')\}$ такава, че $A_n \in F$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n' = x_0$, $y' = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n'' \leqq y_0$. Понеже F е затворена, $A(x_0, y')$ $\in F$. Аналогично съществува сходяща редица от точки $\{B_n(\beta_n', \beta_n'')\}$ такава, че $y'' = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n'' > y_0$, $\beta_n' \downarrow x_0$. Но поради затвореността на F, $B(x_0, y'') \in F$. От $y' \leqq y \leqq y''$ и 1β следва, че точката с координати x_0 и y_0 също принадлежи на F. С това лемата е доказана.

В нашето изложение ще използуваме следното разстояние между точки $X(x_1, y_1)$ и $Y(x_2, y_2)$, дефинирано с

$$\|X - Y\|_0 = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|).$$

Известно е и лесно се доказва, че $\|X-Y\|_0$ наистина е разстояние, т. е. че

$1a$. $\|X-Y\|_0 = \|Y-X\|_0 \geqq 0$;

$2b$. $\|X-Y\|_0 = 0$ точно тогава, когато $X = Y$;

$1c$. $\|X-Y\|_0 \leqq \|X-Z\|_0 + \|Z-Y\|_0$.

Топологията, породена от метриката $\|X-Y\|_0$, съвпада с обикновената топология в равнината.

В множеството F_D въвеждаме следната метрика от Хаусдорфовски тип [8]*. Нека F и G са елементи на F_D. Под разстояние r_Δ между тях ще разбираме

$$r_\Delta(F, G) = \max\left\{\max_{X\in F}\min_{Y\in G} \|X-Y\|_0,\ \max_{X\in G}\min_{Y\in F} \|X-Y\|_0\right\}.$$

За пълнота на изложението да докажем, че

$1a'$. $r_\Delta(F, G) = r_\Delta(G, F) \geqq 0$;

$1b'$. $r_\Delta(F, G) = 0$ точно тогава, когато $F = G$;

$1c'$. $r_\Delta(F, G) \leqq r_\Delta(F, H) + r_\Delta(H, G)$ за всяка тройка елементи F, G, H.

Неравенството $1a'$ следва непосредствено от $1a$.

За да докажем $1b'$, да разгледаме две съвкупности F и G от F_D за които $r_\Delta(F, G) = 0$. Тогава

* От Хаусдорфовски тип е например и известната метрика на Леви в пространството на монотонните функции [9].

$$(1.1)\qquad \max_{X\in F}\min_{Y\in G}\|X-Y\|_0=\max_{X\in G}\min_{Y\in F}\|X-Y\|_0=0.$$

Ако X_0 е произволна точка от F, първото от горните равенства показва, че

$$0=\max_{X\in F}\min_{Y\in G}\|X-Y\|_0\geqq\min_{Y\in G}\|X_0-Y\|_0=\|X_0-Y_0\|=0,$$

където $Y_0\in G$. Значи $Y_0=X_0\in G$. Тъй като X_0 беше избрана произволно, то $F\subset G$. По същия начин от второто равенство се убеждаваме, че $G\subset F$, следователно $F=G$.

Най-сетне ще покажем, че разстоянието r_A удовлетворява неравенството на триъгълника, т. е. че е в сила $1c'$. Нека F, G и H са елементи на F_D и X, Y, Z са три точки от D.

От $1b$ за $X\in F$, $Y\in G$, $Z\in H$ имаме

$$(1.2)\qquad \|X-Y\|_0\leqq\|X-Z\|_0+\|Z-Y\|_0.$$

Оттук получаваме последователно

$$\min_{Y\in G}\|X-Y\|_0\leqq\|X-Y\|_0\leqq\|X-Z\|_0+\|Z-Y\|_0$$

$$\min_{Y\in G}\|X-Y\|_0\leqq\|X-Z\|_0+\min_{Y\in G}\|Z-Y\|_0$$

$$\min_{Y\in G}\|X-Y\|_0\leqq\|X-Z\|_0+\max_{Z\in H}\min_{Y\in G}\|Z-Y\|_0$$

$$\min_{Y\in G}\|X-Y\|_0\leqq\min_{Z\in H}\|X-Z\|_0+\max_{Z\in H}\min_{Y\in G}\|Z-Y\|_0$$

$$\min_{Y\in G}\|X-Y\|_0\leqq\max_{X\in F}\min_{Z\in H}\|X-Z\|_0+\max_{Z\in H}\min_{Y\in G}\|Z-Y\|_0$$

и най-сетне

$$\max_{X\in F}\min_{Y\in G}\|X-Y\|_0\leqq\max_{X\in F}\min_{Z\in H}\|X-Z\|_0+\max_{Z\in H}\min_{Y\in G}\|Z-Y\|_0,$$

което може да се напише така:

$$(1.3)\qquad \max_{X\in F}\min_{Y\in G}\|X-Y\|_0\leqq\max_{X\in F}\min_{Y\in H}\|X-Y\|_0+\max_{X\in H}\min_{Y\in G}\|X-Y\|_0.$$

Ако сменим местата на F и G, получаваме

$$(1.4)\qquad \max_{X\in G}\min_{Y\in F}\|X-Y\|_0\leqq\max_{X\in G}\min_{Y\in H}\|X-Y\|_0+\max_{X\in H}\min_{Y\in F}\|X-Y\|_0.$$

Лесно се вижда обаче, че от неравенствата

$$\alpha\leqq\alpha_1+\alpha_2,\ \beta\leqq\beta_1+\beta_2$$

следва неравенството

$$(1.5)\qquad \max(\alpha_1,\beta)\leqq\max(\alpha_1,\beta_2)+\max(\beta_1,\alpha_2).$$

Наистина

$$\alpha\leqq\alpha_1+\alpha_2\leqq\max(\alpha_1,\beta_2)+\max(\beta_1,\alpha_2),$$

$$\beta\leqq\beta_1+\beta_2\leqq\max(\alpha_1,\beta_2)+\max(\beta_1,\alpha_2),$$

откъдето (1.5) следва непосредствено. Следователно от (1.3) и (1.4) получаваме

$$\max\{\max_{X\in F}\min_{Y\in G}\|X-Y\|_0,\ \max_{X\in G}\min_{Y\in F}\|X-Y\|_0\}$$

$$\leq \max\{\max_{X\in F}\min_{Y\in H}\|X-Y\|_0,\ \max_{X\in H}\min_{Y\in F}\|X-Y\|_0\}$$

$$+\max\{\max_{X\in H}\min_{Y\in G}\|X-Y\|_0,\ \max_{X\in G}\min_{Y\in H}\|X-Y\|_0\},$$

или

$$r_\Delta(F_1 G)\leq r_\Delta(F,\ H)+r_\Delta(H,G).$$

С това доказахме, че на F_D може да се гледа като на метрично пространство с метрика r_Δ. В силата е следната

Теорема 1.1. *Метричното пространство F_D е пълно, т. е. за всяка редица $\{F_n\}$ от елементи на F_D, която удоволетворява условието на Коши, има елемент $F\in F_D$, така че* $\lim\limits_{n\to\infty} r_\Delta(F_n, F)=0$.

Преди да пристъпим към доказателството на тази теорема, да докажем следната

Лема 1.2. *Ако редицата $\{F_n\}$, $F_n\in F_D$ удовлетворява условието на Коши и от всеки член на една нейна подредица $\{F_{n_k}\}$* е взета по една точка X_{n_k}, така че редицата от точки $\{X_{n_k}\}$ *да е сходяща и има за граница X_0 ($\lim\limits_{k\to\infty} X_{n_k}=X_0$), то от всеки член на редицата $\{F_n\}$ може да се избере по една точка X_n, така че $\lim\limits_{n\to\infty} X_n= X_0$.*

Доказателство на лема 1.2. Тъй като редицата $\{F_n\}$ удовлетворява условието на Коши, за всеки индекс n_k съществува положително число δ_{n_k}, така че за $p, q\geq n_k$ да имаме

$$r_\Delta(F_p, F_q)\leq \delta_{n_k}$$

и $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_{n_k}=0$. Достатъчно е да положим $\delta_{n_k}=\inf\limits_{p,\,q\geq n_k} r_\Delta(F_p, F_q)$.

