БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE DES SCIENCES DE BULGARIE
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Vol.) VII

ИЗЧИСЛИМИ И μ-РЕКУРСИВНИ ОПЕРАТОРИ

Димитър Г. Скордев

1. Уводни бележки

Едно от важните понятия на теорията на алгоритмите е понятието изчислимост за оператори, които преобразуват аритметични функции в аритметични функции. Известни са няколко дефиниции на това понятие. Преди всичко имаме понятието частично-рекурсивен оператор, въведено от Клини ([2], § 63) под формата на функция, равномерно частично-рекурсивна относно дадени функции. Понятието изчислима операция, въведено от Успенский в [5], позволява да се даде една друга дефиниция на понятието изчислим оператор. Успенский разглежда операции, които преобразуват множества от конструктивни обекти в множества от конструктивни обекти (например множества от m-орки естествени числа в множества от n-орки естествени числа). Изискването за изчислимост на една такава операция се състои от две условия. Едното от тях изисква образът на всяко множество от дефиниционната област на разглежданата операция да съвпада със сумата от образите на всевъзможните крайни подмножества на това множество. Второто условие, грубо казано, изисква да съществува ефективно правило, по което дадената операция да преобразува крайните множества в рекурсивно номеруеми множества[1]. След като имаме понятието изчислима операция, може да се даде следната дефиниция: един оператор, който преобразува аритметични функции в аритметични функции, се нарича изчислим, ако съществува изчислима операция, която, приложена към графиката на дадена функция, дава графиката на нейния образ; съгласно теорема 7 от [5] тази дефиниция е еквивалентна с дефиницията на Клини. У Дейвис [1] срещаме дефиниция, която е в същия дух, както дефиницията на Успенский (и е еквивалентна на нея), но не използува операции върху множества (вместо крайни множества се разглеждат функции с крайна дефиниционна област). По-нататък ще дадем точната формулировка на тази дефиниция (с една малка модификация: Дейвис разглежда функционали от няколко произволни функции, а ние разглеждаме оператори от една произволна функция); оператор, който удовлетворява нейните условия, ще наричаме изчислим (Дейвис употребява термина „completely computable", т. е. „напълно изчислим").

---

[1] Ние употребяваме термина „рекурсивно номеруемо множество" като превод на руския термин „рекурсивно-перечислимое множество" и на английския „recursively enumerable set".

Наред със споменатите дефиниции съществува една друга, която произлиза от работата [4] на Тюринг. В тази работа е въведено понятието изчислимост посредством сметачна машина (машина на Тюринг) на една функция относно дадена функция, приемаща само две стойности. Разликата между тази изчислимост и обикновената изчислимост посредством машина на Тюринг се състои в това, че се допуска в определени случаи машината да задава въпроси за стойността на дадената функция в някоя точка (точката се посочва от машината) и се предполага, че исканата стойност се дава веднага на машината, след което последната продължава своята работа. По-подробно и без ограничението, че дадената функция приема само две стойности, същото понятие е дефинирано у Клини ([2], § 67), където освен това се въвежда и понятието функция, равномерно изчислима в смисъл на Тюринг относно дадени функции, т. е. понятието о п е р а т о р, и з ч и с л и м в с м и с ъ л н а Т ю р и н г. Трябва да отбележим, че у Клини дадените функции в дефиницията на относителна изчислимост се предполагат дефинирани навсякъде. Поради това той разглежда операторите само върху класа на навсякъде дефинираните функции. При това условие Клини доказва, че всеки частично-рекурсивен оператор е изчислим в смисъл на Тюринг (теорема XXVIII от § 68) и обратно (теорема XXIX от § 69). Не е трудно обаче да се модифицира понятието относителна изчислимост в смисъл на Тюринг така, че да са допустими и не навсякъде дефинирани дадени функции. За целта трябва да се предположи, че ако при някоя ситуация (вж. [2], § 67) машината задава въпрос за стойността на някоя от дадените функции в някоя точка, то при тази ситуация машината извършва действие тогава и само тогава, когато въпросната функция е дефинирана в посочената точка, като в случай че функцията е дефинирана, действието е същото, както в дефиницията от [2]. При това работата на машината може да даде резултат само в случай че машината преобразува първоначалната ситуация в някоя заключителна ситуация (ситуации, при които се задава въпрос, не са заключителни). Описаната модификация дава възможност да се дефинира понятието изчислимост в смисъл на Тюринг и за оператори, които се прилагат към всякакви аритметични функции, а не само към такива, които са дефинирани навсякъде. Обаче доказателството на теорема XXVIII губи сила без предположението, че дадените функции са дефинирани навсякъде, защото в това доказателство се използува следствието от теорема XIX от § 63, където дадените функции също се предполагат дефинирани навсякъде.

Да наречем един оператор μ-р е к у р с и в е н, ако може да бъде построен от оператори, които преобразуват дадените функции в някоя от тях или в някоя от базисните примитивно-рекурсивни функции, с помощта на операциите суперпозиция на функциите-образи, примитивна рекурсия и намиране на най-малко число (μ-операция)[1]. В такъв случай споменатото по-горе следствие заедно с теорема XVIII от § 63 на [2] изразява факта, че ако операторите се прилагат само към навсякъде дефинирани функции, то класът на частично-рекурсивните оператори съвпада с класа на μ-рекурсивните.

[1] По-подробна дефиниция на μ-рекурсивност ще формулираме по-нататък. Терминът „μ-рекурсивност“ произлиза от Клини (вж. [2], § 62).

И така, трите класа оператори: частично-рекурсивни, изчислими в смисъл на Тюринг и μ-рекурсивни съвпадат, в случай че прилагаме операторите само към навсякъде дефинирани функции. Възниква въпросът, какви взаимоотношения съществуват между тези класове, ако разглеждаме операторите върху всевъзможните аритметични функции, а не само върху навсякъде дефинираните. В книгата на Клини не е даден отговор на този въпрос; отбелязано е само, че доказателството на теорема XIX от § 63 губи сила без предположението, че дадените функции са дефинирани навсякъде.

Най-напред нека се спрем на въпроса за взаимоотношението между последните два класа. Както ще видим, отговорът на този въпрос се съдържа по същество в [2]. Действително, ако внимателно се разгледат доказателството на теорема XXVIII от § 68 и доказателството на теорема XXIX от § 69, може да се забележи следното: предположението на теорема XXIX, че дадените функции са дефинирани навсякъде, е свързано само с обстоятелството, че в дефиницията на относителна изчислимост, от която изхожда Клини, е направено същото предположение. Доказателството на теорема XXIX остава валидно и тогава, когато понятието относителна изчислимост се разшири така, както споменахме малко по-рано. Същото доказателство дава и μ-рекурсивността на разглеждания оператор, макар това изрично да не е отбелязано. Що се касае до доказателството на теорема XXVIII, там по същество се показва, че всеки μ-рекурсивен оператор е изчислим в смисъл на Тюринг, защото в това доказателство от частичната рекурсивност веднага се прави заключение за μ-рекурсивност (понеже дадените функции се предполагат дефинирани навсякъде) и по-нататък се използува само μ-рекурсивността, а не и предположението, че дадените функции са дефинирани навсякъде. По такъв начин виждаме, че понятията изчислимост в смисъл на Тюринг и μ-рекурсивност съвпадат и тогава, когато се допускат не навсякъде дефинирани функции. Касае се за едно и също понятие, което по-нататък ще разглеждаме, като изхождаме от дефиницията на μ-рекурсивност.[1]

По такъв начин остава въпросът, каква е връзката между класа на μ-рекурсивните оператори и класа на частично-рекурсивните (или все едно на изчислимите) оператори.[2] Тъй като в теорема XVIII от § 63 на [2] не се предполага, че дадените функции са дефинирани навсякъде, от тази теорема следва, че всеки μ-рекурсивен оператор е частично-рекурсивен. Обратното обаче не е вярно, както ще видим по-нататък с помощта на примери. Настоящата работа има за цел да характеризира μ-рекурсивните

[1] Разбира се, бихме могли да поставим в основата изчислимостта в смисъл на Тюринг. В такъв случай някои от доказателствата могат сравнително лесно да се изложат на един интуитивен уровен, обаче струва ни се, че ще е необходимо повече труд, за да им се придаде пълна математична строгост.

[2] Вниманието на автора бе насочено към този въпрос благодарение на В. А. Успенский, който постави въпроса пред семинара по алгоритмична теория на множествата в Московския университет през 1961 г. Скоро след това бяха посочени примери за изчислими оператори, които не са μ-рекурсивни, от А. В. Кузнецов и от автора (използуваха се съответно теорема 2 и 3 от настоящата работа, доказани директно). По-късно авторът доказа необходимото и достатъчно условие за μ-рекурсивност, което се дава от теорема 1. Това условие беше докладвано на споменатия семинар заедно с още някои от резултатите, поместени в настоящата работа.

оператори между всички изчислими оператори.[1] Това се постига чрез теорема 1, която дава едно необходимо и достатъчно условие за μ-рекурсивност, както и чрез теорема 8, която показва, че μ-рекурсивните оператори са, тъй да се каже, „достатъчно много" (защото всеки изчислим оператор може да се получи от подходящ μ-рекурсивен оператор чрез една проста операция). Освен това от теорема 1 се получават като следствия няколко необходими условия за μ-рекурсивност (теореми 2, 3, 4, 5, 7); разглеждат се и различни примери, свързани с тях. Теорема 6 дава пример за двойка функции, от които втората е образ на първата чрез подходящ изчислим оператор, но не може да се получи от нея чрез никакъв μ-рекурсивен оператор.[2]

Няколко думи върху логическите средства, които използуваме. Работата не удовлетворява много от изискванията, свързани с тъй наречената конструктивна гледна точка. Например понятията функция и оператор не могат да се разглеждат като конструктивни, ако в тяхното разбиране не се внесат някои модификации. Също така доказателствата на теорема 6 и 7 са явно неконструктивни (особено на първата). Все пак старали сме се да сведем използуването на неконструктивни начини на разсъждение до минимум. Например използуването на закона за изключеното трето на много места е избягнато, като в замяна на това се използува тъй нареченият „ленинградски принцип", изказан от А. А. Марков [3]. Този принцип може да бъде формулиран по следния начин: ако едно число (или система от числа) не принадлежи на допълнението на някое рекурсивно номеруемо множество, то това число (или система от числа) принадлежи на самото множество. Благодарение на този принцип става допустимо от конструктивна гледна точка премахването на двойно отрицание пред твърдения от вида „дадена частично-рекурсивна функция е дефинирана в дадена точка" или „съществува число y такова, че системата от числа $(x_1, \ldots, x_n, y)$ принадлежи на дадено рекурсивно номеруемо множество" и други подобни. Добре е да отбележим обаче, че бележките, които токущо направихме, стават излишни, ако застанем на класическата гледна точка, понеже всички разсъждения в работата са допустими от класическа гледна точка.

2. Предварителни дефиниции и обозначения

Множеството на целите неотрицателни числа ще означаваме със Z Можеството на всевъзможните редици от k елементи на Z при k цяло неотрицателно ще означаваме със Z^k (множеството Z^0 се състои от един единствен член — празната редица).

Аритметична функция на k променливи ще наричаме всяко съответствие, което изобразява някое подмножество на Z^k в Z. Нека f и g са две аритметични функции. Ще казваме, че функцията g е продължение на функцията f, ако дефиниционната област на функцията f е подмножество на дефиниционната област на функцията g и във всички точки от дефиниционната област на f двете функ-

[1] За простота не ще се занимаваме с оператори, които се прилагат към системи от повече от една функция.

[2] Въпросът за съществуване на такива функции бе поставен също от В. А. Успенский.

ции съвпадат. За да изразим, че g е продължение на f, ще пишем $g \supset f$ или $f \subset g$. Очевидно е, че ако е дадено едно множество $\mathfrak{M}$ от аритметични функции, които притежават общо продължение, то тези функции притежават (точно едно) общо продължение с дефиниционна област, равна на сумата от техните дефиниционни области; това общо продължение на функциите от $\mathfrak{M}$ ще наричаме обединение на функциите от $\mathfrak{M}$. Ако f е една аритметична функция на k променливи и $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k)$ е някакво условие, ние можем да дефинираме една функция на k променливи g по следния начин:

$$g(x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k), \text{ ако } \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k).$$

Смисълът на тази дефиниция е такъв: с g е означена една функция, която е дефинирана точно за онези стойности на $x_1, \ldots, x_k$, за които точката $(x_1, \ldots, x_k)$ принадлежи на дефиниционната област на функцията f и за които е изпълнено условието $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k)$; за такива стойности на аргументите функцията g съвпада с функцията f. По-общо, ако са дадени n функции на k променливи $f_1, \ldots, f_n$ и n условия $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, можем да напишем схемата

$$g(x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_k), & \text{ако } \mathfrak{A}_1(x_1, \ldots, x_k), \\ \\ f_n(x_1, \ldots, x_k), & \text{ако } \mathfrak{A}_n(x_1, \ldots, x_k). \end{cases}$$

Функцията g, която се дефинира чрез тази схема, представлява обединението на функциите $g_1, \ldots, g_n$, дефинирани по следния начин:

$$g_i(x_1, \ldots, x_k) = f_i(x_1, \ldots, x_k), \text{ ако } \mathfrak{A}_i(x_1, \ldots, x_k);$$

разбира се, такова обединение съществува само при условие, че тези функции притежават общо продължение.

Операцията μ се дефинира, както обикновено. Нека f е аритметична функция на $k+1$ променливи, а $x_1, \ldots, x_k$ са цели неотрицателни числа. Символът $\mu y[f(x_1, \ldots, x_k, y) = 0]$ е дефиниран точно тогава, когато съществува число z със следното свойство: $f(x_1, \ldots, x_k, z)$ е дефинирано и е равно на 0, а за всяко y, което е по-малко от z, $f(x_1, \ldots, x_k, y)$ е дефинирано и различно от 0; ако това условие е изпълнено, то стойността на разглеждания символ е (единственото) число z със споменатото свойство.

Ще предполагаме, че читателят е запознат с основните понятия на теорията на рекурсивните функции като примитивно-рекурсивна, общорекурсивна и частично-рекурсивна функция, рекурсивно номеруемо множество и др., както и с елементарните им свойства.[1]

Понятието оператор ще се употребява по следния начин. Нека k и l са цели неотрицателни числа. Аритметичен оператор от тип $k \to l$ ще наричаме всяко съответствие, което изобразява множеството на всички аритметични функции на k променливи в множеството на аритметичните функции на l променливи. Ако F е аритметичен оператор от тип $k \to l$, а f е аритметична функция на k променливи, то с $\mathrm{F}[f]$ ще означаваме

[1] Теорията на рекурсивните функции е изложена в редица книги, като например [2], [6], [1].

аритметичната функция на l променливи, в която операторът F изобразява функцията f.

Тъй като ще имаме работа главно с функции, които не са дефинирани навсякъде, необходимо е да уточним употребата на знака $=$. Да наречем т е р м всеки израз, чиято стойност е цяло неотрицателно число, ако въобще изразът притежава стойност. Термове са например изрази като $f(x_1, \ldots, x_k)$ и $g(h(u, v), w)$, където f, g и h са обозначения на аритметични функции на съответния брой променливи, а $x_1, \ldots, x_k$, u, v, w са цели неотрицателни числа. (Бихме могли да дефинираме понятието терм по-прецизно, но това ще отнеме много време, без да е особено необходимо в случая.) Нека $\mathfrak{t}_1$ и $\mathfrak{t}_2$ са два терма. Равенството $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2$ ще считаме вярно, ако е изпълнено следното условие: ако едно цяло неотрицателно число е стойност на $\mathfrak{t}_1$, то е стойност и на $\mathfrak{t}_2$ и обратно. Следователно ако изразите $\mathfrak{t}_1$ и $\mathfrak{t}_2$ имат една и съща стойност, равенството $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2$ е вярно, но и ако никой от тях не притежава стойност, равенството е пак вярно. В някои случаи със знака $=$ ще свързваме и обозначения на функции. В този случай знакът ще има обичайния си смисъл.

Ако $\mathfrak{t}$ е един терм, то за да изразим, че термът $\mathfrak{t}$ притежава стойност, ще пишем $!\,\mathfrak{t}$. Например, ако f е една аритметична функция на k променливи, а $(x_1, \ldots, x_k)$ е точка от Z^k, то твърдението $!f(x_1, \ldots, x_k)$ е вярно точно тогава, когато точката $(x_1, \ldots, x_k)$ принадлежи на дефиниционната област на функцията f. Ако g и h са аритметични функции на две променливи, а u, v и w са цели неотрицателни числа, то твърдението $!g(h(u, v), w)$ е вярно точно тогава, когато точката (u, v) принадлежи на дефиниционната област на функцията h, а точката (s, w), където s е стойността на терма $h(u, v)$, принадлежи на дефиниционната област на функцията g.

