БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ ТОМ VI

ВЪРХУ ОБОБЩЕНИТЕ ПОЛИНОМИ НА БЕСЕЛ

Кирил Дочев

В настоящото съобщение е дадена оценка за нулите на обобщените полиноми на Бесел

$$P_n^{(m)}(x)=x^{-m}e^{\frac{1}{x}}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{m+2n}e^{-\frac{1}{x}}\right),\quad m\neq -2,\ -3,\ -4,\dots, \tag{1}$$

с което в частност е подобрен един резултат на M. Nassif [2] относно разпределение на нулите на полиномите $P_n(x)=(-1)^n P_n^{(0)}\left(-\frac{1}{2}x\right)$. Оказва се, че нулите на полиномите (1) са от порядък $O(n^{-1})$ и това дава възможност лесно да бъдат получени асимптотични формули за същите полиноми. По такъв начин е прецизирана асимптотичната формула на Н. Обрешков [1] за полиномите $P_n^{(m)}(x)$ и като допълнение към неговата теорема за развитие на аналитични функции в редове по полиномите (1) е доказано твърдение, аналогично на теоремата на Абел за непрекъснатост на степенните редове по окръжността на сходимост.

Теорема 1. *Нулите на* $P_n^{(m)}(x)$ *при* $n+\mathrm{Re}(m)+1>0$ *(m — произволно комплексно число, отлично от* $-2, -3, \dots$*) лежат в кръга*

$$|x|\leq\frac{1}{n+\mathrm{Re}(m)+1}.$$

Доказателство. Ще използуваме известния факт ([1], 46), че полиномите (1) удовлетворяват диференциалното уравнение

$$x^2y''+[(m+2)x-1]\,y'-n(n+m+1)y=0, \tag{2}$$

като ще приложим следното познато следствие от теоремата на Лагер.

Ако $P(x)$ е полином от степен n, ζ е произволна негова нула и C е окръжност, минаваща през точките ζ и $\zeta'=\zeta-2(n-1)P'(\zeta)[P''(\zeta)]^{-1}$, то вътре в C и вън от C има поне по една нула на $P(x)$, или всичките нули на $P(x)$ лежат по C.

Нека ζ да означава най-голямата по модул нула на $P_n^{(m)}(x)$. Като вземем пред вид диференциалното уравнение (2), получаваме за съответната точка ζ' израза

$$\zeta'=\zeta+\frac{2(n-1)\zeta^2}{(m+2)\zeta-1}. \tag{3}$$

Лесно се вижда, че трябва да бъде изпълнено неравенството

$$(4)\qquad 1+\frac{2(n-1)\zeta}{(m+2)\zeta-1}\Big| \quad 1.$$

Наистина в противен случай бихме имали $|\xi'|>|\xi|$ и както е лесно да се съобрази, бихме дошли до противоречие с цитираното по-горе следствие от теоремата на Лагер. От (4) следва неравенството

$$|\zeta| \leq (n+\mathrm{Re}(m)+1)^{-1}$$

и с това теоремата е доказана.

С това е прецизирана теоремата на M. Nassif [2], която гласи, че нулите на полинома $P_n(x) \quad (-1)^n P_n^{(0)}\left(-\frac{1}{2}x\right)$ лежат в кръга

$$|x| < [(n-1)/(2n-1)]^{\frac{1}{2}}$$

В своята работа [1] Н. Обрешков, като изхожда от явния вид на полиномите (1)

$$(5)\qquad P_n^{(m)}(x) \quad \sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{n-\mu}\binom{n}{\mu}(n+m+\mu)(n+m+\mu-1)\ldots(n+m+1)x^{\mu},$$

доказва следната асимптотична формула

$$(6)\qquad P_n^{(m)}(x)=\left(\frac{4nx}{e}\right)^n 2^m\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2x}}(1+\varepsilon_n),$$

където $\varepsilon_n \to 0$ равномерно при $n \to$ Ще покажем, че този резултат може да бъде получен лесно и с помощта на теорема 1, като освен това се получава възможност за оценка на остатъчния член.

Да означим с $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нулите на $P_n^{(m)}(x)$ и да положим

$$(7)\qquad \psi_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x_k}{x}\right).$$

Имаме

$$(8)\qquad P_n^{(m)}(x) \quad \lambda_n^{(m)}x^n\psi_n(x),$$

където

$$(9)\qquad \lambda_n^{(m)} \quad (2n+m)(2n+m-1)\ldots(n+m+1).$$

Да означим с s_k степенните сборове на x_ν, т. е. $s_k=\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu^k$. Според теорема 1 ще имаме

$$(10)\qquad s_k=O\left(\frac{1}{n^{k-1}}\right),\quad k=1,\ 2,\ldots$$

Като приложим формулата $\ln(1-z)= \quad z-\frac{z^2}{2} \quad O(z^3),\ z\to 0$, получаваме

$$\ln\psi_n(x)=-\frac{s_1}{x}-\frac{s_2}{2x^2} \quad O\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad n\to$$