Имаме
$$\max_{X\in F_p}\min_{Y\in F_q}\|X-Y\|_0\leq\delta_{n_k},$$

откъдето се вижда, че за всяко $X\in F_p$ има точка $Y\in F_q$ такава, че $\|X-Y\|_0<\delta_{n_k}$ за $p, q\geq n_k$. Търсената редица $\{X_n\}$ ще построим по следния начин. От съвкупностите F_n при $n=1,2,\ldots$, n_1 вземаме по една произволна точка X_n. Ако $n=n_k$, за $X_n\in F_n$ вземаме X_{n_k}. Ако $n_k<n<n_{k+1}$, от F_n избираме една точка X_n, удовлетворяваща неравенството $\|X_{n_k}-X_n\|_0\leq\delta_{n_k}$, което, както току-що видяхме, за $p=n_k$ е възможно. Лесно се вижда, че тъй построената редица е сходяща и има за граница X_0. Наистина за $n\geq n_k$

$$\|X_n-X_0\|_0\leq\|X_n-X_{n_k}\|_0+\|X_{n_k}-X_0\|_0\leq\delta_{n_k}+\|X_{n_k}-X_0\|.$$

Това неравенство показва, че $\lim\limits_{n\to\infty} X_n=X_0$, с което лемата е доказана.

Доказателство на теорема 1.1. Да означим с F съвкупността от ония точки на D, които са граници на редици от точки, принадлежащи на съответни F_n, т. е. $X \in F$, точно тогава, когато съществува редица от индекси $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ и точки $X_{n_1}, X_{n_2}, \ldots$, за които $X_{n_k} \in F_{n_k}$ и $\|X_{n_k} - X\|_0 \to 0$, $n \to \infty$. Ще отбележим, че лема 1.2 ни дава право да дефинираме F и като множеството на точките, които са граници на редици $\{X_n\}$, $X_n \in F_n$.

Да покажем, че така дефинираното F (което очевидно не е празно) принадлежи на F_D: α) F е затворена съвкупност. Нека $\|X^{(n)} - X^0\|_0 \to 0$ и $X^{(n)} \in F$ за $n = 1, 2, \ldots$. За всяко n има редица $\{X_{n_k}^{(n)}\}$, $X_{n_k}^{(n)} \in F_{n_k}$ такава, че $\|X_{n_k}^{(n)} - X^{(n)}\|_0 \to 0$. Нека $\varepsilon > 0$ и n_0 е толкова голямо, че $\|X^{(n)} - X^0\|_0 < \varepsilon/2$ за $n > n_0$. Освен това за всяко n можем да си изберем толкова голямо $k_0(n)$, че за $k > k_0$ и $n > n_0$ да бъдат в сила неравенствата

$$\|X_{n_k}^{(n)} - X^0\|_0 \leqq \|X_{n_k}^{(n)} - X^{(n)}\|_0 + \|X^{(n)} - X^0\|_0 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

които показват, че може да се избере такава подредица $\left\{X_{n_{k_s}}^{(n_s)}\right\}$, $X_{n_{k_s}}^{(n_s)} \in F_{n_{k_s}}$, че $\|X_{n_{k_s}}^{(n_s)} - X^0\|_0 \to 0$, което пък показва, че $X_0 \in F$.

β) Нека $X'(x_0, y')$ и $X''(x_0, y'')$ са две точки от F с една и съща абсциса x_0 и с ординати $y' < y''$. Точката $X_0(x_0, y_0)$, където $y' < y_0 < y''$ лежи на отсечката $[x', x'']$. Съгласно лема 1.2 има две редици $\{X'_n(x'_n, y'_n)\}$ $\{X''_n(x''_n, y''_n)\}$, за които $X'_n, X''_n \in F_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} X'_n = X'$, $\lim\limits_{n\to\infty} X''_n = X''$, или

$$\lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty} x''_n = x_0,$$

$$\lim_{n\to\infty} y'_n = y', \ \lim_{n\to\infty} y''_n = y''.$$

Да изберем N така, че при $n > N$ да са изпълнени неравенствата

$$y'_n < y_0, \quad y''_n > y_0.$$

Но тогава съгласно лема 1.1 може да се намери число $\tilde{x}_n$, лежащо между x'_n и x''_n, така че точката $\tilde{X}_n(\tilde{x}_n, y_0)$ да принадлежи на F_n. От избора на $\tilde{x}_n$ следва, че $\tilde{x}_n \to x_0$, следователно $\tilde{X}_n \to X_0$. И тъй $F \in F_D$.

Остава да покажем, че $r_1(F_n, F) \to 0$.

Нека $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$ е една крайна $\varepsilon/2$-мрежа за F по отношение на разстоянието $\|X - Y\|_0$, състояща се от точки на F. Такава мрежа съществува, тъй като $F \subset D$, а правоъгълникът D е очевидно една напълно ограничена съвкупност по отношение на разстоянието $\|X - Y\|_0$. Съгласно дефиницията на F за всяка точка $X^{(i)} \in F$, $i = 1, 2, \ldots, k$ от $\varepsilon/2$-мрежата има редица $\{X_n^{(i)}\}$ с $X_n^{(i)} \in F_n$, $X_n^{(i)} \to X_0^{(i)}$ Тогава може да се намери такова N_1, че за всяко $i = 1, 2, \ldots, k$ и $n > N_1$ да е изпълнено неравенството

$$\|X_n^{(i)} - X^{(i)}\|_0 < \varepsilon/2.$$

Нека X е произволна точка от F. Съгласно дефиницията на ε-мрежа има такъв индекс i_0, за който $\|X - X^{(i_0)}\| \leqq \varepsilon/2$ и следователно

$$\|X - X_n^{(i_0)}\|_0 \leqq \|X - X^{(i_0)}\|_0 + X_n^{(i_0)} - X_n^{(i_0)}\|_0 < \varepsilon$$

за $n > N_1$. Оттук получаваме, че

$$\min_{X \in F_n} \| X - Y \|_0 \leq \| X - X_n^{(i_0)} \|_0 < \varepsilon,$$

което е вярно за всяко $X \varepsilon F$ и следователно

$$\max_{X \in F} \min_{Y \in F_n} \| X - Y \|_0 < \varepsilon \text{ при } n > N_1.$$

Ако успеем да покажем още, че

$$\max_{X \in F_n} \min_{Y \in F} \| X - Y \|_0 < \varepsilon \text{ за } n > N_2, \tag{1.6}$$

ще получим, че за $n > \max (N_1, N_2)$

$$r_\Delta (F_n, F) < \varepsilon,$$

с което теоремата ще бъде доказана, тъй като ε беше произволно. Да допуснем, че (1.6) не е вярно, т. е. че има такова $\varepsilon_0 > 0$ и такава редица от индекси $n_1 < n_2 < \ldots < n_k \ldots$, че

$$\max_{X \in F_{n_k}} \min_{Y \in F} \| X - Y \|_0 \geq \varepsilon_0,$$

Нека $X_{n_k} \in F_{n_k}$, тогава $\min_{Y \in F} \| X_{nk} - Y \|_0 \geq \varepsilon_0$. Но редицата $\{X_{n_k}\}$ е ограничена и от нея може да се избере сходящата подредица $\{X_{n_{k_s}}\}$ с граница X_0, която трябва да принадлежи на F. Това обаче противоречи на $\min \| X_{nk} - Y \|_0 \geq \varepsilon_0$, защото редицата $\{X_{n_{k_s}}\}$ е подредица на $\{X_{n_k}\}$. С това теоремата 1.1 е напълно доказана.

Лема 1.3. *Нека $F, G \in F_D$ и нека $X_0 \in F$. Ако съществува квадрат със страни, успоредни на координатните оси, център в точката X_0 и страна, равна на 2δ, който няма общи вътрешни точки G, то $r_\Delta (F, G) \geq \delta$.*

Доказателство. По условие за всяка точка $Y \in G$ имаме $\| X_0 - Y \|_0 \geq \delta$ и следователно $\min_{Y \in G} \| X_0 - Y \|_0 \geq \delta$, откъдето получаваме $\max_{X \in F} \min_{Y \in G} \| X - Y \|_0 \geq \delta$, което е достатъчно, за да имаме $r_\Delta (F, G) \geq \delta$.

Лема 1.4. *Нека $F, G \in F_D$. Ако 1) за всяко $X \in F$ има квадрат със страни, успоредни на координатните оси, и дължина на страната, равна на δ, който съдържа поне една точка от G, и 2) за всяко $Y \in D$ има аналогичен квадрат, съдържащ поне една точка от F, то*

$$r_\Delta (F, G) \leq \delta.$$

Доказателство. Съгласно условието, ако X е произволна точка от F, има точка $Y \in G$, за която $\| X - Y \|_0 \leq \delta$, следователно $\min_{X \in F} \| X - Y \|_0 \leq \delta$. Но последното неравенство е изпълнено за всяко $X \in F$, откъдето $\max_{X \in F} \min_{Y \in G} \| X - Y \|_0 \leq \delta$. Аналогично получаваме, че $\max_{X \in G} \min_{Y \in F} \| X - Y \|_0 \leq \delta$. Двете неравенства показват, че $r_\Delta (F, G) \leq \delta$, което трябваше да се докаже.