За да записваме по-съкратено някои съждения и условия, ще си служим понякога с логическа символика. Ще използуваме следните знаци: за конюнкция &, за дисюнкция $\vee$, за импликация $\rightarrow$, за еквивалентност $\equiv$, за отрицание $\urcorner$, квантор за всеобщност $\forall$, квантор за съществуване $\exists$. Както обикновено, първите четири ще пишем между съжденията, които свързват, а останалите — пред съответните съждения (кванторите заедно със съответната свързана променлива). Променливите пробягват множеството на целите неотрицателни числа. Понякога при употребата на квантори ще подчиняваме променливите на допълнителни условия. Например $\underset{1 \leq x \leq a}{\forall x}\, \mathfrak{A}$ означава „за всяко x, което удовлетворява неравенствата $1 \leq x \leq a$, е изпълнено условието $\mathfrak{A}$“, $\underset{x < a}{\exists x}\, \mathfrak{A}$ означава „съществува $x < a$, за което е изпълнено условието $\mathfrak{A}$“.

3. Финитни функции и тяхната номерация

Една аритметична функция ще наричаме ф и н и т н а, ако дефиниционната ѝ област се състои от краен брой точки. Финитните функции на даден положителен брой променливи (както и всичките финитни функции) са изброимо много и следователно могат да бъдат номерирани (по безбройно много различни начини). Ние ще използуваме някои специални номерации, които са, тъй да се каже, ефективни.

Нека k е цяло положително число. Да означим с M_k множеството на всевъзможните матрици T от вида

$$(1) \qquad T=\left\| \begin{matrix} x_{11} & x_{12} \dots x_{1k} & y_1 \\ x_{21} & x_{22} \dots x_{2k} & y_2 \\ & & \\ x_{p1} & x_{p2} \dots x_{pk} & y_p \end{matrix} \right\|,$$

където p, x_{ij} при $1 \leqq i \leqq p$, $1 \leqq j \leqq k$ и y_i при $1 \leqq i \leqq k$ са цели неотрицателни числа (при $p=0$ имаме празна матрица). Множеството M_k е изброимо и значи може да се установи взаимно еднозначно съответствие между M_k и множеството на целите неотрицателни числа. За нас ще бъде съществено, че това съответствие може да се избере по такъв начин, щото намирането на матрицата по нейния номер и намирането на номера по дадена матрица да може да се извършва ефективно. По-точно вярно е следното твърдение.

Лема 1. *Съществува еднозначно и обратимо изображение $\nu(T)$ на множеството M_k върху множеството Z и примитивно-рекурсивни функции $\pi(n)$, $\xi_j(n, i)$, $j=1, \dots, k$, $\eta(n, i)$ и $\sigma(n, x_1, \dots, x_k, y)$ със следните свойства:*

а) *ако T има вида (1), то*

$$p=\pi(\nu(T)),$$

$$x_{ij}=\xi_j(\nu(T), i) \text{ при } 1 \leqq i \leqq p,\ 1 \leqq j \leqq k,$$

$$y_i=\eta(\nu(T), i) \text{ при } 1 \leqq i \leqq p;$$

б) *ако T' се получава от T, като припишем отдолу още един ред $x_1, \dots, x_k, y$, то*

$$\nu(T')=\sigma(\nu(T), x_1, \dots x_k, y);$$

в) *ако $p=0$, то $\nu(T)=0$.*

Ще си позволим да пропуснем доказателството на тази лема пред вид на това, че подобни номерации на конструктивни обекти са твърде обичайни; все пак можем да насочим читатели например към [6], § 4, п. 5 и 6.

В по-нататъшното изложение ще предполагаме, че са дадени изображение ν и примитивно-рекурсивни функции π, ξ_j, η и σ със свойствата, формулирани в лема 1.

На всяка матрица T от M_k можем да съпоставим една финитна аритметична функция на k променливи φ по следния начин. Нека T има вида (1) и нека $x_1, \dots, x_k$ са цели неотрицателни числа; тогава търсим такова цяло число i, удовлетворяващо неравенствата $1 \leqq i \leqq p$, че $x_{i1}=x_1$, $x_{i2}=x_2$, $\dots$, $x_{ik}=x_k$. Ако такова число няма, $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ не е дефинирано; ако има такова число, да означим с i_0 най-малкото между числата i с разглежданото свойство и да положим

$$\varphi(x_1, \dots, x_k)=y_{i_0}.$$

Нека n е цяло неотрицателно число. Ще означаваме с $\varphi_n^{(k)}$ финитната функция, която съответствува по горе описаното правило на онази матрица T от M_k, за която $\nu(T)=n$. По този начин получаваме една номерация на всевъзможните финитни аритметични функции на k променливи. Да отбележим някои свойства на тази номерация.

Лема 2. *Аритметичният предикат* $P^{(k)}$, *определен с еквивалентността*

$$P^{(k)}(n, x_1, \ldots, x_k) \equiv !\varphi_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k),$$

е примитивно-рекурсивен.

Доказателство. Условието $!\varphi_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k)$ е равносилно с условието

$$\underset{1 \leq i \leq \pi(n)}{\exists i} \quad \underset{1 \leq j \leq k}{\forall j} \quad (\xi_j(n, i) = x_j).$$

Лема 3. *Ако положим*

$$\psi^{(k)}(n, x_1, \ldots, x_k) = \varphi_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k),$$

функцията $\psi^{(k)}$ е *частично-рекурсивна.*

Доказателство. Частичната рекурсивност на функцията $\psi^{(k)}$ следва от равенството

$$\psi^{(k)}(n, x_1, \ldots, x_k) = \eta\ (n, \iota\ (n, x_1, \ldots, x_k)),$$

където

$$\iota\ (n, x_1, \ldots, x_k) = \mu i \left(\prod_{r=1}^{\pi(n)} |i - r| + \sum_{j=1}^{k} |\xi_j(n, i) - x_j| = 0 \right).$$

Лема 4. *Аритметичният предикат* $Q^{(k)}$, *определен с еквивалентността* $Q^{(k)}(m, n) \equiv (\varphi_m^{(k)} \subset \varphi_n^{(k)})$,

е примитивно-рекурсивен.

Доказателство. Преди всичко ще отбележим, че функцията $\psi^{(k)}$, за която става дума в лема 3, притежава примитивно-рекурсивно продължение $\overline{\psi}^{(k)}$. Това следва от факта, че функцията $\iota(n, x_1, \ldots, x_k)$ притежава примитивно-рекурсивно продължение. Но в такъв случай можем да използуваме, че условието $\varphi_m^{(k)} \subset \varphi_n^{(k)}$ е равносилно с условието

$$\underset{1 \leq i \leq \pi(m)}{\forall i} \Big(P^{(k)}(n, \xi_1(m, i), \ldots, \xi_k(m, i)) \,\&\, \overline{\psi}^{(k)}(m, \xi_1(m, i), \ldots, \xi_k(m, i)) =$$
$$= \overline{\psi}^{(k)}(n, \xi_1(m, i), \ldots, \xi_k(m, i))\Big).$$

Лема 5. *Ако функцията* $\varphi_n^{(k)}$ *не е дефинирана в точката* $(x_1^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)})$ *и положим*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} \varphi_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k), & \text{ако } !\varphi_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k), \\ y^{(0)}, & \text{ако } x_1 = x_1^{(0)}, \ldots, x_k = x_k^{(0)}, \end{cases}$$

то функцията φ *съвпада с функцията* $\varphi_{n'}^{(k)}$, *където*

$$n' = \sigma(n, x_1^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}, y^{(0)}).$$

Доказателство. Ако към матрицата с номер n, на която съответствува функцията $\varphi_n^{(k)}$, припишем отдолу реда

$$x_1^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}, y^{(0)},$$

ще получим една матрица, на която съответствува функцията φ.

4. Изчислимост и μ-рекурсивност на оператори и връзката между тези понятия

Нека k е цяло положително число, а l е цяло неотрицателно число и нека F е аритметичен оператор от тип $k \to l$. Следвайки Дейвис [1], ще казваме, че операторът F е **компактен**, ако е изпълнено следното условие: при всеки избор на аритметичната функция на k променливи f и на числата $u_1, \ldots, u_l$, v от Z равенството

$$F[f]\ (u_1, \ldots, u_l) = v \tag{2}$$

е изпълнено тогава и само тогава, когато съществува финитна функция $\varphi \subset f$, за която

$$F[\varphi](u_1, \ldots, u_l) = v. \tag{3}$$

Ще казваме, че операторът F е **изчислим**, ако той е компактен и функцията

$$\theta_F(n, u_1, \ldots, u_l) = F[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)$$

е частично-рекурсивна.

Забележка. Въпреки че в дефиницията на понятието изчислим оператор се предполага, че е дадена някаква номерация на финитните функции, която е от разгледания по-горе тип, множеството на изчислимите оператори не зависи от конкретния избор на тази номерация. И наистина, ако $\nu_1(T)$ и $\nu_2(T)$ са две изображения на M_k върху Z, които удовлетворяват условията на лема 1, лесно се вижда, че ще съществува примитивно-рекурсивна функция $\varrho(n)$ такава, че за всяка матрица $T \in M_k$ да бъде изпълнено равенството $\nu_2(T) = \varrho(\nu_1(T))$, а от това веднага следва, че понятията за изчислимост, получени с помощта на тези две номерации, съвпадат.

Нека k е фиксирано цяло положително число. Понятието „μ-рекурсивен оператор от тип $k \to l$“, където l взема произволни цели неотрицателни стойности, се въвежда с помощта на следната индуктивна дефиниция (в която f означава произволна аритметична функция на k променливи):

I. Операторът F от тип $k \to 0$, който се определя с равенството

$$F[f]() = 0^1, \tag{4}$$

е μ-рекурсивен.

II. Операторът F от тип $k \to 1$, който се определя с равенството

$$F[f](u) = u + 1, \tag{5}$$

е μ-рекурсивен.

III. Ако i и l са цели положителни числа и $i \leq l$, то операторът F от тип $k \to l$, който се определя с равенството

$$F[f](u_1, \ldots, u_l) = u_i, \tag{6}$$

е μ-рекурсивен.

---

[1] Ако g е аритметична функция на 0 променливи, то с $g()$ означаваме стойността на функцията g в единствената точка на Z^0, в случай че g е дефинирана в тази точка.

IV. Операторът F от тип $k \to k$, който се определя с равенството

$$F[f] = f, \tag{7}$$

е μ-рекурсивен.

V. Ако $F_1, \ldots, F_m$ ($m \geq 1$) са μ-рекурсивни оператори от тип $k \to l$ ($l \geq 0$), а F_0 е μ-рекурсивен оператор от тип $k \to m$, то операторът F от тип $k \to l$, който се определя с равенството

$$F[f](u_1, \ldots, u_l) = F_0[f](F_1[f](u_1, \ldots, u_l), \ldots, F_m[f](u_1, \ldots, u_l)), \tag{8}$$

е μ-рекурсивен.

VI. Ако F_0 е μ-рекурсивен оператор от тип $k \to l-1$ ($l \geq 1$), а F_1 е μ-рекурсивен оператор от тип $k \to l+1$, то операторът F от тип $k \to l$, който се определя посредством равенствата

$$F[f](u_1, \ldots, u_{l-1}, 0) = F_0[f](u_1, \ldots, u_{l-1}), \tag{9}$$

$$F[f](u_1, \ldots, u_{l-1}, u_l+1) = F_1[f](u_1, \ldots, u_{l-1}, u_l, F[f](u_1, \ldots, u_{l-1}, u_l)), \tag{10}$$

е μ-рекурсивен.

VII. Ако F_0 е μ-рекурсивен оператор от тип $k \to l+1$ ($l \geq 0$), то операторът F от тип $k \to l$, който се определя с равенството

$$F[f](u_1, \ldots, u_l) = \mu y(F_0[f](u_1, \ldots, u_l, y) = 0), \tag{11}$$

е μ-рекурсивен.

За да можем да формулираме теорема 1, която дава едно необходимо и достатъчно условие за μ-рекурсивност, ще трябва да дадем още една дефиниция. Нека k е цяло положително число, а l е цяло неотрицателно число и нека F е аритметичен оператор от тип $k \to l$. Н а с о ч в а щ а о п е р а ц и я з а о п е р а т о р а F ще наричаме всяка система от k аритметични функции на $l+1$ променливи $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$, която притежава следните свойства:

а) коя да е от функциите $\delta_1, \ldots, \delta_k$ е дефинирана в точката $(n, u_1, \ldots, u_l)$ точно тогава, когато

$$\neg !F[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l) \& \exists p (\varphi_p^{(k)} \supset \varphi_n^{(k)} \& !F[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)); \tag{12}$$

б) ако функциите $\delta_1, \ldots \delta_k$ са дефинирани в точката $(n, u_1, \ldots, u_l)$ и ако

$$\delta_i(n, u_1, \ldots, u_l) = x_i \quad \text{при } i = 1, \ldots, k,$$

то

$$\neg !\varphi_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) \& \forall p(\varphi_p^{(k)} \supset \varphi_n^{(k)} \& !F[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l) \Rightarrow !\varphi_p^{(k)}(x_1, \ldots, x_k)). \tag{13}$$

Ако $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ е една насочваща операция, ще казваме, че тази операция е ч а с т и ч н о - р е к у р с и в н а, ако функциите $\delta_1, \ldots, \delta_k$ са частично-рекурсивни.

Ще приведем няколко примера към дефиницията на насочваща операция.

П р и м е р 1. Нека F е постоянен оператор от тип $k \to l$, т. е. нека за всеки две аритметични функции на k променливи f_1 и f_2 да имаме $F[f_1] = F[f_2]$. Да разгледаме системата $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$, където $\delta_1, \ldots, \delta_k$ са функции с празна дефиниционна област. По тривиален начин се проверява, че тази система представлява една частично-рекурсивна насочваща операция за оператора F.

Пример 2. Нека F е операторът от тип $k \to k$, който се дефинира с равенството (7). Да положим при $i=1, \ldots, k$

$$\delta_i(n, u_1, \ldots, u_i)=u_i, \quad \text{ако} \quad \neg\,!\,\varphi_n^{(k)}(u_1, \ldots, u_i).$$

Лесно се проверява, че системата от функции $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ представлява една насочваща операция за оператора F. Въз основа на лема 2 може да се твърди, че тази насочваща операция е частично-рекурсивна.

Пример 3. Нека F е операторът от тип $1 \to 1$, определен по следния начин:

$$\mathrm{F}[f](u)=\begin{cases} f(u-1), & \text{ако} \quad \neg\,(u=0), \\ 0 & \text{ако} \quad u=0. \end{cases}$$

Да положим

$$\delta(n, u)=u-1, \text{ ако } \neg\,(u=0)\,\&\,\neg\,!\,\varphi_n^{(1)}(u-1).$$

Не представлява трудност да се провери, че системата, състояща се от един член — функцията δ, представлява частично-рекурсивна насочваща операция за оператора F.

Пример 4. Нека F е операторът от тип $1 \to 0$, определен с равенството

$$\mathrm{F}[f](\,)=\mu z\,(f(z)=0).$$

Да положим

$$\chi(n, z)=\begin{cases} 0, & \text{ако} \ \neg\,!\,\varphi_n^{(1)}(z), \\ 1, & \text{ако}\,!\,\varphi_n^{(1)}(z)\ \&\,\neg\,(\varphi_n^{(1)}(z)=0). \end{cases}$$

Ако с δ означим функцията, определена с равенството

$$\delta(n)=\mu z\,(\chi(n,z)=0),$$

то системата с единствен член δ представлява частично-рекурсивна насочваща операция за оператора F.

Пример 5. Нека F е операторът от тип $1 \to 0$, дефиниран по следния начин:

$$\mathrm{F}[f](\,)=0, \text{ ако } \exists x\,!\,f(x).$$

Да допуснем, че съществува насочваща операция за оператора F. Тази операция ще бъде система от една единствена функция на една променлива δ. Съгласно в) от лема 1 дефиниционната област на функцията $\varphi_0^{(1)}$ е празна. Оттук с помощта на а) от дефиницията на насочваща операция заключаваме, че функцията δ е дефинирана в точката 0. Да положим $p=\sigma(0, \delta(0)+1, 0)$. Съгласно б) от лема 1 функцията $\varphi_p^{(1)}$ е дефинирана в една единствена точка, а именно точката $\delta(0)+1$. Очевидно $\varphi_p^{(1)} \supset \varphi_0^{(1)}$ & &! $\mathrm{F}[\varphi_p^{(1)}](\,)$. Съгласно б) от дефиницията на насочваща операция би трябвало функцията $\varphi_p^{(1)}$ да бъде дефинирана в точката $\delta(0)$, което не е вярно.