като оценката е равномерна за $|x| > \delta > 0$. За s_1 и s_2 пресмятането показва, че са в сила равенствата

(11) $$s_1 = \frac{1}{2} - \frac{m}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

(12) $$s_2 = \frac{1}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

По такъв начин получаваме асимптотичната формула

(13) $$\psi_n(x) = e^{-\frac{1}{2x}}\left[1 + \frac{4mx-1}{16nx^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

(равномерно за $|x| > \delta > 0$). Ако считаме, че m е реално число и приложим формулата на Стирлинг, ще получим

(14) $$\lambda_n^{(m)} = \frac{\Gamma(2n+m+1)}{\Gamma(n+m+1)} = \left(\frac{4n}{e}\right)^n 2^m \sqrt{2}\left[1 - \frac{1+6m+6m^2}{24n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

и като резултат от (14), (13) и (8) ще имаме следната по-прецизна форма на асимптотичното равенство (6):

(15) $$P_n^{(m)}(x) = \left(\frac{4nx}{e}\right)^n 2^m \sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2x}}\left[1 - \frac{3-12mx+(2+12m+12m^2)x^2}{48x^2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

(оценката за остатъчния член е равномерна при $|x| > \delta > 0$). По аналогичен начин чрез пресмятане на следващите степенни сборове $s_3, s_4, \ldots$ могат да се изведат асимптотични формули с остатъчен член от вида $O\left(\frac{1}{n^3}\right), O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ и т. н.

В цитираната работа [1] е доказано от Н. Обрешков, че всяка холоморфна в кръга $|x| < R$ функция $f(x)$ може да бъде развита в същия кръг в ред по полиномите (1):

(16) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(m)}(x),$$

където при m цяло -1 имаме

17 $$a_n = \frac{1}{2\pi i g_n} \int_{|x|=r<R} f(x) x^m e^{\frac{1}{x}} P_n^{(m)}(x)\,dx,$$

(18) $$g_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|} x^m e^{\frac{1}{x}} \left[P_n^{(m)}(x)\right]^2 dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+2n+1)(m+n)!}.$$

Да отбележим, че ако в (17) заместим функцията $f(x)$ с нейното маклореново развитие и пресметнем чрез интегриране по части интегралите от вида $I_{k,n} \int x^{k+m} e^{\frac{1}{x}} P_n^{(m)}(x)\,dx$, можем при m цяло неотрицателно да дадем на коефициентите a_n следния вид:

$$a_n = \sum_{k=n}^{\infty} f^{(k)}(0) \frac{(m+2n+1).(m+n)!}{n!(k-n)!(m+n+k+1)!}. \tag{19}$$

Последното равенство (с несъществена разлика в нормировката на полиномите (1)) е обобщение на съответната формула от [2], отнасяща се до случая $m=0$.

Както е известно, редовете по полиномите (1) притежават радиус и кръг на сходимост и в това отношение са напълно аналогични на степенните редове. Ние ще докажем следната теорема, която е подобна на съответната теорема на Абел за степенните редове.

Теорема 2. *Ако редът*

(20) $s=\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(m)}(x_0)$ *(m—фиксирано компл. число, $x_0 \neq 0$) е сходящ, $f(x)$ означава сумата на реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(m)}(x)$ при $|x|<|x_0|$ и D е частта от кръга $|x|<|x_0|$, която се намира между две фиксирани хорди през x_0, то при $x \to x_0$, $x \in D$ имаме $f(x) \to s$.*

Доказателство. За удобство да считаме $x_0=1$. Общият случай се разглежда аналогично. Както е известно, при наложените ограничения за x и при подходяща положителна константа A ще имаме

$$\frac{|1-x|}{1-|x|} \leq A. \tag{21}$$

От теорема 1 следва, че поне при достатъчно големи стойности на n ще имаме $P_n^{(m)}(1) \neq 0$. Ще считаме, че последното неравенство е в сила при всяко $n=0, 1, \ldots$, защото в противен случай бихме могли да разгледаме подходящ остатък на реда (20). Да положим $q_n(x)=\frac{P_n^{(m)}(x)}{P_n^{(m)}(1)}$. Очевидно при всяко фиксирано n ще имаме

$$\lim_{x \to 1} q_n(x)=1. \tag{22}$$

Да положим

$$r_k(x)=(q_k(x)-q_{k+1}(x))\, e^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)}, \quad k=0, 1, \ldots \tag{23}$$