Нека f и g са две функции от C_Δ^M и F и G са техните графики. Разстоянието $r_\Delta(F, G)$ между F и G ще наричаме и разстояние между f и g и ще го бележим с $r_\Delta(f, g)$.

Следните няколко твърдения изясняват връзката между дефинираното тук разстояние $r_\Delta(f, g)$ и равномерното разстояние между f и g.

Теорема 1.2. *За всеки две непрекъснати и ограничени в интервала Δ функции f и g е в сила неравенството*

$$r_\Delta(f, g) \leqq \rho(f, g) = \max_{x \in \Delta} |f(x) - g(x)|, \tag{1.7}$$

при това, ако $g(x) \equiv 0$, имаме равенство, т. е.

$$r_\Delta(f, 0) = \max_{x \in \Delta} |f(x)|. \tag{1.8}$$

Доказателство. Имаме

$$\max(|x-\xi|, |f(x)-g(\xi)|) \leqq |x-\xi| + |f(x)-g(\xi)|$$

следователно

$$\min_{\xi \in \Delta} \max(|\xi - x|, |f(x)-g(\xi)|) \leqq |f(x)-g(x)|$$

и

$$\max_{x \in \Delta} \min_{\xi \in \Delta} \max(|x-\xi|, |f(x)-g(\xi)|) \leqq \max_{x \in \Delta} |f(x)-g(x)| = \rho(f, g).$$

Аналогично

$$\max_{x \in \Delta} \min_{\xi \in \Delta} \max(|x-\xi|, |f(\xi)-g(x)|) \leqq \rho(f, g).$$

Получените две неравенства водят до (1.7). Ако в (1.7) $g(x) \equiv 0$, получаваме $r_\Delta(f, 0) \leqq \max_{x \in \Delta} |f(x)|$. От друга страна,

$$r_\Delta(f, 0) \geqq \max_{x \in \Delta} \min_{\xi \in \Delta} \max(|x-\xi|, |f(x)|) \geqq \max_{x \in \Delta} \min_{\xi \in \Delta} |f(x)| = \max_{x \in \Delta} |f(x)|,$$

или $r_\Delta(f, 0) \geqq \max_{x \in \Delta} |f(x)|$. С това е доказано и (1.8).

Теорема 1.2 показва, че равномерното разстояние мажорира разстоянието $r_\Delta(f, g)$ с константа единица, т. е. че

$$r_\Delta(f, g)/\rho(f, g) \leqq 1.$$

Реципрочната стойност на това отношение може обаче да бъде произволно голяма. Наистина нека f и g са дефинирани по следния начин:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} x & \text{за } 0 \leqq x \leqq \delta \\ 1 & \text{за } \delta \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{за } 0 \leqq x \leqq \delta \\ \frac{1}{\delta}(x-\delta) & \text{за } \delta \leqq x \leqq 2\delta \\ 1 & \text{за } 2\delta \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

От лема 1.4 лесно се вижда, че $r_\Delta(f, g) \leqq \delta$, където $\Delta=[0,1]$, а

$$\rho(f,g) \geqq |f(\delta)-g(\delta)|=1,$$

следователно

$$\rho(f, g)/r_\Delta(f, g) \geqq \frac{1}{\delta}$$

и за достатъчно малко δ горното отношение може да бъде направено произволно голямо.

За функции, удовлетворяващи условие на Липшиц с константа L, е в сила

Теорема 1.3. *Ако f и g удовлетворяват условието на Липшиц в интервала $\triangle$ с константа L, то*

$$r_0(f,g) \geqq (1+L)^{-1} \rho(f,g).$$

Доказателство. Имаме

$$|f(x)-g(\xi)| \geqq |f(x)-g(x)|-|g(x)-g(\xi)| \geqq |f(x)-g(x)|-L|x-\xi|,$$

следователно

$$\max(|x-\xi|, |f(x)-g(\xi)|) \geqq \max(|x-\xi|, |f(x)-g(x)|-L|x-\xi|). \tag{1.9}$$

От друга страна, ще покажем, че при $L>0$

$$\max(t, a-Lt) \geqq a(1+L)^{-1}. \tag{1.10}$$

Наистина, ако допуснем противното, ще получим, че едновременно

$$t<a(1+L)^{-1}$$

и

$$a-Lt<a(1+L)^{-1}.$$

Но като умножим първото неравенство с L и го прибавим към второто, получаваме $a<a$. От (1.9) и (1.10) виждаме, че

$$\max(|x-\xi|, |f(x)-g(\xi)|) \geqq (1+L)^{-1} |f(x)-g(x)|$$

и

$$\max_{x\in\Delta} \min_{\xi\in\Delta} \max(|x-\xi|, |f(x)-g(\xi)|) \geqq (1+L)^{-1} \rho(f,g),$$

откъдето следва, че

$$r_\Delta(f,g) \geqq (1+L)^{-1} \rho(f,g).$$

Интересно е да се отбележи, че разстоянията ρ и r_Δ пораждат в съвкупността на непрекъснатите функции една и съща топология, т. е. в сила е следната

Теорема 1.4. *За да клони редицата $\{f_n\}$, $f_n \in C_\Delta^M$ равномерно в Δ към f, е необходимо и достатъчно $r_\Delta(f_n, f) \to 0$.*

Доказателство. Необходимостта следва непосредствено от теорема 1.2. За да докажем достатъчността, нека $r_\Delta(f_n, f) \to 0$. Тогава и

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in\Delta} \min_{\xi\in\Delta} \max(|x-\xi|, |f_n(x)-f(\xi)|)=0,$$

откъдето

(1.11) $$\lim_{n\to\infty} \min_{\xi\in\Delta} \max(|x-\xi|, |f_n(x)-f(\xi)|)=0 \text{ за всяко } x\in\Delta.$$

Тъй като $\max(|x-\xi|, |f_n(x)-f(\xi)|)$ е непрекъсната функция на ξ в Δ, за всяко n има такова ξ_n, че

$$\min_{\xi\in\Delta} \max(|x-\xi|, |f_n(x)-f(\xi)|)=\max(|x-\xi_n)|, |f_n(x)-f(\xi_n)|).$$

От (1.11) получаваме равенствата

$$\lim_{n\to\infty} |x-\xi_n|=0$$

и

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x)-f(\xi_n)|=0.$$

Следователно за всяко x $\lim f_n(x)$ съществува и е равен на $f(x)$. Остава да покажем, че редицата $\{f_n\}$ клони към f равномерно. Ако допуснем противното, ще има такова $\varepsilon_0>0$, че за всяко N ще съществува индекс $n_N>N$ и число $x_N\in\Delta$, така че

(1.12) $$|f_{n_N}(x_N)-f(x_N)|\geqq\varepsilon_0.$$

Без ограничение на общността можем да считаме, че редицата $\{x_N\}$ е сходяща, $x_N\to x_0$. Тъй като f е непрекъсната в точката x_0, има такова $\delta_1>0$, че за x', $x''\in[x_0-\delta_1, x_0+\delta_1]$ да имаме

(1.13) $$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon_0/2.$$

Нека m е толкова голямо, че за $N>m$ да бъде в сила неравенството

$$|x_N-x_0|<\delta_1/2.$$

Нека $|\xi-x_0|<\delta_1/2$. Ако $N>m$, от (1.12) и (1.13) имаме

$$|f(\xi)-f(x_N)|<\varepsilon_0/2,$$

$$|f_{n_N}(x_N)-f(x_N)|\geqq\varepsilon_0,$$

откъдето

$$|f(\xi)-f_{n_N}(x_N)|>\varepsilon_0/2$$

за

$$|\xi-x_0|<\delta_1.$$

Получените неравенства показват, че съществува квадрат със страна $2\delta=\min(\varepsilon_0,\delta_1)$ и център в точката $(x_N, f_{n_N}(x_n))$, който не съдържа във вътрешността си точки от графиката на f. Съгласно лема 1.3

$$r_\Delta(f_{n_N}, f)\geqq\delta,$$

което трябва да бъде вярно за всяко $N>m$. От друга страна, δ не зависи от N. Това обаче противоречи на условието, че $r_\Delta(f_n, f)\to 0$. С това теоремата е доказана.

§ 2

В този параграф ще разгледаме ε-ентропията и ε-капацитета на F^{Δ} и C_{Δ}^{M}.