Пример 6. Нека M е рекурсивно номеруемо подмножество на Z, допълнението на което не е рекурсивно номеруемо. Да дефинираме оператора F от тип $1 \to 1$ по следния начин:

$$\mathrm{F}[f](u)=0, \text{ ако } u \in M \vee\,!\,f(0).$$

Да дефинираме аритметичната функция на две променливи δ така:

$$\delta(n, u)=0, \text{ ако } \neg(u \in M) \& \quad !\varphi_n^{(1)}(0).$$

Лесно се проверява, че системата с единствен член δ представлява насочваща операция за оператора F. Функцията δ не е частично-рекурсивна, което се вижда от това, че множеството на онези u, за които $!\delta(0, u)$, съвпада с допълнението на M и следователно не е рекурсивно номеруемо. Ще покажем, че операторът F не притежава друга насочваща операция освен току-що посочената. И наистина нека (δ_1) е произволна насочваща операция за F. От условието а) от дефиницията на насочваща операция следва, че дефиниционната област на функцията δ_1 съвпада с дефиниционната област на функцията δ. Нека (n, u) е произволна точка от дефиниционната област на δ_1. Да положим $\delta_1(n, u)=x$. Ще покажем, че $x=0$. Нека $p=\sigma(n, 0, 0)$. Функцията $\varphi_p^{(1)}$ е продължение на функцията $\varphi_n^{(1)}$; дефиниционната област на $\varphi_p^{(1)}$ се получава от дефиниционната област на $\varphi_n^{(1)}$, като присъединим към последната точката 0 ($\neg !\varphi_n^{(1)}(0)$, защото $!\delta(n, u)$). Тъй като освен това $!\mathrm{F}[\varphi_p^{(1)}](u)$ (понеже $!\varphi_p^{(1)}(0)$), условието б) от дефиницията на насочваща операция дава, че $!\varphi_p^{(1)}(x)$. От същото условие следва, че $\neg !\varphi_n^{(1)}(x)$. Но в такъв случай ясно е, че $x=0$.

Преди да продължим по-нататък, ще отбележим, че операторите, разгледани в примерите 2 — 6, са изчислими. Постоянните оператори, разгледани в пример 1, не винаги са изчислими. За да бъде един постоянен оператор изчислим, необходимо и достатъчно е функцията, в която операторът преобразува функциите от дефиниционната си област, да бъде частично-рекурсивна. Операторите, разгледани в примерите 2, 3 и 4, са μ-рекурсивни. Постоянен оператор, който преобразува функциите от дефиниционната си област в някоя частично-рекурсивна функция, също е μ-рекурсивен (доказателството на това твърдение можем да предоставим на читателя; при доказателството е удобно да се изхожда от индуктивната дефиниция на понятието частично-рекурсивна функция, която произтича от теорема XVIII и следствието от теорема XIX от § 63 на [2]). Операторите, разгледани в примерите 5 и 6, не са μ-рекурсивни и това ще стане ясно от теоремата, която следва.

Теорема 1. *Нека* F *е един аритметичен оператор. За да бъде операторът* F *μ-рекурсивен, необходимо и достатъчно е да бъдат изпълнени следните две условия:*

А. F *е изчислим оператор.*

Б. За оператора F *съществува поне една частично-рекурсивна насочваща операция.*

Преди да пристъпим към доказателството на тази теорема, ще отбележим, че никое от условията А и Б не е следствие от другото. Например оператор, който преобразува всички функции на даден брой променливи в една и съща функция, не е изчислим, ако тази функция не е частично-рекурсивна. От друга страна, в пример 1 видяхме, че за всеки такъв оператор съществува частично-рекурсивна насочваща операция. Пример 5 от своя страна показва, че един оператор може да бъде изчислим, без да съществува каквато и да е насочваща операция за този оператор.

Преминаваме към доказателството на теорема 1.

Необходимост на условието А. Както вече отбелязахме в уводните бележки към настоящата работа, теорема XVIII от § 63 на [2] показва, че всеки μ-рекурсивен оператор е частично-рекурсивен. Тъй като, от друга страна, всеки частично-рекурсивен оператор е изчислим, ясно е, че всеки μ-рекурсивен оператор е изчислим. С други думи, необходимостта на условието А е факт, който е известен. За пълнота обаче ние все пак ще дадем едно директно доказателство, без да използуваме еквивалентността на понятията частично-рекурсивен и изчислим оператор. Това доказателство ще се състои от 7 леми, съответствуващи на седемте пункта от дефиницията на μ-рекурсивен оператор. Във всички тези леми се предполага, че k е цяло положително число.

Лема 6. *Операторът* F *от тип* $k \to 0$, *който се определя с равенството* (4), *е изчислим.*

Доказателство. Компактността на F е очевидна, а $\theta_F(n)=0$.

Лема 7. *Операторът* F *от тип* $k \to 1$, *който се определя с равенството* (5), *е изчислим.*

Доказателство. Компактността на F е очевидна, а $\theta_F(n,u)=u+1$.

Лема 8. *Ако* i *и* l *са цели положителни числа и* $i \leqq l$, *то операторът* F *от тип* $k \to l$, *който се определя с равенството* (6), *е изчислим.*

Доказателство. Компактността на F е също очевидна, а $\theta_F(n, u_1, \dots, u_l)=u_i$.

Лема 9. *Операторът* F *от тип* $k \to k$, *който се определя с равенството* (7), *е изчислим.*

Доказателство. Да се убедим най-напред, че операторът F е компактен. Нека за някоя аритметична функция на k променливи f и за някои числа $u_1, \dots, u_l$, v от Z е изпълнено равенството (2) от дефиницията на компактност. Това означава, че $f(u_1, \dots, u_l)=v$. Да означим с φ функцията, която е дефинирана само в точката $(u_1, \dots, u_l)$ и която приема в тази точка стойност v. Очевидно φ е финитна функция, $\varphi \subset f$ и равенството (3) от дефиницията на компактност е изпълнено. Обратно, нека f е аритметична функция на k променливи и нека за някоя функция $\varphi \subset f$ е изпълнено равенството (3), където $u_1, \dots, u_l$ и v са някакви числа от Z. Това означава, че $\varphi(u_1, \dots, u_l)=v$, откъдето следва, че и $f(u_1, \dots, u_l)=v$, т. е. вярно е и (2).

За да завършим доказателството на лема 9, остава да покажем, че функцията θ_F е частично-рекурсивна. Но това следва от лема 3 и от равенството

$$\theta_F(n, u_1, \dots, u_l)=\varphi_n^{(k)}(u_1, \dots, u_l).$$

Лема 10. *Ако* $F_1, \dots, F_m$ $(m \geqq 1)$ *са изчислими оператори от тип* $k \to l$ $(l > 0)$, *а* F_0 *е изчислим оператор от тип* $k \to m$, *то операторът* F *от тип* $k \to l$, *който се определя с равенството* (8), *е изчислим.*

Доказателство. Нека за някоя аритметична функция на k променливи f и за някои числа $u_1, \dots, u_l$, v от Z е изпълнено равенството (2). Тогава $!\,F[f](u_1, \dots, u_l)$ и значи $!\,F_i[f](u_1, \dots, u_l)$ при $i=1, \dots, m$. Да положим

$$F_i[f](u_1, \dots, u_l)=v_i \text{ при } i=1, \dots, m.$$

Очевидно имаме

$$F_0[f](v_1, \dots, v_m)=v.$$

Тъй като операторите F_0, $F_1, \ldots, F_m$ са компактни, съществуват финитни функции $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ такива, че f е продължение на всяка от тях и са изпълнени равенствата

$$F_0[\varphi_0](v_1, \ldots, v_m)=v,$$

$$F_i[\varphi_i](u_1, \ldots, u_l)=v_i \quad \text{при } i=1, \ldots, m.$$

Да означим с φ обединението на функциите $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Очевидно φ е финитна функция и $\varphi \subset f$. От компактността на операторите F_0, $F_1, \ldots, F_m$ и обстоятелството, че φ е продължение на всяка от функциите $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$, следват равенствата

$$F_0[\varphi](v_1, \ldots, v_m)=v,$$

$$F_i[\varphi](u_1, \ldots, u_l)=v_i \quad \text{при } i=1, \ldots, m.$$

От тези равенства следва, че е изпълнено равенството (3). Обратно, ако за някоя финитна функция $\varphi \subset f$ и за някои числа $u_1, \ldots, u_l, v$ е изпълнено равенството (3), то използувайки компактността на операторите F_0, $F_1, \ldots, F_m$, веднага заключаваме, че за функцията f и за същите числа е в сила равенството (2). Компактността на оператора F е доказана. Частичната рекурсивност на функцията θ_F следва от равенството

$$\theta_F(n, u_1, \ldots, u_l)=\theta_{F_0}(n, \theta_{F_1}(n, u_1, \ldots, u_l), \ldots, \theta_{F_m}(n, u_1, \ldots, u_l)).$$

Лема 11. *Ако* F_0 *е изчислим оператор от тип* $k \to l-1$ $(l \geq 1)$, *а* F_1 *е изчислим оператор от тип* $k \to l+1$, *то операторът* F *от тип* $k \to l$, *който се определя посредством равенствата* (9) *и* (10), *е изчислим.*

Доказателство. Най-напред с индукция по отношение на h ще докажем, че операторът $F^{(h)}$ от тип $k \to l-1$, който се определя с равенството

$$F^{(h)}[f](u_1, \ldots, u_{l-1})=F[f](u_1, \ldots, u_{l-1}, h),$$

е компактен. Действително операторът $F^{(0)}$ съвпада с оператора F_0, а ако компактността на $F^{(h)}$ при някое h е установена, то компактността на $F^{(h+1)}$ следва от равенството

$$F^{(h+1)}[f](u_1, \ldots, u_{l-1})=F_1[f](u_1, \ldots, u_{l-1}, h, F^{(h)}[f](u_1, \ldots, u_{l-1}))$$

чрез разсъждения, каквито имахме случай да направим вече при доказателството на лема 10. Обаче от компактността на $F^{(h)}$ при произволно h очевидно следва компактността на F.

Остава да покажем, че функцията θ_F е частично-рекурсивна. Това обаче следва от равенствата

$$\theta_F(n, u_1, \ldots, u_{l-1}, 0)=\theta_{F_0}(n, u_1, \ldots, u_{l-1}),$$

$$\theta_F(n, u_1, \ldots, u_{l-1}, u_l+1)=\theta_{F_1}(n, u_1, \ldots, u_{l-1}, u_l, \theta_F(n, u_1, \ldots, u_{l-1}, u_l)).$$

Лема 12. *Ако* F_0 *е изчислим оператор от тип* $k \to l+1$ $(l \geq 0)$, *то операторът* F *от тип* $k \to l$, *който се определя с равенството* (11), *е изчислим.*

Доказателство. Нека f е аритметична функция на k променливи и нека $u_1, \ldots, u_l$ и v са цели неотрицателни числа. Да предположим, че е изпълнено равенството (2). Това означава следното: при $z \leqq v$ $! \mathrm{F}_0[f](u_1, \ldots, u_l, z)$, като $\mathrm{F}_0[f](u_1, \ldots, u_l, v)=0$, а при $z<v$ $\neg(\mathrm{F}_0[f](u_1, \ldots, u_l, z)=0)$. Поради компактността на оператора F_0 при всяко $z \leqq v$ съществува финитна функция $\varphi_z \subset f$ такава, че

$$\mathrm{F}_0[\varphi_z](u_1, \ldots, u_l, z)=\mathrm{F}_0[f](u_1, \ldots, u_l, z).$$

Да означим с φ обединението на функциите $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_z$. Пак поради компактността на F_0 ще имаме при $z \leqq v$

$$\mathrm{F}_0[\varphi](u_1, \ldots, u_l, z)=\mathrm{F}_0[\varphi_z](u_1, \ldots, u_l, z),$$

откъдето следва, че е изпълнено равенството (3). Обратно, ако за някоя финитна функция $\varphi \subset f$ е изпълнено равенството (3), то ще имаме $! \mathrm{F}_0[\varphi](u_1, \ldots, u_l, z)$ за всяко $z \leqq v$, като при това $\mathrm{F}_0[\varphi](u_1, \ldots, u_l, v)=0$ и $\neg(\mathrm{F}_0[\varphi](u_1, \ldots, u_l, z)=0)$ при $z<v$. Поради компактността на оператора F_0 при $z \leqq v$ ще бъде изпълнено равенството

$$\mathrm{F}_0[f](u_1, \ldots, u_l, z)=\mathrm{F}_0[\varphi](u_1, \ldots, u_l, z),$$

откъдето следва, че ще е в сила равенството (2). С това компактността на оператора F е установена. От друга страна, от равенството

$$\theta_{\mathrm{F}}(n, u_1, \ldots, u_l)=\mu y\,(\theta_{\mathrm{F}_0}(n, u_1, \ldots, u_l, y)=0)$$

следва, че функцията θ_{F} е частично-рекурсивна. Лема 12 е доказана.

От дефиницията на μ-рекурсивен оператор и от лемите 6 — 12 следва необходимостта на условието А.

Необходимост на условието Б. Нека F е аритметичен оператор от тип $k \to l$ ($k \geqq 1$, $l \geqq 0$). Да наречем насочващо множество за F всяко подмножество M на Z^{k+l+1}, което притежава следните две свойства:

α) ако при някой избор на целите неотрицателни числа $n, u_1, \ldots, u_l$ е изпълнено условието (12), то съществуват цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ такива, че точката $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ принадлежи на множеството M;

β) ако точката $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ принадлежи на M, то изпълнено е условието (13).

За да установим необходимостта на условието Б, ще докажем понапред следното твърдение:

Лема 20. *За всеки μ-рекурсивен оператор съществува поне едно рекурсивно номеруемо насочващо множество.*

Доказателството на лема 20 ще разчленим на 7 леми, съответстващи на седемте пункта от дефиницията на μ-рекурсивен оператор.

Лема 13. *Операторът* F *от тип* $k \to 0$, *който се определя с равенството* (4), *притежава рекурсивно номеруемо насочващо множество.*

Лема 14. *Операторът* F *от тип* $k \to 1$, *който се определя с равенството* (5), *притежава рекурсивно номеруемо насочващо множество.*

Лема 15. *Ако i и l са цели положителни числа и $i \leqq l$, то операторът* F *от тип* $k \to l$, *който се определя с равенството* (6), *притежава рекурсивно номеруемо насочващо множество.*

Леми 13, 14 и 15 се доказват по един и същ начин, а именно проверява се, че празното множество е насочващо множество за оператора F.

Лема 16. *Операторът* F *от тип* $k \to k$, *който се определя с равенството* (7), *притежава рекурсивно номеруемо насочващо множество.*

Доказателство. Да означим с M множеството на точките от Z^{2k+1} от вида $(n, u_1, \ldots, u_k, u_1, \ldots, u_k)$, където $n, u_1, \ldots, u_k$ са такива, че $\neg ! \varphi_n^{(k)}(u_1, \ldots, u_k)$. От лема 2 следва, че M е рекурсивно номеруемо множество. По тривиален начин се проверява, че M е насочващо множество за оператора F.

Лема 17. *Ако* $F_1, \ldots, F_m$ $(m \geqq 1)$ *са изчислими оператори от тип* $k \to l$ $(l \geqq 0)$, *а* F_0 *е изчислим оператор от тип* $k \to m$ *и ако всеки от операторите* $F_0, F_1, \ldots, F_m$ *притежава рекурсивно номеруемо насочващо множество, то операторът* F *от тип* $k \to l$, *който се определя с равенството* (8), *също притежава рекурсивно номеруемо насочващо множество.*

Доказателство. При $i = 0, 1, \ldots, m$ да означим с M_i някое рекурсивно номеруемо насочващо множество за оператора F_i. Очевидно $M_0 \subset Z^{k+m+1}$, а при $i = 1, \ldots, m$ $M_i \subset Z^{k+l+1}$. Да означим с P множеството на онези точки $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ от Z^{k+l+1}, за които $! F_i[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)$ при $i = 1, \ldots, m$ и точката

$$(n, F_1[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l), \ldots, F_m[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l), x_1, \ldots, x_k)$$

принадлежи на множеството M_0. Тъй като M_0 е рекурсивно номеруемо множество, а операторите $F_1, \ldots, F_m$ са изчислими, множеството P е рекурсивно номеруемо. Да положим

$$M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_m \cup P.$$

Като сума на краен брой рекурсивно номеруеми множества множеството M е също рекурсивно номеруемо. Ще покажем, че M е едно насочващо множество за оператора F. Ще покажем най-напред, че множеството M притежава свойството *a*) (от дефиницията на насочващо множество). Нека $n, u_1, \ldots, u_l$ са цели неотрицателни числа, за които е изпълнено условието (12). Да допуснем, че не съществуват цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ такива, че точката $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на M. Тогава при $i = 1, \ldots, m$ не съществуват цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ такива, че точката $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на M_i, и не съществуват цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ такива, че точката $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1 \ldots, x_k)$ да принадлежи на P. Нека $1 \leqq i \leqq m$. Очевидно $\exists p\, (\varphi_p^{(k)} \supset \varphi_n^{(k)} \,\&\, ! F_i[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l))$, тъй като $! F[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l) \rightrightarrows ! F_i[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)$. Оттук следва, че съждението $\neg ! F_i[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)$, не може да бъде вярно, защото иначе бихме имали противоречие със свойството *a*) на множеството M_i. Значи $! F_i[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)$ при $i = 1, \ldots, m$. Да положим $F_i[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l) = v_i$ при $i = 1, \ldots, m$. Тъй като $\neg ! F[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)$, очевидно вярно е, че $\neg ! F_0[\varphi_n^{(k)}](v_1, \ldots, v_m)$. От друга страна, лесно е да се убедим, че $\exists p\, (\varphi_p^{(k)} \supset \varphi_n^{(k)} \,\&\, ! F_0[\varphi_p^{(k)}](v_1, \ldots, v_m))$; действително от $\varphi_p^{(k)} \supset \varphi_n^{(k)}$ следва, че

$$F[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l) = F_0[\varphi_p^{(k)}](v_1, \ldots, v_m).$$

В такъв случай от свойството α) на множеството M_0 следва, че съществуват цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ такива, че точката $(n, v_1, \ldots, v_m, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на M_0, т. е. съществуват цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ такива, че точката $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на P. Но ние по-рано получихме, че такива числа $x_1, \ldots, x_k$ не съществуват, и значи сега достигнахме до противоречие. Следователно допускането ни, че не съществуват цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ такива, че точката $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на M, е невярно. С това е доказано, че M притежава свойството α).