С помощта на асимптотичната формула (13) получаваме

$$q_n(x)=\frac{x^n e^{-\frac{1}{2x}}\left[1-\frac{\sigma(x)}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]}{e^{-\frac{1}{2}}\left[1-\frac{\sigma(1)}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]}=x^n e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)}\left[1-\frac{\sigma(x)-\sigma(1)}{n} \quad O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right],$$

където

$$\sigma(x)=\frac{1-4mx}{16x^2} \tag{24}$$

и оценките са равномерни относно разглежданите стойности на x. Като заместим получения израз за $q_n(x)$ в (23), ще имаме

$$r_n(x) = x^n - x^{n+1} - x^n \frac{\sigma(x) - \sigma(1)}{n} + x^{n+1} \frac{\sigma(x) - \sigma(1)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{25}$$

Очевидно отношението $\frac{\sigma(x) - \sigma(1)}{x - 1}$ е ограничено при $x \to 1$, така че можем да пишем

$$|\sigma(x) - \sigma(1)| \leq M \cdot |x - 1| \quad (M = \text{const.}). \tag{26}$$

От (25) и (26) следва, че равномерно по x ще имаме

$$|r_n(x)| \leq |x^n - x^{n+1}| + 2M|x-1|\,|x^n| + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{27}$$

Последното неравенство ни дава възможност да заключим, че съществува константа $C > 0$ такава, че да е в сила неравенството

$$\sum_{n=0}^{\infty} |r_n(x)| \leq (1 + 2M)\frac{|1-x|}{1-|x|} + C. \tag{28}$$

Ако B означава една горна граница на $\left|e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right|$, то, както се вижда от 28), (23) и (21), ще имаме

$$\sum_{n=0}^{\infty} |q_n(x) - q_{n+1}(x)| \leq L = B[(1 + 2M)A + C] = \text{const.} \tag{29}$$

По условие редът $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(m)}(1)$ е сходящ. Формулите (22) и (29) ни дават възможност да приложим една известна теорема за сумиране на редовете ([3], 83) и да направим заключението, че при $x \to 1$, $x \in D$ ще имаме

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(m)}(1)\, q_n(x) \to s.$$

С това теорема 2 е доказана.

Постъпила на 16. I. 1962 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Обрешков. Върху някои ортогонални полиноми в комплексна област, *Известия на Мат. инст.* **2**, *2*, 1956, 45—68.

[2] M. Nassif. Note on the Bessel polynomials, *Trans. American Math. Soc.*, **77** (1954), 408—412.

[3] Р. Кук. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, Москва, Физматгиз, 1960.

ОБ ОБОБЩЕННЫХ МНОГОЧЛЕНАХ БЕССЕЛЯ

К. Дочев

(Резюме)

В настоящем сообщении доказывается, что нули n-го обобщенного многочлена Бесселя

$$P_n^{(m)}(x)=x^{-m}e^{-\frac{1}{x}}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{m+2n}e^{\frac{1}{x}}\right],\quad m\neq-2,\ -3,\ldots \tag{1}$$

лежат при $n+\mathrm{Re}(m)+1>0$ в круге

$$|x|\leq(n+\mathrm{Re}(m)+1)^{-1}.$$

Таким образом улучшен результат М. Насифа [2] относительно распределения нулей многочленов $P_n(x)=(-1)^n P_n^{(0)}\left(-\frac{1}{2}x\right)$. Полученна оценка используется для вывода асимптотической формулы (6) Н. Обрешкова [1] и ее уточнения (15). Как дополнение к теореме Н. Обрешкова [1] для разложения аналитических функций в ряд многочленов (1) доказано утверждение, аналогичное теореме Абеля, о непрерывности степенных рядов по границе круга сходимости.

SUR LES POLYNÔMES GÉNÉRALISÉS DE BESSEL

K. Dočev

(Résumé)

L'auteur démontre que les zéros du polynôme généralisé de Bessel d'ordre n

$$P_n^{(m)}(x)=x^{-m}e^{-\frac{1}{x}}\left[\frac{d^n}{dx^n}x^{m+2n}e^{\frac{1}{x}}\right],\quad m\neq-2,\ -3, \tag{1}$$

dans le cas où $n+\mathrm{Re}(m)+1>0$, se trouvent dans le cercle

$$|x|\leq(n+\mathrm{Re}(m)+1)^{-1}.$$

Ce théorème précise un résultat de M. Nassif [2], concernant la distribution des zéros des polynômes $P_n(x)=(-1)^n P_n^{(0)}\left(-\frac{1}{2}x\right)$. L'estimation obtenue est utilisée pour déduire la formule asymptotique (6) de N. Obrechkoff [1] et sa précision (15). Comme complément du théorème de N. Obrechkoff [1], concernant le développement des fonctions analytiques suivant les polynômes (1), on démontre un résultat, analogue au théorème d'Abel sur la continuité des séries entières sur le contour du cercle de convergence.