За всяко $\varepsilon > 0$ да дефинираме натуралното число n по следния начин:

$$(2.1)\qquad n = \begin{cases} \left[\frac{|\Delta|}{2\varepsilon}\right] + 1, & \text{ако } \frac{|\Delta|}{2\varepsilon} \text{ не е цяло;} \\ \frac{|\Delta|}{2\varepsilon} & \text{ако } \frac{|\Delta|}{2\varepsilon} \text{ е цяло,} \end{cases}$$

където $\Delta = [a, b]$, а с $|\Delta|$ е означена дължината на Δ.
Нека $t = {}^1/_2(|\Delta| - 2(n-2)\varepsilon)$; ще покажем, че $\varepsilon < t \leqq 2\varepsilon$. Наистина, ако $\Delta|/2\varepsilon$ не е цяло,

$$t = |\Delta|/2 - \left(\left[\frac{|\Delta|}{2\varepsilon}\right] - 1\right)\varepsilon > \frac{|\Delta|}{2} - \frac{|\Delta|}{2} + \varepsilon = \varepsilon,$$

$$t = |\Delta|/2 - \left(\left[\frac{|\Delta|}{2\varepsilon}\right] - 1\right)\varepsilon < \frac{|\Delta|}{2} - \left(\frac{|\Delta|}{2\varepsilon} - 2\right)\varepsilon = 2\varepsilon;$$

ако $|\Delta|/2\varepsilon$ е цяло,

$$t = {}^1/_2\left(|\Delta| - 2\left(\frac{|\Delta|}{2\varepsilon} - 2\right)\varepsilon\right) = 2\varepsilon.$$

Да въведем следните означения:

$$(2.1)\qquad x'_0 = a,\ x'_1 = a + t,\ x'_2 = x'_1 + 2\varepsilon, \ldots,\ x'_{n-1} = x'_{n-2} + 2\varepsilon,\ x'_n = x'_{n-1} + t = b$$

и

$$(2.2)\qquad m = \begin{cases} \left[\frac{M}{2\varepsilon}\right] + 1, & \text{ако } M/2\varepsilon \text{ не е цяло} \\ \frac{M}{2\varepsilon}, & \text{ако } M/2\varepsilon \text{ е цяло,} \end{cases}$$

$$t' = {}^1/_2(M - 2(m-2)\varepsilon)$$

и най-сетне

$$y'_0 = 0,\ y'_1 = t',\ y'_2 = y'_1 + 2\varepsilon, \ldots, y'_{m-1} = y'_{m-2} + 2\varepsilon,\ y'_m = y'_{m-1} + t' = M.$$

Да разгледаме точките с координати (x'_i, y'_j), $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Те определят едно разлагане на правоъгълника D на квадрати и правоъгълници със страни, не по-големи от 2ε. Всеки такъв квадрат или правоъгълник ще означаваме с $|x'_i, y'_j|$, където x'_i и y'_j са координатите на левия му долен ъгъл.

Така дефинираното разлагане на D ще наричаме ε-покриващо разлагане от ред (n, m), а $|x'_i, y'_j|$ — елементи (или части) на разлагането.

Да разделим правоъгълника D на същия брой квадрати и правоъгълници по следния начин: означаваме с

$$\delta = \frac{|\Delta|}{2(n-1)} - \varepsilon,\quad \delta_1 = \frac{M}{2(m-1)} - \varepsilon,$$

където n и m се определят от (2.1). Лесно се вижда, че $\delta>0$ и $\delta_1>0$. Да се убедим във верността на първото от тия две неравенства. Ако $\Delta|/2\varepsilon$ не е цяло, то $n-1=\left[\frac{|\Delta|}{2\varepsilon}\right]$ и следователно

$$\delta=\frac{|\Delta|}{2\left[\frac{|\Delta|}{2\varepsilon}\right]}-\varepsilon>\frac{|\Delta|}{\frac{2|\Delta|}{2\varepsilon}}-\varepsilon=0;$$

ако $|\Delta/2\varepsilon$ е цяло, то

$$\delta=\frac{|\Delta|}{2\left(\frac{|\Delta|}{2\varepsilon}-1\right)}-\varepsilon>\frac{|\Delta|}{2|\Delta|/2\varepsilon}-\varepsilon=0.$$

Нека $\gamma=\min(\delta,\delta_1)$. Да въведем означенията

$$x_0''=a,\ x_1''=x_0''+\varepsilon+\lambda,\ x_2''=x_1''+2(\varepsilon+\gamma),\ldots,$$
$$x_{n-1}''=x_{n-2}''+2(\varepsilon+\gamma),\ x_n''=x_{n-1}''+\varepsilon+\lambda=b$$

и

$$y_0''=0,\ y_1''=y_0''+\varepsilon+\lambda_1,\ y_2''=y_1''+2(\varepsilon+\gamma),\ldots,$$
$$y_{m-1}''=y_{m-2}''+2(\varepsilon+\gamma),\ y_m''=y_{m-1}''+\varepsilon+\lambda_1=M,$$

където

$$\lambda={}^1/_2(|\Delta|-2(n-2)(\varepsilon+\gamma)-2\varepsilon),$$
$$\lambda_1={}^1/_2(M-2(m-2)(\varepsilon+\gamma)-2\varepsilon).$$

При това имаме $\lambda>\gamma$ и $\lambda_1\geqq\gamma$. Наистина

$$\lambda={}^1/_2(|\Delta|-2(n-2)(\varepsilon+\gamma)-2\varepsilon)\geqq{}^1/_2(|\Delta|-2(n-2)(\varepsilon+\delta)-2\varepsilon)$$
$$={}^1{}_2(|\Delta)-\frac{n-2}{n-1}|\Delta|-2\varepsilon)=|\Delta|/_2(n-1)-\varepsilon=\delta\geqq\gamma.$$

Съвсем аналогично се получава, че $\lambda_1\geqq\gamma$.

Точките с координати (x_i'', y_j''), $i=1,\ldots n$, $j=1,\ldots, m$ също дефинират едно разлагане на D на квадрати и правоъгълници, всяка страна на които е равна на $2(\varepsilon+\gamma)$, ако тя няма обща точка с контура на D, и е по-голяма или равна на $\varepsilon+\gamma$, ако има общи точки с контура на D. Така дефинираното разлагане ще наричаме ε-различаващо разлагане на D от ред (n,m), а $|x_i'', y_j''|$—негови части или елементи.

Изборът на точките (x_i', y_i') и (x_i'', y_j'') показва, че е в сила следната

Лема 2.1. *За всяко $\varepsilon>0$ съществуват ε-покриващо и ε-различаващо разлагане от ред (n, m), където n и m се определят от* (2.1) *и* (2.2).

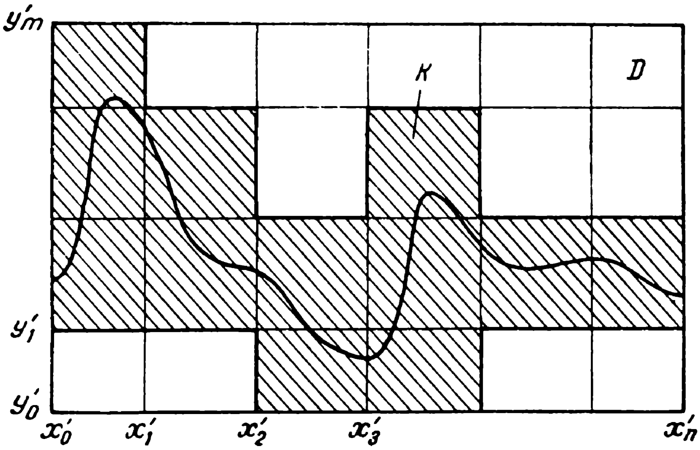
Дефиниция 2.1. Под ε-коридор на едно ε-разлагане на D (покриващо или различаващо) ще разбираме такова множество от елементи на това разлагане, което удовлетворява следните условия:

2α) за всяко $\nu=0, 1, 2,\ldots, n-1$ има поне едно такова $\mu\in\{0, 1,\ldots, m-1\}$, че $|x_\nu, y_\mu|$ да принадлежи на ε-коридора;

2β) ако $|x_\nu, y_{\mu'}|$ и $|x_\nu, y_{\mu''}|$ принадлежат на един коридор, той съдържа и $|x_\nu, y_\mu|$ за всяко μ, $\mu'<\mu<\mu''$;

2γ) за всяко $\nu\in\{0, 1, 2,\ldots, n-2\}$ има такова $\mu\in\{0, 1,\ldots, m-1\}$, че $|x_\nu, y_\mu|$ и $|x_{\nu+1}, y_\mu|$ да принадлежат на коридора (вж. фиг. 1).