Да се занимаем сега със свойството β). Нека точката $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ принадлежи на множеството M. Тогава тя ще принадлежи на някое събираемо от сумата $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_m \cup P$. Да предположим, че разглежданата точка принадлежи на множеството M_i, където $1 \leq i \leq m$. Съгласно свойството β) на множеството M_i ще имаме

$$\neg ! \varphi_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) \,\&\, \forall p\, (\varphi_p^{(k)} \supset \varphi_n^{(k)} \,\&\, ! \mathrm{F}_i[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l) \rightrightarrows ! \varphi_p^{(k)}(x_1, \ldots, x_k)).$$

Но тогава очевидно ще бъде вярно и съждението (13), защото $! \mathrm{F}[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l) \rightrightarrows ! \mathrm{F}_i[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)$. Нека сега точката $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ принадлежи на множеството P. Това означава, че $! \mathrm{F}_i[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)$ при $i = 1, \ldots, m$ и ако положим $\mathrm{F}_i[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l) = v_i$ при $i = 1, \ldots, m$, то точката $(n, v_1, \ldots, v_m, x_1, \ldots, x_k)$ принадлежи на множеството M_0. Съгласно свойството β) на множеството M_0 ще имаме

$$\neg ! \varphi_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) \,\&\, \forall p\, (\varphi_p^{(k)} \supset \varphi_n^{(k)} \,\&\, ! \mathrm{F}_0[\varphi_p^{(k)}](v_1, \ldots, v_m) \rightrightarrows ! \varphi_p^{(k)}(x_1, \ldots, x_k)).$$

Но в такъв случай пак ще бъде вярно съждението (13), защото от $\varphi_p^{(k)} \supset \varphi_n^{(k)}$ следва, че

$$\mathrm{F}[\varphi_p^{(k)}](u_1 \ldots, u_l) = \mathrm{F}_0[\varphi_p^{(k)}](v_1, \ldots, v_m).$$

По такъв начин доказахме, че множеството M притежава и свойството β) и следователно представлява насочващо множество за оператора F.

Лема 18. *Ако* F_0 *е изчислим оператор от тип* $k \rightarrow l-1$ $(l \geq 1)$, *а* F_1 *е изчислим оператор от тип* $k \rightarrow l+1$ *и ако всеки от операторите* F_0 *и* F_1 *притежава рекурсивно номеруемо насочващо множество, то операторът* F *от тип* $k \rightarrow l$, *който се определя посредством равенствата* (9) *и* (10), *също притежава рекурсивно номеруемо насочващо множество.*

Доказателство. Да означим с M_0 някое рекурсивно номеруемо насочващо множество за оператора F_0, а с M_1 да означим някое рекурсивно номеруемо насочващо множество за оператора F_1. Очевидно $M_0 \subset Z^{k+l}$, а $M_1 \subset Z^{k+l+2}$. Нека L_0 е множеството на онези точки $(n, u_1, \ldots, u_{l-1}, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ от Z^{k+l+1}, за които точката $(n, u_1, \ldots, u_{l-1}, x_1, \ldots, x_k)$ принадлежи на M_0. Тъй като множеството M_0 е рекурсивно номеруемо, множеството L_0 е също рекурсивно номеруемо. С P да означим множеството на онези точки $(n, u_1, \ldots, u_{l-1}, w, x_1, \ldots, x_k)$ от Z^{k+l+1}, за които $! \mathrm{F}[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_{l-1}, w)$ и точката $(n, u_1, \ldots, u_{l-1}, w, \mathrm{F}[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_{l-1}, w), x_1, \ldots, x_k)$ принадлежи на M_1. Тъй като множеството M_1 е рекурсивно номеруемо, а операторът F е изчислим (по лема 11), множеството P е рекурсивно номеруемо. Да означим с L_1 множеството на онези точки $(n, u_1, \ldots, u_{l-1}, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ от Z^{k+l+1}, за които е изпълнено условието $\underset{w<u_l}{\exists w}((n, u_1, \ldots, u_{l-1}, w, x_1, \ldots, x_k) \in P)$. Множеството L_1 също е рекурсивно номеруемо.

След като сме дефинирали множествата L_0 и L_1, да положим

$$M = L_0 \cup L_1.$$

Като сума на две рекурсивно номеруеми множества и множеството M също е рекурсивно номеруемо. Ще покажем, че M е насочващо множество за оператора F.

Нека $n, u_1, \ldots, u_{l-1}, u_l$ са цели неотрицателни числа, за които е изпълнено условието (12). Допускаме, че не съществуват цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ такива, че точката $(n, u_1, \ldots, u_{l-1}, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на M. В такъв случай не съществуват цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ такива, че тази точка да принадлежи на L_0, и не съществуват цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ такива, че тя да принадлежи на L_1. Да допуснем, че $\neg ! \mathrm{F}_0[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_{l-1})$. Тъй като $! \mathrm{F}[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_{l-1}, u_l) \rightrightarrows ! \mathrm{F}_0[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_{l-1})$, ще бъде вярно съждението $\exists p(\varphi_p^{(k)} \supset \varphi_n^{(k)} \,\&\, ! \mathrm{F}_0[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_{l-1}))$. Но тогава съгласно свойството a) на множеството M_0 ще съществуват цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ такива, че точката $(n, u_1, \ldots, u_{l-1}, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на M_0, т. е. ще съществуват цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ такива, че точката $(n, u_1, \ldots, u_{l-1}, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на L_0. И така, допускането, че $\neg ! \mathrm{F}_0[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_{l-1})$, не може да бъде вярно (при първоначалното допускане). Значи $! \mathrm{F}_0[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_{l-1})$, т. е. $! \mathrm{F}[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_{l-1}, 0)$. Нека $w < u_l$ и нека $! \mathrm{F}[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_{l-1}, w)$. Ще покажем, че $! \mathrm{F}[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_{l-1}, w+1)$. Да положим $\mathrm{F}[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_{l-1}, w) = z$ В такъв случай за всяко p, за което $\varphi_p^{(k)} \supset \varphi_n^{(k)}$, ще бъде изпълнено равенството

$$\mathrm{F}[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_{l-1}, w+1) = \mathrm{F}_1[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_{l-1}, w, z).$$

Тъй като $w+1 \leqq u_l$, за всяко p ще имаме

$$! \mathrm{F}[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_{l-1}, u_l) \rightrightarrows ! \mathrm{F}[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_{l-1}, w+1).$$

Оттук и от факта, че числата $n, u_1, \ldots, u_{l-1}, u_l$ удовлетворяват условието (12), следва, че $\exists p(\varphi_p^{(k)} \supset \varphi_n^{(k)} \,\&\, ! \mathrm{F}_1[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_{l-1}, w, z))$. Но в такъв случай съждението $\neg ! \mathrm{F}[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_{l-1}, w+1)$ не може да бъде вярно. Действително, в противен случай бихме имали $\neg ! \mathrm{F}_1[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_{l-1}, w, z)$, откъдето с помощта на свойството a) на множеството M_1 би следвало, че съществуват цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ такива, че точката $(n, u_1, \ldots, u_{l-1}, w, z, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на M_1, т. е. точката $(n, u_1, \ldots, u_{l-1}, w, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на P. Тъй като $w < u_l$, оттук ще следва, че съществуват цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ такива, че точката $(n, u_1, \ldots, u_{l-1}, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на L_1, а по-рано ние получихме противното. Значи при всяко $w < u_l$ имаме

$$! \mathrm{F}[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_{l-1}, w) \rightrightarrows ! \mathrm{F}[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_{l-1}, w+1).$$

Но тогава ще можем да заключим, че $!\,\mathrm{F}[\varphi_n^{(k)}](u_1,\ldots,u_{l-1},u_l)$, а това противоречи на факта, че числата $n, u_1, \ldots, u_{l-1}, u_l$ удовлетворяват условието (12). Следователно допускането, че не съществуват цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$, за които точката $(n, u_1, \ldots, u_{l-1}, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на M, ни доведе до противоречие. С това е показано, че множеството M притежава свойството α).

Да проверим сега, че е налице и свойството β). Нека точката $(n, u_1, \ldots, u_{l-1}, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ принадлежи на множеството M. Тогава тя принадлежи на някое от множествата L_0 и L_1. Да предположим, че разглежданата точка принадлежи на L_0. Това значи, че точката $(n, u_1, \ldots, u_{l-1}, x_1, \ldots, x_k)$ принадлежи на множеството M_0. Съгласно свойството β) на множеството M_0 оттук следва, че

$$\neg\,!\,\varphi_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k)\,\&\,\forall p\,(\varphi_p^{(k)}\supset\varphi_n^{(k)}\,\&\,!\,\mathrm{F}_0[\varphi_p^{(k)}](u_1,\ldots u_{l-1})\rightrightarrows\,!\,\varphi_p^{(k)}(x_1,\ldots,x_k)).$$

Но тогава очевидно ще бъде вярно и съждението (13), защото за всяко p

$$!\,\mathrm{F}[\varphi_p^{(k)}](u_1,\ldots,u_{l-1},u_l)\rightrightarrows\,!\,\mathrm{F}_0[\varphi_p^{(k)}](u_1,\ldots,u_{l-1}).$$

Нека сега точката $(n, u_1, \ldots, u_{l-1}, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на множеството L_1. Да изберем $w<u_l$ така, че точката $(n, u_1, \ldots, u_{l-1}, w, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на множеството P; това е възможно съгласно дефиницията на множеството L_1. В такъв случай ще имаме $!\,\mathrm{F}[\varphi_n^{(k)}](u_1,\ldots, u_{l-1}, w)$ и ако положим $\mathrm{F}[\varphi_n^{(k)}](u_1,\ldots,u_{l-1},w)=z$, точката $(n, u_1, \ldots, u_{l-1}, w, z, x_1, \ldots, x_k)$ ще принадлежи на M_1. Съгласно свойството β) на множеството M_1 оттук следва, че

$$\neg\,!\,\varphi_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k)\,\&\,\forall p\,(\varphi_p^{(k)}\supset\varphi_n^{(k)}\,\&\,!\,\mathrm{F}_1[\varphi_p^{(k)}](n,u_1,\ldots,u_{l-1},w,z)\rightrightarrows$$
$$\rightrightarrows\,!\,\varphi_p^{(k)}(x_1,\ldots,x_k)).$$

Но в такъв случай пак ще бъде вярно съждението (13), защото за всяко p

$$!\,\mathrm{F}[\varphi_p^{(k)}](u_1,\ldots,u_{l-1},u_l)\rightrightarrows\,!\,\mathrm{F}[\varphi_p^{(k)}](u_1,\ldots,u_{l-1},w+1),$$

а при $\varphi_p^{(k)}\supset\varphi_n^{(k)}$ изпълнено е равенството

$$\mathrm{F}[\varphi_p^{(k)}](u_1,\ldots,u_{l-1},w+1)=\mathrm{F}_1[\varphi_p^{(k)}](u_1,\ldots,u_{l-1},w,z).$$

С това е доказано, че множеството M притежава и свойството β) и следователно представлява насочващо множество за оператора F.

Лема 19. *Ако* F_0 *е изчислим оператор от тип* $k\to l+1$ $(l\geq 0)$ *и ако операторът* F_0 *притежава рекурсивно номеруемо насочващо множество, то операторът* F *от тип* $k\to l$, *който се определя с равенството* (11), *също притежава рекурсивно номеруемо насочващо множество.*

Доказателство. Да означим с M_0 някое рекурсивно номеруемо насочващо множество за оператора F_0. Очевидно $M_0\subset Z^{k+l+2}$. С P да означим множеството на онези точки $(n, u_1, \ldots, u_l, z, x_1, \ldots, x_k)$ от Z^{k+l+2}, за които е изпълнено условието

$$\forall_{w<z}\, w\,(!\,\mathrm{F}_0[\varphi_n^{(k)}](u_1,\ldots,u_l,w)\,\&\,\neg\,(\mathrm{F}_0[\varphi_n^{(k)}](u_1,\ldots,u_l,w)=0)).$$

Поради изчислимостта на оператора F_0 множеството P е рекурсивно номеруемо. След като сме дефинирали множествата M_0 и P, да означим с M множеството на онези точки $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ от Z^{k+l+1}, за които съществува цяло неотрицателно число z такова, че точката $(n, u_1, \ldots, u_l, z, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на сечението $M_0 \cap P$. Очевидно множеството M също е рекурсивно номеруемо. Ще покажем, че M е насочващо множество за оператора F.

Да покажем, че множеството M притежава свойството α). Нека $n, u_1, \ldots, u_l$ са цели неотрицателни числа, за които е изпълнено условието (12). Допускаме, че не съществуват цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ такива, че точката $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на M. Избираме цялото неотрицателно число q по такъв начин, че $\varphi_q^{(k)} \supset \varphi_n^{(k)} \& ! F[\varphi_q^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)$, и полагаме $F[\varphi_q^{(k)}](u_1, \ldots, u_l) = v$. Нека $z \leqq v$ и нека $\underset{w<z}{\forall w}\, ! F_0[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l, w)$. В такъв случай за произволно $w < z$ ще имаме

$$F_0[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l, w) = F_0[\varphi_q^{(k)}](u_1, \ldots, u_l, w)$$

и следователно $\neg (F_0[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l, w) = 0)$. От дефиницията на множеството P следва, че при произволен избор на целите неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ точката $(n, u_1, \ldots, u_l, z, x_1, \ldots, x_k)$ ще принадлежи на множеството P. Оттук и от направеното в началото допускане следва, че не съществуват цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ такива, че точката $(n, u_1, \ldots, u_l, z, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на множеството M_0. Тъй като множеството M_0 притежава свойството α), заключаваме, че няма да бъде изпълнено условието

$$\neg ! F_0[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l, z) \,\&\, \exists p\, (\varphi_p^{(k)} \supset \varphi_n^{(k)} \,\&\, ! F_0[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l, z)).$$

Вторият член на тази конюнкция обаче е вярно съждение, защото от факта, че $z \leqq v$, следва, че $! F_0[\varphi_q^{(k)}](u_1, \ldots, u_l, z)$. Значи съждението $\neg ! F_0[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l, z)$ не може да бъде вярно и следователно $! F_0[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l, z)$. По такъв начин ние показахме, че ако $z \leqq v$ и ако $\underset{w<z}{\forall w}\, ! F_0[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l, w)$, то $! F_0[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l, z)$. Но оттук следва, че $! F_0[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l, z)$ за всяко $z \leqq v$. В такъв случай за всяко $z \leqq v$ ще бъде вярно равенството

$$F_0[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l, z) = F_0[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l, z),$$

откъдето виждаме, че $v = \mu z\, (F_0[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l, z) = 0)$. Това обаче показва, че $! F[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)$, което противоречи на условието (12). И така допускането, че не съществуват цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ такива, че точката $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на M, ни доведе до противоречие.

Преминаваме към свойството β). Нека точката $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ принадлежи на множеството M. Избираме цялото неотрицателно число z по такъв начин, че точката $(n, u_1, \ldots, u_l, z, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на сечението $M_0 \cap P$. От факта, че тази точка принадлежи на множеството M_0, и от обстоятелството, че M_0 притежава свойството β), следва, че

$$\neg ! \varphi_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) \,\&\, \forall p\, (\varphi_p^{(k)} \supset \varphi_n^{(k)} \,\&\, ! F_0[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l, z) \rightleftarrows$$

$$\rightleftharpoons !\varphi_p^{(k)}(x_1, \ldots, x_k)).$$

Оттук, разбира се, е ясно, че първият член на конюнкцията (13) е вярно съждение. Да се занимаем с втория член. Нека цялото неотрицателно число p е такова, че $\varphi_p^{(k)} \supset \varphi_n^{(k)} \& !\mathrm{F}[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)$. Да положим $\mathrm{F}[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l) = v$. Очевидно $\mathrm{F}_0[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l, v) = 0$. Тъй като точката $(n, u_1, \ldots, u_l, z, x_1, \ldots, x_k)$ принадлежи и на множеството P, ще имаме

$$\forall_{w<z} w\, (!\mathrm{F}_0[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l, w) \& \neg(\mathrm{F}_0[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l, w) = 0)).$$

В такъв случай от компактността на оператора F_0 следва, че $\forall_{w<z} w \neg(\mathrm{F}_0[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l, w) = 0)$. Ясно е тогава, че $v \geq z$ и следователно $!\mathrm{F}_0[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l, z)$. Съгласно казаното по-горе оттук можем да заключим, че $!\varphi_p^{(k)}(x_1, \ldots, x_k)$. С това е доказано, че и вторият член на конюнкцията (13) е вярно съждение. По такъв начин доказателството на лема 19 е завършено.

От лемите 13 — 19, от дефиницията на μ-рекурсивен оператор и от изчислимостта на μ-рекурсивните оператори следва верността на лема 20.

За да докажем сега необходимостта на условието Б, ще бъде достатъчно да се убедим, че от съществуването на рекурсивно номеруемо насочващо множество следва съществуването на частично-рекурсивна насочваща операция. За целта ще използуваме следната теорема от теорията на рекурсивните функции[1]:

Нека s и k са цели положителни числа и нека R е рекурсивно номеруемо подмножество на Z^{s+k}. В такъв случай съществува система от k на брой частично-рекурсивни функции на s променливи $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ със свойствата 1 и 2, формулирани по-долу.

1. Коя да е от функциите $\delta_1, \ldots, \delta_k$ е дефинирана в точката $(t_1, \ldots, t_s)$ от Z^s точно тогава, когато съществуват цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ такива, че точката $(t_1, \ldots, t_s, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на множеството R.

2. Ако за някои цели неотрицателни числа $t_1, \ldots, t_s$ функциите $\delta_1, \ldots, \delta_k$ са дефинирани в точката $(t_1, \ldots, t_s)$ и ако положим $\delta_i(t_1, \ldots, t_s) = x_i$ при $i = 1, \ldots, k$, то точката $(t_1, \ldots, t_s, x_1, \ldots, x_k)$ принадлежи на множеството R.

Нека F е изчислим оператор от тип $k \to l$ $(k \geq 1,\ l \geq 0)$ и нека M е рекурсивно номеруемо насочващо множество за F. Очевидно $M \subset Z^{k+l+1}$. Да означим с Q множеството на онези точки $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ от Z^{k+l+1}, за които е изпълнено условието

$$\exists p\, (\varphi_p^{(k)} \supset \varphi_n^{(k)} \& !\mathrm{F}[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)).$$

От изчислимостта на оператора F и от лема 4 следва, че множеството Q е рекурсивно номеруемо. Но тогава и сечението $M \cap Q$ ще бъде ре-

---

[1] Вж. напр. [2] — теорема XXV от § 65 (теорема за неопределеното описание) или [6] — теорема 3 от п. 1 § 10 (теорема за униформизацията). В [2] теоремата е формулирана за случая $k=1$, а в [6] — само за случая $k=1$, $s=1$, но със забележка, че е вярна за произволно s. Верността на теоремата при произволно k следва от нейната вярност при $k=1$, като се има пред вид, че при произволно цяло положително k съществува примитивно-рекурсивно взаимно еднозначно съответствие между Z и Z^k.

курсивно номеруемо. Да означим това сечение с R и да приложим към него току-що цитираната теорема (при $s=l+1$). Съгласно тази теорема ще съществува система $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ от k на брой частично-рекурсивни функции на $l+1$ променливи със следните свойства:

1) коя да е от функциите δ_i е дефинирана в точката $(n, u_1, \ldots, u_l)$ от Z^{l+1} точно тогава, когато съществуват цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ такива, че точката $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на множеството R;

2) ако за някои цели неотрицателни числа $n, u_1, \ldots, u_l$ функциите $\delta_1, \ldots, \delta_k$ са дефинирани в точката $(n, u_1, \ldots, u_l)$ и ако положим $\delta_i(n, u_1, \ldots, u_l)=x_i$ при $i=1, \ldots, k$, точката $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ принадлежи на множеството R.

Сега ще се убедим, че така намерената система $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ представлява насочваща операция за оператора F. Да проверим най-напред, че се удовлетворява условието а) от дефиницията на насочваща операция. Нека функцията δ_i е дефинирана в точката $(n, u_1, \ldots, u_l)$ от Z^{l+1}. В такъв случай съгласно 1) можем да изберем целите неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ така, че точката $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на множеството R. Избираме такива числа. Тогава точката $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ ще принадлежи на множеството M. Съгласно свойството β) на M $\neg ! \varphi_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k)$. Да допуснем, че $! \mathrm{F}[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)$. Тъй като $\varphi_n^{(k)} \supset \varphi_n^{(k)}$, пак свойството β) на множеството M дава $! \varphi_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k)$, което не е вярно. Значи $\neg ! \mathrm{F}[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)$, т. е. първият член на конюнкцията (12) е вярно съждение. Вторият член също е вярно съждение, защото точката $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ принадлежи и на множеството Q. Обратно, нека целите неотрицателни числа $n, u_1, \ldots, u_l$ са такива, че да бъде изпълнено условието (12). Ще покажем, че всяка от функциите $\delta_i (i=1, \ldots, k)$ е дефинирана в точката $(n, u_1, \ldots, u_l)$. И наистина съгласно свойството α) на множеството M ще съществуват цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ такива, че точката $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ да принадлежи на M. Избираме си такива числа. Понеже вторият член на конюнкцията (12) е вярно съждение, точката $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ ще принадлежи и на множеството Q. Значи тази точка принадлежи на множеството R. Но в такъв случай съгласно 1) функциите $\delta_1, \ldots, \delta_k$ ще бъдат дефинирани в точката $(n, u_1, \ldots, u_l)$. По този начин ние проверихме, че системата от функции $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ притежава свойството а) от дефиницията на понятието насочваща операция. Да се занимаем с условието б). Нека функциите $\delta_1, \ldots, \delta_k$ са дефинирани в точката $(n, u_1, \ldots, u_l)$ и нека $\delta_i(n, u_1, \ldots, u_l)=x_i$ при $i=1, \ldots, k$. В такъв случай съгласно 2) точката $(n, u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_k)$ принадлежи на множеството R. Тогава тя ще принадлежи на множеството M и съгласно свойството β) на M ще бъде изпълнено условието (13). По такъв начин ние доказахме, че системата от функции $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ притежава и свойството б) от дефиницията на насочваща операция. С това е доказано, че частично-рекурсивна насочваща операция съществува за всеки изчислим оператор, който притежава рекурсивно номеруемо насочващо множество. Оттук и от лема 20 следва необходимостта на условието Б.

Достатъчност на условията А *и* Б. Нека F е изчислим оператор от тип $k \to l$ $(k > 1,\ l \geq 0)$, за който съществува частично-рекурсивна насочваща операция $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$. Ще покажем, че операторът F е μ-рекурсивен. За целта ще въведем няколко помощни оператора, а именно следните:

Φ — от тип $k \to l+1$, определя се чрез равенството

$$\Phi[f](n, u_1, \ldots, u_l) = f(\delta_1(n, u_1, \ldots, u_l), \ldots, \delta_k(n, u_1, \ldots, u_l));$$

S — от тип $k \to l+1$, опеределя се чрез равенството

$$S[f](n, u_1, \ldots, u_l) = \sigma(n, \delta_1(n, u_1, \ldots, u_l), \ldots, \delta_k(n, u_1, \ldots, u_l), \Phi[f](n, u_1, \ldots, u_l));$$

N — от тип $k \to l+1$, определя се чрез равенствата

$$N[f](u_1, \ldots, u_l, 0) = 0,$$
$$N[f](u_1, \ldots, u_l, r+1) = S[f](N[f](u_1, \ldots, u_l, r), u_1, \ldots, u_l);$$

Γ — от тип $k \to l+1$, определя се чрез равенството

$$\Gamma[f](u_1, \ldots, u_l, r) = \gamma(N[f](u_1, \ldots, u_l, r), u_1, \ldots, u_l),$$

където функцията γ се дефинира със схемата[1]

$$\gamma(n, u_1, \ldots, u_l) = \begin{cases} 0, & \text{ако } !\theta_F(n, u_1, \ldots, u_l), \\ 1, & \text{ако } !\delta_1(n, u_1 \ldots, u_l); \end{cases}$$

R — от тип $k \to l$, определя се чрез равенството
$$R[f](u_1, \ldots, u_l) = \mu r(\Gamma[f](u_1, \ldots, u_l, r) = 0);$$

N_0 — от тип $k \to l$, определя се чрез равенството

$$N_0[f](u_1, \ldots, u_l) = N[f](u_1, \ldots, u_l, R[f](u_1, \ldots, u_l)).$$

Както отбелязахме по-рано, аритметичен оператор, който преобразува всички аритметични функции на даден брой променливи в една и съща частично-рекурсивна функция, е винаги μ-рекурсивен. Като се има пред вид тази забележка, ясно е, че всички оператори, които дефинирахме преди малко, са μ-рекурсивни.

Ще покажем, че е валидно следното равенство, от което веднага следва, че операторът F е μ-рекурсивен:

$$F[f](u_1, \ldots, u_l) = \theta_F(N_0[f](u_1, \ldots, u_l), u_1, \ldots, u_l). \tag{14}$$

За целта ще докажем едно помощно твърдение, а именно:

Лема 21. *Нека f е аритметична функция на k променливи, нека $u_1, \ldots, u_l$, r и n са цели неотрицателни числа и нека*

$$N[f](u_1, \ldots, u_l, r) = n.$$

Тогава $\varphi_n^{(k)} \subset f$ и дефиниционната област на функцията $\varphi_n^{(k)}$ се състои от r точки.

---

[1] Да отбележим, че не е възможно едновременно да имаме $!\theta_F(n, u_1, \ldots, u_l)$ и $!\delta_1(n, u_1, \ldots, u_l)$ поради свойството а) на насочващата операция $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$.

Доказателство. При $r=0$ твърдението е очевидно, защото дефиниционната област на функцията $\varphi_0^{(k)}$ е празна. Нека твърдението е установено при $r=h$ и нека имаме

$$\mathrm{N}[f](u_1, \ldots, u_l, h+1)=n.$$

Това означава, че

$$\mathrm{S}[f](\mathrm{N}[f](u_1, \ldots, u_l, h), u_1, \ldots, u_l)=n.$$

Следователно $!\mathrm{N}[f](u_1, \ldots, u_l, h)$. Да положим $\mathrm{N}[f](u_1, \ldots, u_l, h)=m$. Тогава ще имаме равенството

$$\mathrm{S}[f](m, u_1, \ldots, u_l)=n$$

или все едно

$$\sigma(m, \delta_1(m, u_1, \ldots, u_l), \ldots, \delta_k(m, u_1, \ldots, u_l), \Phi[f](m, u_1, \ldots, u_l))=n.$$

От последното равенство следва, че $!\delta_i(m, u_1, \ldots, u_l)$ при $i=1, \ldots, k$. Да положим $\delta_i(m, u_1, \ldots, u_l)=x_i$ при $i=1, \ldots, k$. Тогава имаме

$$\sigma(m, x_1, \ldots, x_k, \Phi[f](m, u_1, \ldots, u_l))=n.$$

От това равенство следва, че $!\Phi[f](m, u_1, \ldots, u_l)$. Очевидно

$$\Phi[f](m, u_1, \ldots, u_l)=f(x_1, \ldots, x_k)$$

и значи $!f(x_1, \ldots, x_k)$. Съгласно индуктивното предположение $\varphi_m^{(k)} \subset f$ и дефиниционната област на $\varphi_m^{(k)}$ се състои от h точки. Съгласно свойството б) на насочващата операция $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ точката $(x_1, \ldots, x_k)$ не принадлежи на дефиниционната област на функцията $\varphi_m^{(k)}$. От свойствата на функцията σ следва, че $\varphi_m^{(k)} \subset \varphi_n^{(k)}$ и дефиниционната област на $\varphi_n^{(k)}$ се получава, като присъединим към дефиниционната област на функцията $\varphi_m^{(k)}$ точката $(x_1, \ldots, x_k)$; при това имаме

$$\varphi_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k)=f(x_1, \ldots, x_k).$$

От казаното е ясно, че $\varphi_n^{(k)} \subset f$ и дефиниционната област на $\varphi_n^{(k)}$ се състои от $h+1$ точки.

След като доказахме лема 21, можем да пристъпим към доказателството на равенството (14). Нека при някой избор на аритметичната функция на k променливи f и на целите неотрицателни числа $u_1, \ldots, u_l$ дясната страна на (14) да притежава стойност. Ще покажем, че лявата притежава същата стойност. Действително от направеното предположение следва, че $!\mathrm{N}_0[f](u_1, \ldots, u_l)$. Да положим $\mathrm{N}_0[f](u_1, \ldots, u_l)=n$. В такъв случай ще имаме

$$\mathrm{N}[f](u_1, \ldots, u_l, \mathrm{R}[f](u_1, \ldots, u_l))=n.$$

Оттук следва, че $!\mathrm{R}[f](u_1, \ldots, u_l)$. Да положим $\mathrm{R}[f](u_1, \ldots, u_l)=r$. Тогава ще имаме равенството

$$\mathrm{N}[f](u_1, \ldots, u_l, r)=n.$$

Съгласно лема 21 $\varphi_n^{(k)} \subset f$. Очевидно

$$F[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l) = \theta_F(N_0[f](u_1, \ldots, u_l), u_1, \ldots, u_l)$$

и следователно $!F[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)$. Но тогава, използувайки компактността на оператора F, веднага заключаваме, че лявата страна на равенството (14) притежава същата стойност, както дясната.

Сега нека пък е дадено, че лявата страна на (14) притежава стойност. Ще покажем, че и дясната страна притежава стойност (съгласно доказаното тази стойност ще бъде, разбира се, същата). От предположението, че лявата страна на (14) притежава стойност, и от компактността на оператора F следва, че съществува финитна функция $\varphi \subset f$ такава, че $!F[\varphi](u_1, \ldots, u_l)$. Нека дефиниционната област на функцията φ се състои от m точки. Ще докажем, че

$$\exists_{r \leq m} r\ (R[\varphi](u_1, \ldots, u_l) = r).$$

Да допуснем противното. Нека $h \leq m$ и нека за всяко $r < h$ е изпълнено условието

$$(15) \qquad \Gamma[\varphi](u_1, \ldots, u_l, r) = 1 \ \& \ !N[\varphi](u_1, \ldots, u_l, r+1).$$

Ще покажем, че то е изпълнено и при $r = h$. Преди всичко забелязваме, че равенството

$$\Gamma[\varphi](u_1, \ldots, u_l, h) = 0$$

не може да бъде вярно, защото иначе влизаме в противоречие с нашето допускане. Очевидно $!N[\varphi](u_1, \ldots, u_l, h)$ (при $h = 0$ съгласно дефиницията на оператора N, а при $h > 0$ — съгласно направеното предположение за h). Да положим $N[\varphi](u_1, \ldots, u_l, h) = n$. Тъй като $\neg(\gamma(n, u_1, \ldots, u_l) = 0)$, можем да твърдим, че $\neg !\theta_F(n, u_1, \ldots, u_l)$, т. е. $\neg !F[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)$. От друга страна, от лема 21 следва, че $\varphi_n^{(k)} \subset \varphi$; ясно е в такъв случай, че

$$\exists p\,(\varphi_p^{(k)} \supset \varphi_n^{(k)} \ \& \ !F[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)).$$

Съгласно свойството а) на насочващата операция $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ заключаваме, че $!\delta_i(n, u_1, \ldots, u_l)$ при $i = 1, \ldots, k$. Оттук преди всичко следва, че $\gamma(n, u_1, \ldots, u_l) = 1$, т. е. $\Gamma[\varphi](u_1, \ldots, u_l, h) = 1$. Да положим $\delta_i(n, u_1, \ldots, u_l) = x_i$ при $i = 1, \ldots, k$. Съгласно свойството б) на насочващата операция $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ можем да твърдим, че $\forall p\,(\varphi_p^{(k)} \supset \varphi_n^{(k)} \ \& \ !F[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l) \rightleftarrows\ !\varphi_p^{(k)}(x_1, \ldots, x_k))$. Това дава специално, че $!\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ и значи $!\Phi[\varphi](n, u_1, \ldots, u_l)$. Следователно $!S[\varphi](n, u_1, \ldots, u_l)$, т. е.

$$!S[\varphi](N[\varphi](u_1, \ldots, u_l, h), u_1, \ldots, u_l)$$

и значи $!N[\varphi](u_1, \ldots, u_l, h+1)$. По такъв начин, изхождайки от предположението, че условието (15) е изпълнено за всяко $r < h$, ние успяхме да покажем, че то ще бъде изпълнено и за $r = h$. Тъй като h беше произволно число, ненадминаващо m, оттук следва, че условието (15) ще бъде изпълнено за всяко $r \leq m$, в частност при $r = m$. Следователно $!N[\varphi](u_1, \ldots, u_l, m+1)$. Да положим $N[\varphi](u_1, \ldots, u_l, m+1) = q$. Съгласно лема 21 $\varphi_q^{(k)} \subset \varphi$ и дефиниционната област на функцията $\varphi_q^{(k)}$ се състои от $m+1$ точки. Това обаче е невъзможно, защото дефиниционната област на φ се състои от m точки. И така, нашето допускане ни доведе до противоречие. Оттук заключаваме, че

$$!\,\mathrm{R}[\varphi](u_1, \ldots, u_l).$$

Компактността на оператора F дава в такъв случай, че $!\,\mathrm{R}[f](u_1, \ldots, u_l)$. Да положим $\mathrm{R}[f](u_1, \ldots, u_l)=\varrho$. Ще имаме $\Gamma[f](u_1, \ldots, u_l, \varrho)=0$, т. е. $\gamma(\mathrm{N}[f](u_1, \ldots, u_l, \varrho), u_1, \ldots, u_l)=0$ или все едно $\gamma(\mathrm{N}_0[f](u_1, \ldots, u_l), u_1, \ldots, u_l)=0$. Оттук обаче следва, че дясната страна на равенството (14) притежава стойност. С това равенството (14) е установено, а заедно с това и μ-рекурсивността на оператора F. Достатъчността на условията А и Б е доказана.