Множеството на всички коридори на ε-покриващото разлагане ще отбелязваме с $K'_{n,m}$, а тези на ε-различаващото разделяне — с $K''_{n,m}$. Очевидно $K'_{n,m}$ и $K''_{n,m}$ съдържат еднакъв брой елементи. Този брой ще означим с $k_{n,m}$.



Фиг. 1

Дефиниция 2.2. Нека $K \in K''_{n,m}$. Под γ-център на K ще разбираме съвкупността от точките X, принадлежащи на K, за които

$$\min_{Y \in \bar{K} / \bar{D}} \|X-Y\|_0 \geqq \varepsilon+\gamma/2,$$

където $\bar{K}$ е контурът на K, а $\bar{D}$ е контурът на D. От дефиницията на ε-различаващо разлагане се вижда непосредствено, че γ-центърът на всеки коридор от $K''_{n,m}$ не е празна съвкупност и има вътрешни общи точки с всяка част от този коридор. Ако аналогично дефинираме γ-център на една част $d_{ij} = [x''_i, y''_j]$ на ε-различаващото разлагане, като съвкупността от точките X, принадлежащи на d_{ij} и удовлетворяващи неравенството

$$\min_{Y \in \bar{d}_{ij} / \bar{D}} \| X-Y \|_0 \geqq \varepsilon+\gamma/2,$$

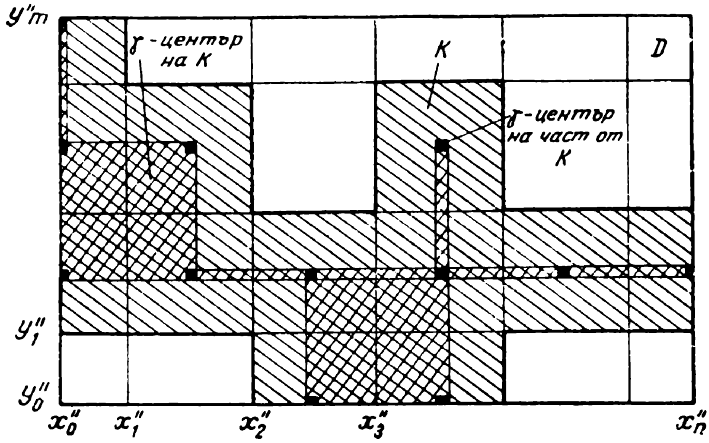
където $\bar{d}_{ij}$ и $\bar{D}$ са съответно контурите на d_{ij} и D, то очевидно е в сила следната (вж. фиг. 2)

Лема 2.2. *γ-центърът на всеки коридор от $K''_{n,m}$ съдържа γ-центровете на всички свои части.*

Лема 2.3. *Нека $d_{i_0 j_0}$ е елемент на едно ε-различаващо разлагане на D и Γ е γ-центърът на един коридор $K \in K''_{n,m}$, който не съдържа частта $d_{i_0 j_0}$, тогава*

$$r_{1}(d_{i_0 j_0}, \Gamma) \geqq 2\varepsilon+\gamma.$$

Доказателство. Съгласно дефиницията на γ-център на K правоъгълникът, който се получава от $d_{i_0 j_0}$, като отдалечим успоредно стра ните му от неговия център на разстояние $\varepsilon+\gamma/2$, не съдържа във вътрешността си точки от Γ. Така около γ-центъра на $d_{i_0 j_0}$ построяваме квадрат с дължина на страната $4\varepsilon+3\gamma$, който не съдържа във вътрешността си точки от Γ. Но тъй като разстоянието на две точки от γ-цен-



Фиг. 2

търа на $d_{i_0 j_0}$ е най-много равно на γ, то произволна точка от него е на разстояние, по-голямо или равно на $2\varepsilon+\gamma$ от всяка точка на Γ. Оттук веднага следва горното неравенство.

Лесно се вижда, че е в сила и следната

Лема 2.4. *Нека $K \in K''_{n,m}$ е един коридор и Γ е неговият γ-център. Тогава винаги може да се намери функция от C_{Δ}^{M}, чиято графика лежи изцяло в Γ и има общи точки с γ-центровете на всички части на K.*

Теорема 2.1. *Съвкупността F_D е напълно ограничена по отношение на метриката r_Δ и ε-ентропията и 2ε-капацитетът на F_D съвпадат*

$$H_\varepsilon(F_D) = C_{2\varepsilon}(F_D).$$

Доказателство. На всяко $F \in F_D$ съпоставяме този коридор $K \in K_{n,m}$, който съдържа всички точки от F и освен това всяка негова част има обща точка с F. От лема 1.4 следва веднага, че ако на два елемента F и G от F_D съответствува един и същ коридор от $K'_{n,m}$, то

$$r(F, G) \leqq 2\varepsilon.$$

Ако идентифицираме всеки коридор $K \in K'_{n,m}$ със съвкупността от всички елементи на F_D, на които той е съпоставен, множеството $K'_{n,m}$ ще се окаже едно крайно ε-покритие на F_D. С това е доказано, че F_D е напълно ограничено.

Щом $K'_{n,m}$ е крайно ε-покритие за F_D, минималният брой елементи $N_\varepsilon(F_D)$ в едно ε-покритие на F_D ще удовлетворява неравенството

$$N_\varepsilon(F_D) \leqq k_{n,m},$$

откъдето за ε-ентропията на F_D имаме

$$H_\varepsilon(F_D) \leqq \log k_{n,m}. \tag{2.3}$$

Не е трудно да се види, че всеки γ-център Γ на един коридор от $K''_{n,m}$ е елемент на F_D. Освен това от лема 2.3 следва, че ако Γ_1 и Γ_2 са γ-центровете на два различни коридора от $K''_{n,m}$, то $r_\Delta(\Gamma_1, \Gamma_2) \geqq 2\varepsilon+\gamma > 2\varepsilon$. Следователно съвкупността от γ-центровете на елементите на $K''_{n,m}$ е една 2ε-различима съвкупност в F_D. Броят на елементите на тази 2ε-различима съвкупност е равен на $k_{n,m}$, следователно максималният брой $M_{2\varepsilon}(F_D)$ на елементите на произволна 2ε-различима съвкупност в F_D удовлетворява неравенството

$$M_{2\varepsilon}(F_D) \geqq k_{n,m},$$

откъдето за 2ε-капацитета на F_D ще имаме

$$C_{2\varepsilon}(F_D) \geqq \log k_{n,m}.$$

Последното неравенство и (2.3) показват, че

$$C_{2\varepsilon}(F_D) \geqq H_\varepsilon(F_D).$$

Оттук съгласно основното неравенство (0.1) получаваме

$$C_{2\varepsilon}(F_D) = H_\varepsilon(F_D) = \log k_{n,m}. \tag{2.4}$$

С това теоремата е доказана.

От (2.4) се вижда, че пресмятането на ε-ентропията и 2ε-капацитета на F_D се свежда до намирането на $k_{n,m}$ като функция на n и m. Намирането на $k_{n,m}$ е равносилно на решението на следната комбинаторна задача. Нека n и m са две натурални числа и нека един правоъгълник с дължина на основата n и височина m е разделен на квадрати със страна, равна на единица: да се намери броят на коридорите, образувани от тези квадратчета, като под к о р и д о р тук разбираме такова множество от квадрати, което удовлетворява следните условия:

2*a*) Всеки коридор съдържа квадратче от всяка вертикална ивица на квадрата.

2*b*) Вертикалните ивици на коридора са свързани съвкупности (под „вертикална ивица на коридора" разбираме квадратчета от коридора, лежащи в една и съща вертикална ивица на правоъгълника).