Като следствия от теорема 1 (по-точно от онази нейна част, която се отнася до необходимостта) ще получим някои други теореми, които дават необходими условия за μ-рекурсивност. За да формулираме тези теореми, ще бъде удобно да дадем някои допълнителни дефиниции.

Нека F е аритметичен оператор от тип $k \to l$ ($k \geqq 1$, $l \geqq 0$) и нека са дадени точката $(x_1, \ldots, x_k)$ от Z^k и точката $(u_1, \ldots, u_l)$ от Z^l. Ще казваме, че точката $(x_1, \ldots, x_k)$ е съществена за изчисляването на оператора F в точката $(u_1, \ldots, u_l)$, ако за всяка аритметична функция f на k променливи е вярна импликацията

$$!\,\mathrm{F}[f](u_1, \ldots, u_l) \rightrightarrows\, !\,f(x_1, \ldots, x_k).$$

(Да отбележим, че ако операторът F е компактен, то достатъчно е да се иска горната импликация да бъде вярна за всяка финитна функция на k променливи.)

Нека F е аритметичен оператор от тип $k \to l$ ($k \geqq 1$, $l \geqq 0$) и нека е дадена точката $(u_1, \ldots, u_l)$ от Z^l. Ще казваме, че операторът F е постоянен в точката $(u_1, \ldots, u_l)$, ако при всеки избор на аритметичните функции на k променливи f_1 и f_2 е изпълнено равенството

$$\mathrm{F}[f_1](u_1, \ldots, u_l)=\mathrm{F}[f_2](u_1, \ldots, u_l).$$

(Ако операторът F е компактен, то достатъчно е да се иска горното равенство да бъде изпълнено, когато f_1 и f_2 са произволни финитни функции на k променливи.)

Най-сетне нека се условим да означаваме с ζ аритметичната функция, чиято дефиниционна област е празна.

Теорема 2. *Нека* F *е μ-рекурсивен оператор от тип $k \to l$ ($k \geqq 1$, $l \geqq 0$) и нека е дадена точката $(u_1, \ldots, u_l)$ от Z^l. Ако операторът* F *не е постоянен в точката $(u_1, \ldots, u_l)$, то съществуват цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_k$ такива, че точката $(x_1, \ldots, x_k)$ е съществена за изчисляването на оператора* F *в точката $(u_1, \ldots, u_l)$.*

Доказателство. Нека $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ е една насочваща операция за оператора F; такава съществува съгласно теорема 1. Ако допуснем, че $!\,\mathrm{F}[\zeta](u_1, \ldots, u_l)$, то поради компактността на оператора F за всяка аритметична функция на k променливи f ще имаме

$$\mathrm{F}[f](u_1, \ldots, u_l)=\mathrm{F}[\zeta](u_1, \ldots, u_l)$$

и операторът F ще бъде постоянен в точката $(u_1, \ldots, u_l)$. Следователно $\neg\, !\,\mathrm{F}[\zeta](u_1, \ldots, u_l)$. Ако допуснем, че $\neg\, \exists p\, !\,\mathrm{F}[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)$, тогава за всяка финитна функция на k променливи φ ще имаме $\neg ! \mathrm{F}[\varphi](u_1, \ldots, u_l)$, откъдето би следвало, че операторът F е постоянен в точката $(u_1, \ldots, u_l)$. Значи $\exists p ! \mathrm{F}[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)$. Като си спомним, че $\zeta = \varphi_0^{(k)}$, можем да напишем

$$\neg ! \mathrm{F}[\varphi_0^{(k)}](u_1, \ldots, u_l) \,\&\, \exists p\, (\varphi_p^{(k)} \supset \varphi_0^{(k)} \,\&\, ! \mathrm{F}[\varphi_p^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)).$$

Съгласно свойството а) на насочващата операция $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ функциите $\delta_1, \ldots, \delta_k$ са дефинирани в точката $(0, u_1, \ldots, u_l)$. Да положим

$$\delta_i(0, u_1, \ldots, u_l) = x_i \text{ при } i = 1, \ldots, k.$$

Съгласно свойството б) на насочващата операция $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ за всяка финитна функция на k променливи φ ще бъде вярна импликацията

$$! \mathrm{F}[\varphi](u_1, \ldots, u_l) \rightarrow ! \varphi(x_1, \ldots, x_k).$$

Следователно точката $(x_1, \ldots, x_k)$ е съществена за изчисляването на оператора F в точката $(u_1, \ldots, u_l)$.

Теорема 3. *Нека* F *е μ-рекурсивен оператор от тип $k \to l$ ($k \geq 1$, $l \geq 0$) и нека е дадена точката $(u_1, \ldots, u_l)$ от Z^l. Ако не съществува точка от Z^k, която да бъде съществена за изчисляването на оператора* F *в точката $(u_1, \ldots, u_l)$, то $! \mathrm{F}[\zeta](u_1, \ldots, u_l)$.*

Доказателство. Допускаме, че $\neg ! \mathrm{F}[\zeta](u_1, \ldots, u_l)$. Нека f е произволна аритметична функция на k променливи. Съждението $! \mathrm{F}[f](u_1, \ldots, u_l)$ не е вярно, защото в противен случай операторът F би бил непостоянен в точката $(u_1, \ldots, u_l)$, откъдето по теорема 2 би следвало, че съществува точка от Z^k, съществена за изчисляването на оператора F в точката $(u_1, \ldots, u_l)$. Следователно при всеки избор на аритметичната функция на k променливи f имаме $\neg ! \mathrm{F}[f](u_1, \ldots, u_l)$. Но тогава очевидно всяка точка от Z^k ще бъде съществена за изчисляването на оператора F в точката $(u_1, \ldots, u_l)$. По такъв начин допускането, че $\neg ! \mathrm{F}[\zeta](u_1, \ldots, u_l)$, ни доведе до противоречие и с това теоремата е доказана.

Теорема 4. *Нека* F *е μ-рекурсивен оператор от тип $k \to l$ ($k \geq 1$, $l \geq 0$) и нека са дадени аритметична функция на k променливи f_0 и точка $(u_1, \ldots, u_l)$ от Z^l такива, че $! \mathrm{F}[f_0](u_1, \ldots, u_l)$. В такъв случай между функциите $f \subset f_0$, за които $! \mathrm{F}[f](u_1, \ldots, u_l)$, има една, чиято дефиниционна област е най-малка.*

Доказателство. За оператора F ще бъдат изпълнени предположенията, при които извършихме доказателството на достатъчността в теорема 1. Нека N_0 е μ-рекурсивният оператор от тип $k \to l$, разгледан в това доказателство. Съгласно равенството (14) имаме

$$\mathrm{F}[f_0](u_1, \ldots, u_l) = \theta_{\mathrm{F}}(\mathrm{N}_0[f_0](u_1, \ldots, u_l), u_1, \ldots, u_l).$$

Оттук следва, че $! \mathrm{N}_0[f_0](u_1, \ldots, u_l)$. Да положим $\mathrm{N}_0[f_0](u_1, \ldots, u_l) = n$. Ще покажем, че $\varphi_n^{(k)}$ е функцията, чието съществуване се твърди в настоящата теорема. Преди всичко от равенството

$$\mathrm{F}[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l) = \theta_{\mathrm{F}}(\mathrm{N}_0[f_0](u_1, \ldots, u_l), u_1, \ldots, u_l)$$

следва, че $! \mathrm{F}[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)$. Нека $f \subset f_0$ и нека $! \mathrm{F}[f](u_1, \ldots, u_l)$. В такъв случай от равенството (14) следва, че $! \mathrm{N}_0[f](u_1, \ldots, u_l)$. Поради компактността на оператора N_0 ще бъде изпълнено равенството

$N_0[f](u_1, \ldots, u_l) = n$. Но тогава от лема 21 (и от дефиницията на оператора N_0 чрез операторите N и R) следва, че $\varphi_n^{(k)} \subset f$.

Преди да продължим по-нататък, ще покажем, че никое от необходимите условия за μ-рекурсивност, които се дават от теоремите 2, 3 и 4, не е достатъчно, дори даденият оператор да е изчислим. За целта да разгледаме операторите F_1 и F_2 от тип $1 \to 0$, дефинирани по следния начин:

$$F_1[f]() = 0, \text{ ако } !f(0) \,\&\, \exists x (x > 0 \,\&\, !f(x));$$

$$F_2[f]() = 0, \text{ ако } (f(1) = 0 \,\&\, f(2) = 0) \vee (f(2) = 1 \,\&\, f(0) = 1) \vee (f(0) = 2 \,\&\, f(1) = 2).$$

Очевидно F_1 и F_2 са изчислими. Операторът F_1 удовлетворява необходимите условия, които се дават от теореми 2 и 3, защото точката 0 е съществена за изчисляването на оператора F_1; въпреки това условието, изказано в теорема 4, не е удовлетворено, тъй като например в случая, когато f_0 е константата 0, между функциите $f \subset f_0$, за които $!F_1[f]()$, няма такава, чиято дефиниционна област е най-малка. Оттук е ясно, че операторът F_1 не е μ-рекурсивен, а условията от теореми 2 и 3 не са достатъчни. От друга страна, операторът F_2 удовлетворява необходимото условие за μ-рекурсивност от теорема 4. Действително, да означим с χ_0, χ_1 и χ_2 финитните функции на една променлива с матрици съответно

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Ако f е аритметична функция на една променлива, то $!F_2[f]()$ точно тогава, когато $\chi_0 \subset f \vee \chi_1 \subset f \vee \chi_2 \subset f$. Нека е дадена аритметичната функция на една променлива f_0 такава, че $!F_2[f_0]()$. Тогава можем да изберем числото i $(0 \leq i \leq 2)$ така, че $\chi_i \subset f_0$. Лесно е да се убедим, че функцията χ_i има най-малката дефиниционна област между функциите $f \subset f_0$, за които $!F_2[f]()$; това следва от обстоятелството, че никои две от функциите χ_0, χ_1, χ_2 нямат общо продължение. С това е проверено, че F_2 удовлетворява условието от теорема 4. Условията, съдържащи се в теореми 2 и 3, обаче не са изпълнени, тъй като не съществува точка, съществена за изчисляването на оператора F_2. Оттук се вижда, че операторът F_2 не е μ-рекурсивен, а условието от теорема 4 не е достатъчно. От разгледаните примери се вижда освен това, че условието, дадено с теорема 4, не е следствие от условията, дадени с теореми 2 и 3, нито пък обратно. (Що се касае до самите условия от теореми 2 и 3, доказателството на теорема 3 показва, че второто от тези условия следва от първото; също така лесно се убеждаваме, че ако за един компактен оператор F от тип $k \to l$ е изпълнено условието от теорема 3, то не е възможно да се посочи точка $(u_1, \ldots, u_l)$ от Z^l такава, че операторът F да бъде непостоянен в точката $(u_1, \ldots, u_l)$ и въпреки това да не съществува точка от Z^k, съществена за изчисляването на оператора F в точката $(u_1, \ldots, u_l)$.)

Теорема 4 допуска едно непосредствено обобщение, а именно следното:

Теорема 5. *Нека* F *е μ-рекурсивен оператор от тип $k \to l$ $(k \geq 1$, $l \geq 0)$, нека f_0 е аритметична функция на k променливи, нека M е подмножество на Z^l и нека функцията* $F[f_0]$ *е дефинирана във всички точки на множеството M. В такъв случай между функциите $f \subset f_0$,* *за които* $F[f]$ *е дефинирана във всички точки на* M*, има една, чиято дефиниционна област е най-малка.*

Доказателство. Нека $(u_1, \ldots, u_l)$ е произволна точка от Z^l. Съгласно теорема 4 между функциите $f \subset f_0$, за които $!F[f](u_1, \ldots, u_l)$, има една, чиято дефиниционна област е най-малка; да означим тази функция с $g^{(u_1, \ldots, u_l)}$. Нека g е обединението на функциите $g^{(u_1, \ldots, u_l)}$, съответствуващи на всевъзможните точки $(u_1, \ldots, u_l)$ от M. Да вземем произволна точка $(u_1, \ldots, u_l)$ от M. Очевидно $g^{(u_1, \ldots, u_l)} \subset g$ и $!F[g^{(u_1, \ldots, u_l)}]$ $(u_1, \ldots, u_l)$; оттук обаче следва, че $!F[g](u_1, \ldots, u_l)$. Значи функцията g е дефинирана във всички точки на M. Нека $f \subset f_0$ и нека $F[f]$ е дефинирана във всички точки на M. Тогава при всеки избор на точката $(u_1, \ldots, u_l)$ от M дефиниционната област на функцията $g^{(u_1, \ldots, u_l)}$ ще се съдържа в дефиниционната област на функцията f; оттук обаче следва, че дефиниционната област на функцията g също се съдържа в дефиниционната област на функцията f. Следователно g е функцията, чието съществуване се твърди в настоящата теорема.

Необходимото условие за μ-рекурсивност, което дава теорема 5, не е достатъчно, защото, както показва доказателството на теоремата, това условие е следствие от условието, което дава теорема 4.

С помощта на теорема 5 ще получим пример за двойка функции, едната от които е образ на другата чрез подходящ изчислим оператор, но не може да бъде получена от нея чрез никакъв μ-рекурсивен оператор.

Теорема 6. *Съществуват изчислим оператор* F_0 *от тип* $2 \to 1$ *и аритметична функция на две променливи* f_0 *такива, че равенството* $F[f_0] = F_0[f_0]$ *не е изпълнено за никой* μ*-рекурсивен оператор* F *от тип* $2 \to 1$.

Доказателство. Нека F_0 е операторът от тип $2 \to 1$, който се дефинира по следния начин:

$$F_0[f](x) = 0, \quad \text{ако} \quad \exists y (f(x, y) = 0).$$

Очевидно операторът F_0 е изчислим.

Построението на функцията f_0 е по-сложно. Вземаме си някакво подмножество L на Z, което не е рекурсивно номеруемо. Да дефинираме една функция на две променливи g_0 по следния начин:

$$g_0(x, y) = 0, \quad \text{ако} \quad x \in L.$$

След това да положим $h_0 = F_0[g_0]$. Очевидно функцията h_0 може да се дефинира и така:

$$h_0(x) = 0, \quad \text{ако} \quad x \in L.$$

Нека A е множеството на всевъзможните μ-рекурсивни оператори F от тип $2 \to 1$, които притежават следното свойство: съществува функция $g \subset g_0$ такава, че $F[g] = h_0$. Лесно е да се убедим, че такива оператори има безбройно много. Тъй като всичките μ-рекурсивни оператори са изброимо много, множеството A също ще бъде изброимо. Да наредим елементите на A в една редица

$$F_1, F_2, F_3, \ldots$$

Нека сега m е произволно цяло положително число. Очевидно $F_m[g_0] \supset h_0$, тъй като $h_0 = F_m[g]$ за някоя функция $g \subset g_0$. Значи функцията $F_m[g_0]$ е дефинирана във всички точки на множеството L. Съгласно теорема 5 между функциите $g \subset g_0$, за които функцията $F_m[g]$ е дефинирана във всички точки на L, има една, чиято дефиниционна област е най-малка. Да означим тази функция с g_m, а нейната дефиниционна област с D_m. Избираме функцията $g \subset g_0$ по такъв начин, че $F_m[g] = h_0$. Тъй като h_0 е дефинирана във всички точки на L, ще имаме $g_m \subset g$ и следователно $F_m[g_m] \subset F_m[g] = h_0$, но тъй като $F_m[g_m]$ е дефинирана във всички точки на L, оттук следва, че $F_m[g_m] = h_0$. Тъй като функцията h_0 не е частично-рекурсивна, от това равенство следва, че функцията g_m не е финитна. Следователно нейната дефиниционна област D_m се състои от безбройно много точки.