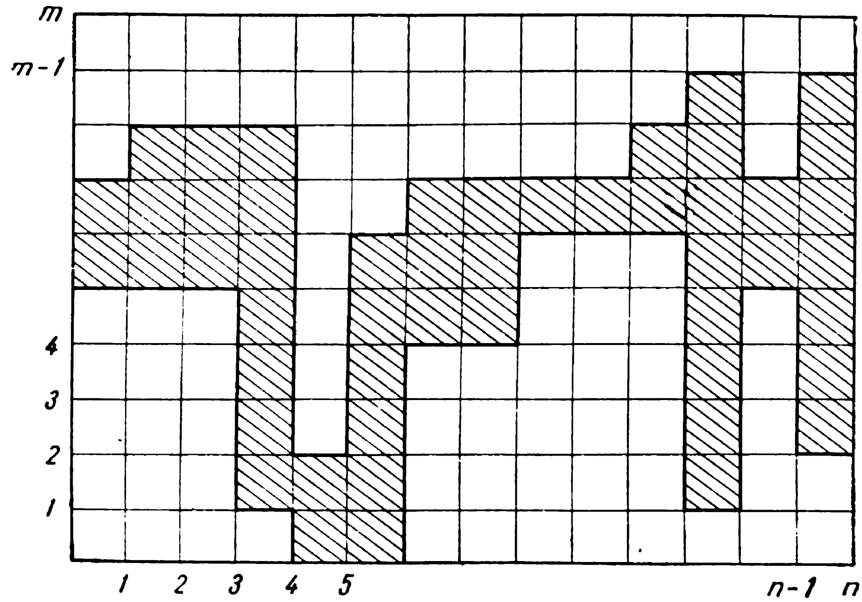
2*c*) Поне едно квадратче от всяка вертикална ивица (без последната) на коридора има обща страна с едно квадратче от съседната вдясно вертикална ивица на коридора.

Натуралните числа n и m ще наричаме съответно дължина и ширина на коридора.

Да означим квадратчетата с Δ_{ij}, $i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,m$ и нека $k^{u,v}_{s,m}$ е броят на коридорите с дължина s, които в последната си вертикална ивица съдържат точно квадратчетата $\Delta_{s,u}, \Delta_{s,u+1}, \ldots \Delta_{s,\cancel{m+}v-1}$. Очевидно символът $k^{u,v}_{s,m}$ има смисъл при $v \geqq 1$, $u \geqq 1$ и $u+v \leqq m+1$ (вж. фиг. 3).

Лесно се вижда, че са в сила следните равенства:

$$k_{s,m} = \sum_{\substack{u \geq 1\ v \geq 1 \\ u+v \leq m+1}} k^{u,v}_{s,m} \tag{2.5}$$



Фиг. 3

и

$$k_{s,m} = k^{1,1}_{s+1,m}. \tag{2.6}$$

От (2.5) се вижда, че $k_{n,m}$ може да се намери, ако познаваме числата $k^{u,v}_{n,m}$. Тези числа пък могат да се намерят по следната рекурентна формула:

$$k^{u,v}_{s,m} = \sum_{\substack{x \geq 1,\ y \geq 1 \\ x+y \leq m+1}} I^{u,v}_{x,y}\, k^{x,y}_{s-1,m}, \tag{2.7}$$

където символът $I^{u,v}_{x,y}$ се дефинира с

$$I^{u,v}_{x,y} = \begin{cases} 1 \text{ ако } x+v \leq m+1 \text{ и } y+u \leq m+1, \\ 0 \text{ в останалите случаи.} \end{cases}$$

Като вземем пред вид, че $k^{x,y}_{1,m} = 1$ от (2.7), получаваме

$$k^{u,v}_{2,m} = \sum_{\substack{x \geq 1,\ y \geq 1 \\ x+y \leq m+1}} I^{u,v}_{x,y} = \binom{m+1}{2} - \binom{u}{2} - \binom{v}{2},$$

откъдето съгласно (2.6) имаме

$$k_{1,m} = \binom{m+1}{2}. \tag{2.8}$$

а от (2.5)

$$k_{2,m}=\sum_{\substack{u\geq 1,\, v\geq 1\\ u+v\leq m+1}}\left[\binom{m+1}{2}-\binom{u}{2}-\binom{v}{2}\right]=\frac{m(m+1)(m^2+m+1)}{6}. \tag{2.9}$$

Тъй като решението на (2.7) се оказва свързано със значителни трудности и не ни се отдаде да го намерим, ще се задоволим само с оценки за $k_{n,m}$.

Лесно се вижда, че е в сила следното неравенство:

$$k_{n,m}\leq k_{s,m}\,k_{n-s,m}. \tag{2.10}$$

Наистина всеки коридор с дължина n се получава от един коридор с дължина s и един коридор с дължина $n-s$, но не винаги от един коридор с дължина s и един коридор с дължина $n-s$ може да се получи коридор с дължина n.

От (2.8) и (2.10) получаваме една оценка отгоре за $k_{n,m}$:

$$k_{n,m}\leq\binom{m+1}{2}^n. \tag{2.11}$$

Разбира се, ако използуваме (2.9), можем да получим по-точна оценка, която се записва по-сложно, но има същия порядък.

Да намерим сега една оценка отдолу за $k_{n,m}$. Броят на свързаните съвкупности в една вертикална ивица, които съдържат един фиксиран квадрат в средата на ивицата, е по-голям от $^1/_2\binom{m+1}{2}$. Наистина броят на тези свързани съвкупности от квадрати за $m=2k+1$ е

$$1+2+\cdots+k+(k+1)+k+\cdots+2+1=\left(\frac{m+1}{2}\right)^2>\frac{1}{2}\binom{m+1}{2},$$

а за $m=2k$

$$1+2+\cdots+(k-1)+k+k+(k-1)+\cdots+2+1=\frac{m(m+2)}{4}>\frac{1}{2}\binom{m+1}{2}$$

Лесно се вижда, че една съвкупност от квадрати, която е образувана от свързани съвкупности във всяка вертикална ивица, така че тези свързани съвкупности винаги да съдържат един квадрат на една и съща височина, е коридор, следователно

$$k_{n,m}\geq 2^{-n}\binom{m+1}{2}^n \tag{2.12}$$

От (2.11) и (2.12) следва, че

$$n\log\binom{m+1}{2}-n\geq\log k_{n,m}\leq n\log\binom{m+1}{2},$$

което заедно с (2.1) и (2.2) води до

$$\log k_{n,m}\sim\frac{|\Delta|}{\varepsilon}\log\frac{M}{2\varepsilon}.$$

От това равенство и (2.4) заключаваме, че

$$H_\varepsilon(F_D)=C_{2\varepsilon}(F_D)\sim\frac{|\Delta|}{\varepsilon}\log\frac{M}{2\varepsilon}. \tag{2.13}$$

При това (2.13) остава в сила, ако вместо F_D вземем C_Δ^M, т. е.

$$H_\varepsilon(C_\Delta^M) = C_{2\varepsilon}(C_\Delta^M) \sim \frac{|\Delta|}{\varepsilon} \log \frac{M}{2\varepsilon}. \tag{2.14}$$

Наистина по същия начин, както и за F_D, се доказва, че

$$N_\varepsilon(C_\Delta^M) \leqq k_{n,m}, \quad H_\varepsilon(C_\Delta^M) \leqq \log k_{n,m}.$$

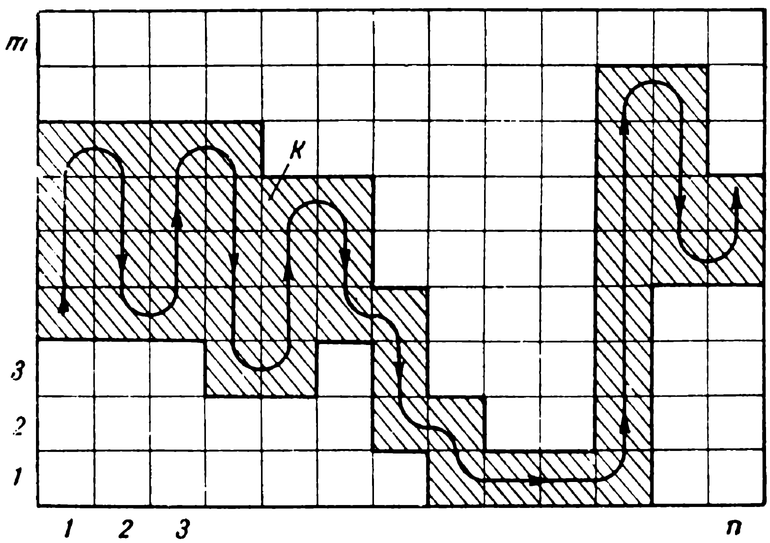
От лема 2.4 следва, че

$$M_{2\varepsilon}(C_\Delta^M) \geqq k_{n,m}, \quad C_{2\varepsilon}(C_\Delta^M) \sim \log k_{n,m},$$

откъдето съгласно (0.1), (2.4) и (2.13) получаваме (2.14).