Ако M е подмножество на Z^2, то с $\text{пр}_1 M$ да означим множеството на онези цели неотрицателни числа x, за които $\exists y((x, y) \in M)$. Сега ще построим едно множество $D \subset Z^2$ със следните две свойства:

а) $\text{пр}_1 D = L$;

б) D не съдържа никое от множествата D_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$.

За целта дефинираме една редица от подмножества на Z^2

$$M_0, M_1, M_2, \ldots$$

по следния начин: M_0 е празното множество; ако $\text{пр}_1 D_m \subset M_{m-1}$, то $M_m = M_{m-1}$, в противен случай вземаме едно число x_m, принадлежащо на разликата $\text{пр}_1 D_m - \text{пр}_1 M_{m-1}$ и едно число y_m такова, че точката (x_m, y_m) да принадлежи на D_m, след което с M_m означаваме множеството, което се получава, като към M_{m-1} присъединим точката $(x_m, y_m + 1)$. След като сме дефинирали тези множества, полагаме

$$M = \bigcup_{m=1}^{\infty} M_m.$$

С K да означим множеството на онези точки (x, y) от Z^2, за които $x \in L - \text{пр}_1 M$, $y = 0$, и да положим

$$D = M \cup K.$$

Ще покажем, че множеството D притежава свойствата а) и б). Тъй като при всяко m е налице включването $\text{пр}_1 D_m \subset L$, при всяко m ще имаме $\text{пр}_1 M_m \subset L$. Следователно $\text{пр}_1 M \subset L$. От друга страна, $\text{пр}_1 K = L - \text{пр}_1 M$. В такъв случай от равенството $\text{пр}_1 D = \text{пр}_1 M \cup \text{пр}_1 K$ следва, че $\text{пр}_1 D = L$, т. е. множеството D притежава свойството а). За да покажем, че е налице и свойството б), ще отбележим, че всички множества M_m са крайни и че за всяко x съществува най-много едно y, за което точката (x, y) принадлежи на D. Да допуснем сега, че за някое m е изпълнено включването $D_m \subset D$. Ако $\text{пр}_1 D_m$ се съдържа в $\text{пр}_1 M_{m-1}$, то множеството $\text{пр}_1 D_m$ се състои от краен брой точки и значи и самото множество D_m трябва да се състои от краен брой точки (тъй като за всяко x може да съществува най-много едно y такова, че точката (x, y) да принадлежи на D_m). Това обаче е невъзможно. Значи $\text{пр}_1 D_m$ не се съдържа в $\text{пр}_1 M_{m-1}$. Тогава можем да разгледаме точката (x_m, y_m), която ще принадлежи на D_m. Точката $(x_m, y_m + 1)$ принадлежи на множеството D, следователно точката (x_m, y_m) не принадлежи на D. Това обаче противоречи на включването $D_m \subset D$. По такъв начин ние показахме, че никое от множествата D_m не се съдържа в D, т. е. налице е и свойството б).

Да означим сега с f_0 аритметичната функция на две променливи, която се дефинира по следния начин:

$$f_0(x, y)=0, \text{ ако } (x, y) \in D.$$

Тъй като $\text{пр}_1 D=L$, ще бъде изпълнено равенството $F_0[f_0]=h_0$. Да допуснем, че съществува μ-рекурсивен оператор F, за който $F[f_0]=h_0$. Операторът F ще принадлежи на множеството A, понеже $f_0 \subset g_0$. Нека $F=F_m$. Тогава функцията $F_m[f_0]$ ще бъде дефинирана във всички точки на множеството L и значи дефиниционната област на функцията f_0 ще съдържа тази на g_m, т. е. множеството D ще съдържа множеството D_m. Ние обаче видяхме, че това е невъзможно.

Ние формулирахме няколко необходими условия за μ-рекурсивност, които се оказаха недостатъчни. Ще формулираме още едно необходимо условие, което също не ще бъде достатъчно, въпреки че може да се докаже, че то е по-силно от условията, съдържащи се в теореми 2, 3, 4 и 5.

Теорема 7. *Нека* F *е μ-рекурсивен оператор от тип* $k \to l$ $(k \geq 1, l \geq 0)$, *нека са дадени аритметична функция на k променливи f и точка* $(u_1, \ldots, u_l)$ *от* Z^l *такива, че* $\neg ! F[f](u_1, \ldots, u_l)$ *и съществува аритметична функция на k променливи g_0, за която* $g_0 \supset f \,\&\, ! F[g_0] (u_1, \ldots, u_l)$. *В такъв случай съществува точка от* Z^k, *която не принадлежи на дефиниционната област на функцията f, но принадлежи на дефиниционната област на всяка аритметична функция на k променливи g, за която* $g \supset f \,\&\, ! F[g](u_1, \ldots, u_l)$.

Доказателство. Вземаме финитна функция $\varphi \subset g_0$ такава, че $! F[\varphi](u_1, \ldots, u_l)$. От равенството (14), приложено за функцията φ, следва, че $! \theta_F(N_0[\varphi](u_1, \ldots, u_l), u_1, \ldots, u_l)$ (използуваме означенията от доказателството на достатъчността в теорема 1). Оттук следва, че $! N_0[\varphi](u_1, \ldots, u_l)$ и значи $! R[\varphi](u_1, \ldots, u_l)$. Да положим $R[\varphi](u_1, \ldots, u_l)=\varrho$. Ще имаме равенството

$$N_0[\varphi](u_1, \ldots, u_l)=N[\varphi](u_1, \ldots, u_l, \varrho),$$

откъдето е ясно, че $! N[\varphi](u_1, \ldots, u_l, \varrho)$. От дефиницията на оператора N следва, че $\underset{r \leq \varrho}{\forall r} ! N[\varphi](u_1, \ldots, u_l, r)$. Да положим $N[\varphi](u_1, \ldots, u_l, r)=n_r$ при $r=0, 1, \ldots, \varrho$. Очевидно имаме $! \theta_F(n_\varrho, u_1, \ldots, u_l)$, т. е. $! F[\varphi^{(k)}_{n_\varrho}] (u_1, \ldots, u_l)$. Поради компактността на оператора F заключаваме, че $\neg \left(\varphi^{(k)}_{n_\varrho} \subset f\right)$. Да означим с r_0 най-малкото между целите неотрицателни числа r, за които $\neg \left(\varphi^{(k)}_{n_r} \subset f\right)$. Числото r_0 е различно от 0, защото $n_0=0$, а $\varphi^{(k)}_0=\zeta \subset f$. Да разгледаме функцията $\varphi^{(k)}_{n_{r_0}-1}$. Очевидно $\varphi^{(k)}_{n_{r_0}-1} \subset f$ и следователно $\neg ! F\left[\varphi^{(k)}_{n_{r_0}-1}\right](u_1, \ldots, u_l)$. От друга страна, $\exists p \left(\varphi^{(k)}_p \supset \varphi^{(k)}_{n_{r_0}-1} \,\&\, ! F[\varphi^{(k)}_p] (u_1, \ldots, u_l)\right)$; за да се убедим в това, достатъчно е да изберем p така, че $\varphi^{(k)}_p=\varphi$. Съгласно условието а) от дефиницията на насочваща операция заключаваме, че $! \delta_i(n_{r_0}-1, u_1, \ldots, u_l)$ при $i=1, \ldots, k$. Да положим

$\delta_i(n_{r_0-1}, u_1, \ldots, u_l) = x_i$ при $i = 1, \ldots, k$. Ще покажем, че $(x_1, \ldots, x_k)$ е търсената точка от Z^k.

Преди всичко имаме

$$n_{r_0} = \mathrm{S}[\gamma](n_{r_0-1}, u_1, \ldots, u_l) = \sigma(n_{r_0-1}, x_1, \ldots, x_k, \varphi(x_1, \ldots, x_k)).$$

Следователно $\varphi^{(k)}_{n_{r_0-1}} \subset \varphi^{(k)}_{n_{r_0}}$ и дефиниционната област на $\varphi^{(k)}_{n_{r_0}}$ се състои от точките на дефиниционната област на $\varphi^{(k)}_{n_{r_0-1}}$ и от точката $(x_1, \ldots, x_k)$. Да допуснем, че $(x_1, \ldots, x_k)$ принадлежи на дефиниционната област на f. Тогава $\varphi(x_1, \ldots, x_k) = g_0(x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k)$ и значи $\varphi^{(k)}_{n_{r_0}} \subset f$, което не е вярно. Следователно точката $(x_1, \ldots, x_k)$ не принадлежи на дефиниционната област на функцията f.

Нека g е аритметична функция на k променливи, за която $g \supset f \,\&\, !\,\mathrm{F}[g](u_1, \ldots, u_l)$. Ще се убедим, че $!\,g(x_1, \ldots, x_k)$. Да изберем финитна функция $\varphi \subset g$ такава, че $!\,\mathrm{F}[\overline{\varphi}](u_1, \ldots, u_l)$. Тъй като $\varphi^{(k)}_{n_{r_0-1}} \subset f$, ще имаме $\varphi^{(k)}_{n_{r_0-1}} \subset g$. Благодарение на това можем да образуваме обединението на функциите φ и $\varphi^{(k)}_{n_{r_0-1}}$. Да означим това обединение с φ^*. Очевидно $\varphi^* \supset \varphi^{(k)}_{n_{r_0-1}} \,\&\, !\,\mathrm{F}[\varphi^*](u_1, \ldots, u_l)$. Съгласно условието б) от дефиницията на насочваща операция функцията φ^* ще бъде дефинирана в точката $(x_1, \ldots, x_k)$. Пак от същото условие следва, че $\neg\, !\,\varphi^{(k)}_{n_{r_0-1}}(x_1, \ldots, x_k)$. От тези две неща следва, че точката $(x_1, \ldots, x_k)$ принадлежи на дефиниционната област на функцията $\overline{\varphi}$, а значи и на дефиниционната област на g. С това доказателството е завършено.

За да се уверим, че условието, което се дава от теорема 7, не е достатъчно за μ-рекурсивността на един изчислим оператор, да разгледаме отново оператора F от тип $1 \to 1$, който дефинирахме в пример 6 към дефиницията на насочваща операция. Както отбелязахме тогава, този оператор не е μ-рекурсивен. Въпреки това условието, което се дава от теорема 7, е изпълнено за този оператор; действително, ако за някоя аритметична функция на една променлива f и за някое цяло неотрицателно u имаме $\neg\, !\,\mathrm{F}[f](u)$, то функцията f не е дефинирана в точката 0, а всяка аритметична функция на една променлива g, за която $!\,\mathrm{F}[g](u)$, е дефинирана в точката 0 (понеже $u \overline{\in} M$).

Редицата примери, които разгледахме, показват, че класът на μ-рекурсивните оператори е съществено по-тесен от класа на изчислимите оператори; съществуват даже твърде прости изчислими оператори, които не са μ-рекурсивни. Въпреки това ние ще докажем една теорема, от която се вижда, че всеки изчислим оператор може да бъде получен от подходящ μ-рекурсивен оператор чрез една проста операция, която сега ще опишем.

Нека F е аритметичен оператор от тип $k \to l$, а F_0 нека е аритметичен оператор от тип $k \to l+1$. Ще казваме, че операторът F е **проекция** на оператора F_0, ако е изпълнено следното условие: при всеки избор на аритметичната функция на k променливи f и на целите неотрицателни числа $u_1, \ldots, u_l, v$ равенството

$$F[f](u_1,\ldots,u_l)=v$$

е изпълнено точно тогава, когато

$$\exists m\,(F_0[f](u_1,\ldots,u_l,m)=v).$$

Теорема 8. *Всеки изчислим оператор от тип $k\to l$ $(k\geqq 1,\ l\geqq 0)$ е проекция на подходящ μ-рекурсивен оператор от тип $k\to l+1$.*

Доказателство. Нека k е произволно цяло положително число. Ще дефинираме един μ-рекурсивен оператор U от тип $k\to 1$ със следното свойство: при всеки избор на аритметичната функция на k променливи f множеството на финитните функции $\varphi\subset f$ съвпада с множеството на функциите от вида $\varphi_n^{(k)}$, където n е стойност на функцията $U[f]$. За целта да положим най-напред

$$\lambda(x,y)=\begin{cases}1, & \text{ако } x=y,\\ 0, & \text{ако } \neg(x=y).\end{cases}$$

Функцията λ очевидно е примитивно-рекурсивна. По-нататък да дефинираме оператора U_0 от тип $k\to 2$ по следния начин:

$$U_0[f](m,i)=\lambda(f(\xi_1(m,i),\ldots,\xi_k(m,i)),\ \eta(m,i)),$$

където $\xi_1,\ldots,\xi_k$ и η са примитивно-рекурсивните функции от лема 1. След това да дефинираме един оператор U_1 от тип $k\to 2$ посредством равенството

$$U_1[f](m,r)=\prod_{i=1}^{r}U_0[f](m,i),$$

където при $r=0$ дясната страна считаме равна на 1. След като е дефиниран операторът U_1, операторът U се дефинира чрез равенството

$$U[f](m)=m.U_1[f](m,\pi(m)),$$

където π е примитивно-рекурсивната функция от лема 1. Не е трудно да се убедим, че операторът U е μ-рекурсивен (той е даже примитивно-рекурсивен, т. е. може да бъде построен, като се използуват само пунктовете I—VI от дефиницията на μ-рекурсивен оператор). Сега ще покажем, че операторът U притежава формулираното в началото свойство.

Нека f е аритметична функция на k променливи и нека е дадена финитна функция $\varphi\subset f$. Нека дефиниционната област на функцията φ се състои от точките $(x_{i1},\ldots,x_{ik})$, $i=1,\ldots,p$, които са различни една от друга. Да положим $\varphi(x_{i1},\ldots,x_{ik})=y_i$ при $i=1,\ldots,p$ и да означим с T матрицата

$$\begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12}\ldots x_{1k} & y_1\\ x_{21} & x_{22}\ldots x_{2k} & y_2\\ \\ x_{p1} & x_{p2}\ldots x_{pk} & y_p\end{Vmatrix}.$$

Нека $\nu(T)=m$. Очевидно $\varphi_m^{(k)}=\varphi$. От предположението, че $\varphi\subset f$, следва, че

$$\forall_{1\leqq i\leqq\pi(m)} i\ (f(\xi_1(m,i),\ldots,\xi_k(m,i))=\eta(m,i)).$$

Оттук заключаваме, че $\underset{1 \leq i \leq \pi(m)}{\forall i} (U_0[f](m, i)=1)$ и значи $\prod_{i=1}^{\pi(m)} U_0[f](m, i)=1$. Следователно $U_1[f](m, \pi(m))=1$, т. е. $U[f](m)=m$. Това показва, че числото m е стойност на функцията $U[f]$.

Обратно, нека цялото неотрицателно число n е стойност на функцията $U[f]$. Ако $n=0$, то $\varphi_n^{(k)}=\zeta \subset f$. Нека $n>0$. Избираме цялото неотрицателно число m по такъв начин, че $U[f](m)=n$. Последното равенство означава, че $m.U_1[f](m, \pi(m))=n$. Оттук следва, че $! U_1[f](m, \pi(m))$. Тъй като $U_1[f](m, i)$ не приема друга стойност освен 0 и 1, стойността на $U_1[f](m, \pi(m))$ не може да бъде друга освен 0 или 1. Тя не може да бъде 0, защото $n>0$. Следователно тя е 1. Това дава, че $m=n$ и $\prod_{i=1}^{\pi(n)} U_0[f](n, i)=1$. Тъй като $U_0[f](n, i)$ не взема друга стойност освен 0 и 1, оттук следва, че $\underset{1 \leq i \leq \pi(n)}{\forall i} (U_0[f](n, i)=1)$. Последното означава, че при $1 \leq i \leq \pi(n)$

$$f(\xi_1(n, i), \ldots, \xi_k(n, i))=\eta(n, i).$$

Да разгледаме функцията $\varphi_n^{(k)}$. От съждението, което току-що доказахме, следва, че за всяка точка $(x_1, \ldots, x_k)$ от дефиниционната област на φ е изпълнено равенството $f(x_1, \ldots, x_k)=\varphi(x_1, \ldots, x_k)$. Ясно е оттук, че $\varphi_n^{(k)} \subset f$.