§ 3

Дотук пресмятахме ε-ентропията и ε-капацитета на C_Δ^M по отношение на разстоянието r_Δ. Както видяхме обаче в началото, r_Δ може да бъде произволно малко в сравнение с равномерното разстояние ρ. Подолу ще дефинираме едно разстояние, зависещо от ε, така че за всеки две фиксирани функции f и g от C_Δ^M това разстояние да клони към равномерното разстояние, когато $\varepsilon \to 0$. При това спрямо новото разстояние ε-ентропията и ε-капацитетът на C_Δ^M ще останат същите, както и спрямо r_Δ.



Фиг. 4

Нека ε е числото, по отношение на което ще пресмятаме ε-ентропията и ε-капацитета на C_Δ^M и нека $x_0' = a, \ldots, x_n' = b$ са избраните порано в § 2 точки (2.1). Да означим с Δ_i затворения интервал $[x'_{i-1}, x'_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и нека $f, g \in C_\Delta^M$. За всеки от интервалите Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ е дефинирано разстоянието r_{Δ_i} Новото разстояние r_ε в C_Δ^M (то зависи от ε чрез интервалите Δ_i) дефинираме с

$$r_\varepsilon(f,g)=\max r_{\Delta_i}(f,g).$$

Лесно се проверява, че r_ε е наистина разстояние. Ще докажем следната

Теорема 3.1. *За произволни f, $g\in C_\Delta^M$ е в сила неравенството*

$$r_\Delta(f,g)\leqq r_\varepsilon(f,g)\leqq \rho(f,g).$$

Доказателство. Дясното неравенство е непосредствено следствие на теорема 1.2:

$$\rho(f,g)=\max_{x\in\Delta}|f(x)-g(x)|=\max_i(\max_{x\in\Delta_i}|f(x)-g(x)|)\geqq r_\varepsilon(f,g).$$

От друга страна, имаме

$$\min_{\xi\in\Delta_i}\max(|x-\xi|,|f(x)-g(\xi)|)\geqq\min_{\xi\in\Delta}\max(|x-\xi|,|f(x)-g(\xi)|)$$

и следователно

$$\max_{x\in\Delta_i}\min_{\xi\in\Delta_i}\max(|x-\xi|,|f(x)-g(\xi)|)\geqq\max_{x\in\Delta_i}\min_{\xi\in\Delta}\max(|x-\xi|,|f(x)-g(\xi)|).$$

Но

$$\max_i\max_{x\in\Delta_i}\min_{\xi\in\Delta}\max(|x-\xi|,|f(x)-g(\xi)|)=\max_{x\in\Delta}\min_{\xi\in\Delta}\max(|x-\xi|,|f(x)-g(\xi)|),$$

откъдето

$$\max_i\max_{x\in\Delta_i}\min_{\xi\in\Delta_i}\max(|x-\xi|,|f(x)-g(\xi)|)\geqq\max_{x\in\Delta}\min_{\xi\in\Delta}\max(|x-\xi|,|f(x)-g(\xi)|).$$

Аналогично се получава и неравенството

$$\max_i\max_{\xi\in\Delta_i}\min_{x\in\Delta_i}\max(|x-\xi|,|f(x)-g(\xi)|)\geqq\max_{\xi\in\Delta}\min_{x\in\Delta}\max(|x-\xi|,|f(x)-g(\xi)|).$$

Последните две неравенства ни учат, че

$$r_\varepsilon(f,g)\geqq r_\Delta(f,g),$$

с което теоремата е доказана.

Теорема 3.2. *За произволни $f,g\in C_\Delta^M$ е в сила равенството*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} r_\varepsilon(f,g)=\rho(f,g).$$

Доказателство. Да допуснем противното. Това ще рече, като имаме пред вид теорема 3.1, че съществува редица от положителни числа $\{\varepsilon_\nu\}$, за която $\lim\varepsilon_\nu=0$, и

$$r_{\varepsilon_\nu}(f,g)<\rho(f,g)-\delta, \tag{3.1}$$

където $\delta>0$. Тъй като f и g са непрекъснати, може да се намери число $x_0\in\Delta$, за което

$$|f(x_0)-g(x_0)|=\rho(f,g).$$

Пак от непрекъснатостта на f и g следва съществуването на такова положително число δ_1, че за $|x-x_0|<\delta_1$ да са в сила неравенствата

$$|f(x)-f(x_0)|<{}^1/_4\,\delta,$$

$$|g(x)-g(x_0)|<{}^1/_4\,\delta.$$

Да изберем ν толкова голямо, че да имаме $\varepsilon_\nu<{}^1/_2\,\delta_1$, тогава интервалите $\Delta_i^{(\nu)}$, отговарящи на ε_ν, ще имат дължина, по-малка от δ_1. Нека интервалът $\Delta_{i_0}^{(\nu)}$ съдържа точката x_0. Съгласно избора на δ_1 за всяко $x\in\Delta_{i_0}^{(\nu)}$ ще имаме

$$|f(x)-f(x_0)|<{}^1/_4\,\delta,$$

$$|g(x)-g(x_0)|<{}^1/_4\,\delta$$

и следователно

$$|f(x)-g(\xi)|\geqq|f(x_0)-g(x_0)|-|f(x)-f(x_0)|-|g(\xi)-g(x_0)|,$$

или

$$|f(x)-g(\xi)|\geqq|f(x_0)-g(x_0)|-{}^1/_2\,\delta$$

за x и ξ от $\Delta_{i_0}^{(\nu)}$. Но тогава

$$\max(|x-\xi|,|f(x)-g(\xi)|)\geqq|f(x)-g(x_0)|-{}^1/_2\,\delta,$$

$$\max_{x\in\Delta_{i_0}^{(\nu)}}\ \min_{\xi\in\Delta_{i_0}^{(\nu)}}\ \max(|x-\xi|,|f(x)-g(\xi)|)\geqq|f(x_0)-g(x_0)|-{}^1/_2\,\delta$$

и следователно

$$r_{\Delta_{i_0}^{(\nu)}}(f,g)\geqq|f(x_0)-g(x_0)|-{}^1/_2\,\delta=\rho(f,g)-\frac{1}{2}\,\delta.$$

От друга страна пък,

$$r_{\varepsilon_\nu}(f,g)=\max_i r_{\Delta_i^{(\nu)}}(f,g)\geqq r_{\Delta_{i_0}^{(\nu)}}(f,g)\geqq\rho(f,g)-\frac{1}{2}\,\delta.$$

Последното неравенство обаче противоречи на (3.1), с което теоремата е доказана.

Лема 3.1. *Ако на f и g съответствува един и същ коридор K от $K'_{n,m}$,* то

$$r_\varepsilon(f,g)\leqq 2\,\varepsilon.$$

Доказателство. Тъй като

$$r_\varepsilon(f,g)=\max r_{\Delta_i}(f,g),$$

достатъчно е да покажем, че за всяко i имаме

$$r_{\Delta_i}(f,g)\leqq 2\varepsilon.$$

Наистина съгласно избора на интервалите Δ_i всеки от тях отговаря на една вертикална ивица на коридора K. Тъй като на f и g съответствува един и същ коридор, за всяка точка X от графиката на едната функция има точка Y от графиката на другата, така че X и Y да лежат в един и същ елемент на K. Но тогава от лема 1.4 следва, че $r_{\Delta_i}(f,g) \leqq 2\varepsilon$, а следователно и $r_\varepsilon(f,g) \leqq 2\varepsilon$.

От току-що доказаната лема 3.1 следва, , че ε-ентропията на C_Δ^M спрямо r_ε не надминава ε-ентропията спрямо r_Δ. От друга страна, ако една подсъвкупност на C_Δ^M е ε-различима спрямо r_Δ, тя е ε-различима и по отношение на r_ε, което следва от неравенството, доказано в теорема 4.1. Но тогава 2ε-капацитетът на C_Δ^M по отношение на r_ε не е по-малък от 2ε-капацитета спрямо r_Δ. Като вземем пред вид основното неравенство (0.1) и (2.14), получаваме

Теорема 3.3. *ε-ентропията и 2ε-капацитетът на C_Δ^M спрямо разстоянието r_ε съвпадат с ε-ентропията и 2ε-капацитета спрямо разстоянието r_Δ.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Сендов Бл. и Б. Пенков. ε-этропия и ε-емкость множества непрерывных функции. *Вестн. МГУ* (под печат).
2. Шэннон К. Статистическая теория передачи электрических сигналов. В сборника „Теория передачи электрических сигналов при наличии помех". М., 1953.
3. Витушкин А. Г. Оценка сложности задачи табулирования. Москва, Физматгиз, 1959.
4. Колмогоров А. Н. Оценки минимального числа элементов ε-сетей в различных функциональных пространствах и их применение к вопросу о представимости функции нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных. *УМН*, 10 (1955), 192—193.
5. Колмогоров А. Н. Асимптотические характеристики некоторых вполне ограниченных метрических пространств. *ДАН СССР*, 108 (1956), 385—389.
6. Колмогоров А. Н. и В. М. Тихомиров. ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах. *УМН*, 14. (1959), 3—86.
7. Александров П. С. и А. Н. Колмогоров. Введение в теорию функций действительного переменного. Москва, 1948.
8. Хаусдорфф Ф. Теория множеств. Москва, 1936.
9. Колмогоров А. Н. и Б. В. Гнеденко. Предельные расспределения для сумм независимых случайных величин. Москва, 1949.