След като установихме, че операторът U притежава желаното свойство, ние лесно ще извършим доказателството на теорема 8. Нека l е цяло неотрицателно число и нека F е изчислим оператор от тип $k \to l$. Да дефинираме оператора F_0 от тип $k \to l+1$ чрез равенството

$$F_0[f](u_1, \ldots, u_l, m)=\theta_F(U[f](m), u_1, \ldots, u_l).$$

Операторът F_0 е μ-рекурсивен, защото операторът U е μ-рекурсивен, а функцията θ_F е частично-рекурсивна. Ще покажем, че операторът F е проекция на оператора F_0. Нека са дадени аритметичната функция f на k променливи и целите неотрицателни числа $u_1, \ldots, u_l, v$. Ако е изпълнено равенството $F[f](u_1, \ldots, u_l)=v$, то съществува финитна функция $\varphi \subset f$ такава, че $F[\varphi](u_1, \ldots, u_l)=v$. Съгласно свойството на оператора U, което установихме, φ може да се представи във вида $\varphi_n^{(k)}$, където n е стойност на функцията $U[f]$. Избираме числото m така, че $U[f](m)=n$. Ще имаме

$$F_0[f](u_1, \ldots, u_l, m)=\theta_F(U[f](m), u_1, \ldots, u_l)=$$
$$=\theta_F(n, u_1, \ldots, u_l)=F[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)=v.$$

Обратно, нека при някой избор на числото m е изпълнено равенството $F_0[f](u_1, \ldots, u_l, m)=v$. Тогава $\theta_F(U[f](m), u_1, \ldots, u_l)=v$ и следователно $!U[f](m)$. Да положим $U[f](m)=n$. От това, което знаем за оператора U, следва, че $\varphi_n^{(k)} \subset f$. Равенството $\theta_F(n, u_1, \ldots, u_l)=v$ показва, че $F[\varphi_n^{(k)}](u_1, \ldots, u_l)=v$, откъдето заключаваме, че $F[f](u_1, \ldots, u_l)=v$. Теоремата е доказана.

Току-що доказаната теорема 8 показва, че понятието изчислим оператор може да бъде дефинирано индуктивно с помощта на правилата

I—VII (при замяна на термина „μ-рекурсивен“ с термина „изчислим“) и допълнителното правило

VIII. Ако F_0 е изчислим оператор от тип $k \to l+1$, а операторът F от тип $k \to l$ представлява проекция на оператора F_0, то операторът F е също изчислим.

Че всеки изчислим оператор може да се получи с помощта на правилата I—VIII, това следва от теорема 8. Обратното твърдение, а именно, че всеки оператор, получен с помощта на правилата I—VIII, е изчислим, може да бъде обосновано с помощта на лемите 6—12 и на още една лема, която сега ще формулираме.

Лема 22. *Нека F_0 е изчислим оператор от тип $k \to l+1$ ($k \geq 1$, $l \geq 0$) и нека операторът F от тип $k \to l$ представлява проекция на оператора F_0. В такъв случай операторът F е също изчислим.*

Доказателство. Да покажем най-напред, че операторът F е компактен. Нека f е аритметична функция на k променливи и нека $u_1, \ldots, u_l$ и v са цели неотрицателни числа. Да предположим, че е изпълнено равенството $F[f](u_1, \ldots, u_l) = v$. Избираме числото m така, че да бъде изпълнено равенството $F_0[f](u_1, \ldots, u_l, m) = v$; това е възможно, защото F е проекция на F_0. След това избираме финитна функция $\varphi \subset f$ така, че да бъде изпълнено равенството $F_0[\varphi](u_1, \ldots, u_l, m) = v$; това е възможно благодарение на компактността на F_0. Тъй като F е проекция на F_0, оттук следва, че $F[\varphi](u_1, \ldots, u_l) = v$. Обратно, нека за някоя финитна функция $\varphi \subset f$ е изпълнено равенството $F[\varphi](u_1, \ldots, u_l) = v$. Избираме числото m така, че да бъде изпълнено равенството $F_0[\varphi](u_1, \ldots, u_l, m) = v$. Тогава ще бъде изпълнено и равенството $F_0[f](u_1, \ldots, u_l, m) = v$, откъдето следва, че $F[f](u_1, \ldots, u_l) = v$. Компактността на оператора F е доказана. Сега ще се убедим, че функцията θ_F е частично-рекурсивна. Нека $n, u_1, \ldots, u_l, v$ са произволни цели неотрицателни числа. Равенството $\theta_F(n, u_1, \ldots, u_l) = v$ е изпълнено точно тогава, когато $\exists m(\theta_{F_0}(n, u_1, \ldots, u_l, m) = v)$. Тъй като функцията θ_{F_0} е частично-рекурсивна, оттук следва, че графиката на функцията θ_F е рекурсивно номеруемо множество и значи самата функция θ_F е частично-рекурсивна. С това изчислимостта на оператора F е установена.

И така индуктивната дефиниция на понятието изчислим оператор с помощта на правилата I—VIII е еквивалентна на първоначално формулираната дефиниция. Правилото VIII обаче има един съществен недостатък в сравнение с правилата I—VII: това правило не е приложимо към всички оператори. Действително, ако операторът F_0 от тип $k \to l+1$ е такъв, че при някой избор на аритметичната функция на k променливи f и на целите неотрицателни числа $u_1, \ldots, u_l$ изразът $F_0[f](u_1, \ldots, u_l, m)$ приема повече от една стойност, когато m се мени, то очевидно е, че не съществува оператор F от тип $k \to l$, който да бъде проекция на оператора F_0. Във връзка с това обстоятелство възниква задачата за намиране на достатъчно проста индуктивна дефиниция на понятието изчислим оператор, в която всички правила да са свободни от посочения недостатък.

Постъпила на 15. IV. 1962 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Davis M., Computability and unsolvability, New York—Toronto—London, 1958.
2. Kleene S. C., Introduction to metamathematics, New York—Toronto, 1952. Руски превод: Клини С. К., Введение в метаматематику, Москва, 1957.
3. Марков А. А., Об одном принципе конструктивной математической логики, Труды Третьего Всесоюзного математического съезда, т. II, стр. 146—147, Москва, 1956.
4. Turing A. M., Systems of logic based on ordinals. Proc. of the Lond. Math. Soc. ser. 2, **45**, 1939, 161—228.
5. Успенский В. А., О вычислимых операциях, Докл. Акад. наук СССР, **103**, 1955, 773—776.
6. Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, Москва, 1960.

ВЫЧИСЛИМЫЕ И μ-РЕКУРСИВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Д. Скордев

(Резюме)

Понятие вычислимого оператора допускает много различных определений. Так, например, в книге Клини [2] содержатся по меньшей мере три определения понятия вычислимости оператора: частичная рекурсивность, определимость посредством схем I—VI (μ-рекурсивность) и вычислимость по Тьюрингу. Из работы Успенского [5] вытекает другое определение, которому родственно определение, данное Дэйвисом [1]. Последние два определения эквивалентны определению частично-рекурсивного оператора; эквивалентны между собой также μ-рекурсивность и вычислимость по Тьюрингу. Из [2] видно, что в случае, когда нас интересует результат применения операторов только ко всюду определенным функциям, первые три упомянутые определения эквивалентны между собой, так что все пять определений, о которых шла речь, в этом случае дают одно и то же. Положение, однако, изменяется, если применить операторы и к не всюду определенным функциям. В этом случае класс μ-рекурсивных операторов оказывается существенно уже класса всех частично-рекурсивных операторов.

В настоящей работе исследуются связи между упомянутыми двумя классами операторов (причем в качестве определения второго из них принимается определение Дэйвиса; вычислимыми операторами называем далее как раз элементы этого класса). С этой целью вводится понятие направляющей операции для данного арифметического оператора. Пусть F — оператор типа $k \to l$ (т. е. область применимости F состоит из всевозможных арифметических функций от k переменных, а результаты применения оператора F являются функциями от l переменных). Предположим, что дана некоторая эффективная нумерация всех арифметических функций от k переменных, область определения которых конечна (функции с конечной областью определения будем называть финитными). Мы говорим, что система $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ из k арифметических функций от $l+1$ переменных является направляющей операцией для оператора F, если выполняются следующие два условия:

а) области определения функций $\delta_1, \ldots, \delta_k$ совпадают, причем точка $(n, u_1, \ldots, u_l)$ принадлежит области определения какой-либо из этих функций в том и только в том случае, когда результат применения оператора F к финитной функции с номером n не определен в точке $(u_1, \ldots, u_l)$, но существует финитная функция, являющаяся продолжением финитной функции с номером n, такая, что результат применения оператора F к ней уже определен в точке $(u_1, \ldots, u_l)$;

б) если точка $(n, u_1, \ldots, u_l)$ принадлежит области определения функций $\delta_1, \ldots, \delta_k$ и если $\delta_i(n, u_1, \ldots, u_l) = x_i$ при $i = 1, \ldots, k$, то точка $(x_1, \ldots, x_k)$ не принадлежит области определения финитной функции с номером n, но принадлежит областям определения всех её финитных продолжений, для которых результат применения оператора F определен в точке $(u_1, \ldots, u_l)$.

Направляющую операцию $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ называем частично-рекурсивной, если функции $\delta_1, \ldots, \delta_k$ частично-рекурсивны.

Доказываем следующее утверждение:

Теорема 1. *Для того, чтобы арифметический оператор* F *был μ-рекурсивным, необходимо и достаточно одновременное выполнение формулируемых ниже условий А и Б.*

А. Оператор F *вычислим.*

Б. Для оператора F *существует частично-рекурсивная направляющая операция.*

Приводится простой пример вычислимого оператора, для которого не существует направляющей операции, а также и пример вычислимого оператора, для которого существует направляющая операция, однако не частично-рекурсивная.

Из теоремы 1 выводятся некоторые необходимые условия для μ-рекурсивности оператора (теоремы 2, 3, 4, 5 и 7)[1]. При помощи примеров устанавливается, что эти условия не являются достаточными.

Доказывается теорема 6, которая утверждает существование пары функций, вторая из которых является результатом применения некоторого вычислимого оператора к первой, но не может быть получена из нее посредством никакого μ-рекурсивного оператора.

К концу работы вводится понятие проекции оператора. Мы говорим, что оператор F типа $k \to l$ является проекцией оператора F_0 типа $k \to l+1$, если результат применения оператора F к произвольной функции от k переменных f принимает в точке $(u_1, \ldots, u_l)$ значение v тогда и только тогда, когда существует такое число m, что результат применения оператора F_0 к функции f принимает значение v в точке $(u_1, \ldots, u_l, m)$. Доказываем теорему 8, которая утверждает, что каждый вычислимый оператор является проекцией подходящего μ-рекурсивного оператора.

Автор во многом обязан В. А. Успенскому, который привлек его внимание к вопросу об отношении между частичной рекурсивностью и μ-рекурсивностью в случае, когда операторы применяются и к не всюду определенным функциям. В частности, В. А. Успенским был поставлен вопрос о существовании пары функций со свойством, о котором идет речь в теореме 6.

Превел авторът

[1] Результат, сформулированный в теореме 2, был получен раньше А. А. Кузнецовым посредством прямого доказательства.

BERECHENBARE UND μ-REKURSIVE OPERATOREN

D. Skordev

(*Zusammenfassung*)

Der Begriff des berechenbaren Operators läßt zahlreiche Definitionen zu. So enthält zum Beispiel das Buch von Kleene [2] mindestens drei Definitionen für den Begriff der Berechenbarkeit eines Operators: partielle Rekursivität, Bestimmbarkeit vermittels der Schemata I—VI (μ-Rekursivität) und Berechenbarkeit im Sinne von Turing. Aus der Arbeit von Uspenskij [5] rührt noch eine andere Definition her, die mit der von Davis [1] verwandt ist. Die letzterwähnten beiden Definitionen sind der Definition eines partiell rekursiven Operators äquivalent; äquivalent sind untereinander auch die μ-Rekursivität und die Berechenbarkeit im Sinne von Turing. Aus [2] geht hervor, daß wenn uns das Ergebnis der Anwendung der Operatoren nur auf die für alle Argumentenwerte definierten Funktionen interessiert, die ersten drei Definitionen untereinander äquivalent sind, so daß alle erwähnten fünf Definitionen dasselbe liefern. Die Dinge liegen aber anders, wenn wir die Operatoren auch auf Funktionen anwenden, die nicht für alle Argumentenwerte definiert sind. In diesem Fall erweist sich die Klasse der μ-rekursiven Operatoren als wesentlich enger als die Klasse aller partiell rekursiven Operatoren.

Die vorliegende Arbeit untersucht, in welchem Verhältnis die beiden Klassen von Operatoren zueinander stehen (wobei als Definition für die zweite Klasse die Definition von Davis übernommen wird; weiterhin sind unter berechenbare Operatoren die Elemente eben dieser Klasse zu verstehen). Zu diesem Zweck wird der Begriff der wegweisenden Operation für einen arithmetischen Operator eingeführt. Es sei F ein Operator von Typ $k \to l$ (d. h. der Definitionsbereich des Operators besteht aus den verschiedensten möglichen arithmetischen Funktionen von k Veränderlichen, während ihre Bilder bei der Anwendung des Operators F Funktionen von l Veränderlichen sind. Es sei irgendeine effektive Numeration aller arithmetischen Funktionen von k Veränderlichen gegeben, deren Definitionsbereich aus einer endlichen Zahl von Punkten besteht (derartige Funktionen werden wir als finite Funktionen bezeichnen). Wir wollen sagen, daß ein System $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ von k arithmetischen Funktionen von $l+1$ Veränderlichen eine wegweisende Operation für den Operator F darstellt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) die Definitionsbereiche der Funktionen $\delta_1 \ldots, \delta_k$ stimmen überein, wobei auch ein beliebiger Punkt $(n, u_1, \ldots, u_l)$ zum Definitionsbereich irgendeiner dieser Funktionen gerade dann gehört, wenn das Bild der finiten Funktion mit der Nummer n bei Anwendung des Operators F nicht in Punkt $(u_1, \ldots, u_l)$ definiert ist, wohl aber eine finite Funktion existiert, die eine Fortsetzung der finiten Funktion mit der Nummer n darstellt und ihr Bild im Punkt $(u_1, \ldots, u_l)$ definiert ist;

b) wenn Punkt $(n, u_1, \ldots, u_l)$ zum Definitionsbereich der Funktionen $\delta_1, \ldots, \delta_k$ gehört und $\delta_i(n, u_1, \ldots, u_l) = x_i$ gilt bei $i = 1, \ldots, k$, so gehört Punkt $(x_1, \ldots, x_k)$ nicht zum Definitionsbereich der finiten Funktion mit der Nummer n, sondern zu den Definitionsbereichen aller ihrer finiten

Fortsetzungen, deren Bilder (bei Anwendung des Operators F) im Punkt $(u_1, \ldots, u_l)$ definiert sind.

Eine wegweisende Operation $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ nennen wir partiell rekursiv, wenn die Funktionen $\delta_1, \ldots, \delta_k$ partiell rekursiv sind.

Es wird folgendes bewiesen:

Satz 1. *Damit ein Operator* F *μ-rekursiv ist, ist es notwendig und hinreichend, daß die nachstehend formulierten Bedingungen A und B gleichzeitig erfüllt sind.*

A. Der Operator F ist berechenbar.

B. Für den Operator F existiert eine partiell rekursive wegweisende Operation.

Es wird ein einfaches Beispiel angegeben für einen berechenbaren Operator. der keine wegweisende Operation besitzt, und so auch ein Beispiel für einen berechenbaren Operator mit wegweisender Operation, die aber nicht partiell rekursiv ist.

Aus Satz 1 ergeben sich manche notwendigen Bedingungen für die μ-Rekursivität eines Operators (Sätze 2, 3, 4, 5 und 7)[1]. Mit Hilfe von Beispielen wird nachgewiesen, daß diese Bedingungen nicht hinreichend sind.

Außerdem wird Satz 6 bewiesen, wonach ein Funktionenpaar existiert, dessen zweite Funktion das Bild der ersten vermittels eines geeigneten berechenbaren Operators darstellt, aus ihr aber mit Hilfe keines μ-rekursiven Operators abgeleitet werden kann.

Am Schluß der Arbeit wird der Begriff der Projektion eines Operators eingeführt. Wir wollen sagen, daß der Operator F vom Typ $k \to l$ die Projektion eines Operators F_0 vom Typ $k \to l+1$ darstellt, wenn das Bild einer beliebigen Funktion f von k Veränderlichen mit Hilfe des Operators F in einem Punkt $(u_1, \ldots, u_l)$ den Wert v genau dann annimmt, wenn eine solche Zahl m existiert, daß das Bild der Funktion f mit Hilfe des Operators F_0 den Wert v im Punkt $(u_1, \ldots, u_l, m)$ annimmt. Wir beweisen Satz 8, wonach jeder berechenbare Operator die Projektion eines geeigneten μ-rekursiven Operators ist.

Der Verfasser ist V. A. Uspenskij sehr verpflichtet, der ihn auf die Frage von dem Verhältnis zwischen der partiellen Rekursivität und der μ-Rekursivität bei Anwendung der Operatoren auch auf nicht für alle Argumentenwerte definierte Funktionen aufmerksam machte. Insbesondere war von V. A. Uspenskij die Frage gestellt worden, ob es ein Funktionenpaar gibt, das die.im Satz 6 formulierten Eigenschaften besitzt.

Превел Г. Ганчев

---

[1] Das in Satz 2 formulierte Ergebnis war schon vorher von A. V. Kuznecov durch direkten Beweis erhalten worden.