Постъпила на 20. IV. 1961 г.

ε-ЭНТРОПИЯ И ε-ЕМКОСТЬ ПРОСТРАНСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Б. Сендов и Б. Пенков

(Резюме)

Пусть множество C_1^M состоит из всех функций, определенных на отрезке $\Delta=[a,b]$, непрерывных и удовлетворяющих неравенству $0 \geqq f \leqq M$. В настоящей работе даются оценки для ε-энтропии и ε-емкости множества C_Δ^M при определяемой ниже метрике r_Δ, относительно которой C_Δ^M вполне ограничено.

Результаты этой работы были опубликовани без доказательств в заметке [1].

§ 0 является вводным и содержит используемые в дальнейшем дефиниции и обозначения.

Обозначим через D замкнутый прямоугольник в плоскости xOy с основанием Δ на оси x и высотой $M > 0$. Через F_D обозначаем множество всех замкнутых множеств из точек, принадлежащих D, со следующими свойствами:

1. Если $F \in F_D$ и $x \in \Delta$ произвольно, то в F существует точка с абсциссой x.

2. Если $F \in F_D$, то множество всех точек из F, имеющих одну и ту же фиксированную абсциссу x, является замкнутым отрезком.

Очевидно, график каждой функции из C_Δ^M принадлежит F_D. В дальнейшем не делается разница между функцией и ее графиком.

В § 1, для каждой пары элементов F_D определяем расстояние $r_\Delta(F, G)$ следующим образом:

$$r_\Delta(F, G) = \max\left\{\max_{X \in F}\min_{Y \in G}\|X-Y\|_0,\ \max_{X \in G}\min_{Y \in F}\|X-Y\|_0\right\},$$

где $\|X-Y\|_0 = \max(|x_1-x_2|, |y_1-y_2|)$.

Далее доказывается, что r_Δ действительно является расстоянием и что имеют место следующие теоремы:

Теорема 1.1. *Метрическое пространство F_D полно.*

Теорема 1.2. *Если $f, g \in F_D$, то имеет место неравенство*

$$r_\Delta(f, g) \leq \rho(f, g), \tag{1.7}$$

где $\rho(f, g) = \max\limits_{x \in \Delta}|f(x)-g(x)|$ *равномерное расстояние между f и g.*

Теорема 1.3. *Если f и g удовлетворяют условию Липшица с константой L, то*

$$r_\Delta(f, g) \geq (1+L)^{-1}\rho(f, g).$$

Теорема 1.4. *Для того, чтобы последовательность $\{f_n\}$ сходилась к f равномерно на Δ, необходимо и достаточно, чтобы*

$$r_\Delta(f_n, f) \to 0.$$

В § 2 показывается, что F_D (и C_Δ^M) вполне ограниченное метрическое пространство и что его ε-энтропия и 2ε-емкость совпадают. Дальше доказываются следующие асимптотические равенства

$$H_\varepsilon(F_D) = C_{2\varepsilon}(F_D) \sim \frac{|\Delta|}{\varepsilon}\log\frac{M}{2\varepsilon}.$$

В последнем § 3, в C_Δ^M вводится новое расстояние r_ε, зависящее от ε, для которого имеют место следующие утверждения:

Теорема 3.1. *Для каждой пары $f, g \in C_\Delta^M$ имеем*

$$r_\Delta(f, g) \leq r_\varepsilon(f, g) \leq \rho(f, g).$$

Теорема 3.2. *Для каждой пары $f, g \in C_1^M$ имеем*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} r_\varepsilon (f, g) = \rho (f, g).$$

Теорема 3.3. *ε-энтропия и 2ε-емкость C_Δ^M относительно метрики r_Δ совпадают с ε-энтропией и 2ε-емкостью относительно метрики r_ε.*

ε-ENTROPIE UND ε-KAPAZITÄT DES RAUMES DER STETIGEN FUNKTIONEN

B. Sendov und B. Penkov

(Zusammenfassung)

Es bezeichne C_Δ^M die Menge der Funktionen, die im Intervall $\Delta = [a, b]$ stetig sind und dort der Ungleichung $0 \leqq f \leqq M$ genügen. Vorliegende Arbeit enthält Abschätzungen über die ε-Entropie und 2ε-Kapazität von C_Δ^M n bezug auf der weiter unten definierten Metrik r_Δ.

Die Resultate dieser Arbeit (ohne Beweise) sind schon in [1] veröffentlicht worden.

§ 0 dient als Einführung und enthält die für das übrige nötigen Definitionen und Bezeichnungen.

Es bezeichne D ein abgeschlossenes Rechteck in der Ebene xOy, mit Basis Δ und Höhe $M > 0$. Mit F_D bezeichnen wir die Klasse aller abgeschlossenen Mengen von Punkten aus D, welche folgenden Bedingungen genügen:

1. Falls $F \in F_D$, dann gibt es für jedes $x \in \Delta$ ein Punkt aus F, dessen Abszisse gleich x ist.

2. Falls $F \in F_D$, dann bildet die Untermenge der Punkte von F, die eine und dieselbe Abszisse x haben, ein abgeschlossenes Intervall.

Offensichtlich gehört die Graphik jeder Funktion aus C_Δ^M zu F_D. Im weiteren werden wir eine Funktion von ihrer Graphik nicht unterscheiden.

In § 1 wird für jedes Paar $F, G \in F_D$ folgender Abstand definiert:

$$r_\Delta (F, G) = \max \left\{ \max_{X \in F} \min_{Y \in G} \|X - Y\|_0, \max_{X \in G} \min_{Y \in F} \|X - Y\|_0 \right\},$$

$$wo \quad \|X - Y\|_0 = \max (|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|).$$

Weiter wird bewiesen, daß $r_\Delta (F, G)$ wirklich ein Abstand ist.

Satz 1. 1. *Der metrische Raum F_D ist voll.*

Satz 1. 2. *Für $f, g \in C_\Delta^M$ gilt*

$$r_\Delta (f, g) \leqq \rho (f, g), \tag{1.7}$$

wo $\rho (f, g) = \max_x |f(x) - g(x)|$ *der gleichmässige Abstand zwischen f und g ist.*

Satz 1.3. *Genügen* $f \in C_\Delta^M$ *und* $g \in C_\Delta^M$ *einer Lipschitzschen Bedingung mit Konstante* L, *so gilt*

$$r_\Delta(f,g) \geqq (1 \quad L)^{-1} \rho(f,g).$$

Satz 1.4. *Damit die Folge* $\{f_n\}$, $f_n \in C_\Delta^M$ *gleichmässig in* Δ *gegen* f *konvergiert, ist notwendig und hinreichend, dass*

$$r_\Delta(f_n, f) \to 0.$$

In § 2 wird gezeigt, daß F_D in bezug and r_Δ total beschränkt ist und die ε-Entropie und 2 ε-Kapazität gleich sind. Weiter werden folgende asymptotische Beziehungen für $H_\varepsilon(F_D)$ und $C_{2\varepsilon}(F_D)$ hergeleitet:

$$H_\varepsilon(F_D) = C_{2\varepsilon}(F_D) \sim \frac{|\Delta|}{\varepsilon} \log \frac{M}{2\varepsilon}$$

Im letzten § 3 wird ein anderer Abstand r_ε in C_Δ^M eingeführt, der von ε abhängt und für welchen folgende Sätze gelten:

Satz 3.1. *Für beliebige* $f, g \in C_\Delta^M$ *ist*

$$r_\Delta(f,g) \leqq r_\varepsilon(f,g) \leqq \rho(f,g).$$

Satz 3.2. *Für beliebige* $f, g \in C_\Delta^M$ *ist*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} r_\varepsilon(f,g) = \rho(f,g).$$

Satz 3.3. *In bezug auf* r_ε *sind die* ε*-Entropie und* 2ε*-Kapazität von* F_D *gleich der* ε*-Entropie und* 2ε*-Kapazität in bezug auf* r_Δ.