БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADEMIE DES SCIENCES DE BULGARIE
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Vol.) VII

ВЪРХУ НЯКОИ ТЕОРЕМИ ОТ ГЕОМЕТРИЯ НА НУЛИТЕ

К. Дочев

В настоящото съобщение обобщаваме една от теоремите на Н. Обрешков, доказана в работата му [1] (стр. 113, 7), отнасяща се до нули на рационални функции с прости полюси, и като прецизираме последната за един често срещащ се частен случай, доказваме теорема, която допълва в известен смисъл класическата теорема на Гаус—Люка. Като следствие от установените тук резултати получаваме обобщение на една известна оценка за максималния модул на корените на алгебричните уравнения, дадена от R. D. Carmichael — T. E. Mason; S. B. Kelleher; M. Fujiwara, M. Marden ([2], стр. 98, теорема 27, 19). Накрая доказваме твърдение, аналогично на една известна теорема на Alexander [3], отнасяща се до нули на полиноми, и по такъв начин обобщаваме последната за нули на аналитични функции.

Нека $R(z)$ да означава рационална функция от вида

$$R(z)=\frac{A_1}{z-a_1}+\frac{A_2}{z-a_2}+\dots+\frac{A_n}{z-a_n} \tag{1}$$

(a_ν и A_ν — комплексни числа; $A_\nu \neq 0$ при $\nu=1, 2,\dots, n$).
Ще докажем, че е в сила следното твърдение:

Ако за полюсите на рационалната функция (1) имаме

$$|a_k-a_1| \geqq r > 0 \quad \text{при } k=2, 3, \dots, n, \tag{2}$$

то нулите на $R(z)$ лежат в кръговата област

$$|z-a_1| \geqq \frac{|A_1|\, r}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} |A_\nu|}. \tag{3}$$

Такова твърдение обаче при условие, че резидуумите A_ν са положителни числа, Н. Обрешков получава като приложение на по-общи свои резултати в [1] (стр. 113). В същата работа [1] (стр. 114) е показано, че от него следва в частност следната теорема на Alexander: ако $f(z)$ е полином от степен n и $z=0$ е неговата k-кратна нула, като останалите му нули са извън кръга $|z|<r$, то $f'(z)$ не се анулира в областта $0<|z|<krn^{-1}$.

Доказателството на формулираното по-горе твърдение е съвсем елементарно, но ние ще го дадем подробно, понеже то ще ни подскаже начина, по който накрая ще обобщим цитираната теорема на Alexander. Ще докажем по-общо, че нулите на $R(z)$ удовлетворяват неравенството

(4) $$|z-a_1| \geq \frac{|A_1|r}{|A_1|+r\left|\sum\limits_{k=2}^{n} A_k(a_k-a_1)^{-1}\right|}.$$

(Очевидно неравенството (3) е следствие от (4), тъй като благодарение на (2) имаме $r\left|\sum\limits_{k=2}^{n} A_k(a_k-a_1)^{-1}\right| \leqq \sum\limits_{k=2}^{n}|A_k|$.) За удобство да приемем $a_1 = 0$. Нека ζ е произволна нула на $R(z)$; тогава ще имаме

$$\frac{A_1}{\zeta} = \sum_{k=2}^{n} \frac{A_k}{a_k} \cdot \frac{1}{1-\zeta a_k^{-1}},$$

откъдето получаваме

(5) $$\left|\frac{A_1}{\zeta}\right| \leqq \sum_{k=2}^{n}\left|\frac{A_k}{a_k}\right| \frac{1}{1-|\zeta|r^{-1}}.$$

Ако $|\zeta| \geqq r$, то $z=\zeta$ очевидно ще удовлетворява (4) при $a_1=0$; затова да допуснем, че $|\zeta| < r$. При това предположение от (5) следва

(6) $$|\zeta| \geq |A_1|r\left(|A_1|+r\sum_{k=2}^{n}|A_k a_k^{-1}|\right)^{-1}$$

и с това доказателството е завършено.

Сега ще разгледаме по-специално случая, когато сумата от резидуумите на $R(z)$ е равна на нула, т. е. $\sum\limits_{\nu=1}^{n} A_\nu = 0$. В такъв случай уравнението $R(z)=0$ може да се запише във вида

(7) $$\frac{1}{z} = \sum_{k=1}^{m} \frac{p_k}{z-a_k},$$

гдето

(8) $$\sum_{k=1}^{m} p_k = 1.$$

Да допуснем, че полюсите лежат извън единичния кръг $|z| < 1$, т. е. нека да имаме

(9) $$|a_k| \geqq 1 \quad \text{при } k=1, 2, \ldots, m.$$

Според току-що доказаното твърдение корените на уравнението (7) ще удовлетворяват неравенството

(10) $$|z| \geq \left(1+\sum_{k=1}^{m}|p_k|\right)^{-1};$$

обаче доказателството не е съобразено с (8) и затова оценката посредством (10) е твърде груба. Така например, ако числата p_k са положителни и сумата им е равна на единица, то при условие, че е изпълнено (9), следва, че корените на уравнението (7) удовлетворяват по-прецизното неравенство $|z| \geqq 1 = \left(\sum_{k=1}^{m} p_k\right)^{-1}$. Наистина, ако допуснем, че уравнението (7) има поне един корен z_0 вътре в единичната окръжност, бихме получили например посредством един резултат на Н. Обрешков ([1], стр. 114, теорема XII), че вътре във всяка окръжност, която минава през началото и през z_0, трябва да се съдържа поне една от точките a_k. Последното обаче не е възможно, понеже $|a_k| \geqq 1$ и $|z_0| < 1$ и следователно можем да прекараме окръжност C, така че тя да минава през двете точки $z=0$ и $z=z_0$ и същевременно да не съдържа нито една от точките a_k във вътрешността си и по контура. Ние ще покажем, че и при произволни комплексни числа p_k, удовлетворяващи условието (8), оценката, която ни дава в този случай неравенството (10), може да се подобри, а именно в сила е следната

Теорема 1. *Всички корени на уравнението*

$$\frac{1}{z} = \sum_{k=1}^{m} \frac{p_k}{z-a_k}$$

при условие, че $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$ и $|a_k| \geqq 1$, $k=1, 2, \ldots, m$, *лежат в кръговата област*

$$|z| \geqq \left(\sum_{k=1}^{m} |p_k|\right)^{-1} \tag{11}$$

Доказателство. Както изтъкнахме вече по-горе, в случая, когато p_k са реални и положителни числа, теоремата е вярна. Да допуснем, че не всички p_k са положителни и да положим $\sigma = \sum_{k=1}^{m} |p_k|$. Тогава очевидно ще имаме $\sigma > 1$. Нека z_0 е корен на уравнението (7) и да допуснем, че $|z_0| < \sigma^{-1}$. Както ще видим по-нататък, направеното допускане ще ни доведе до противоречие. Условието, че z_0 е корен на (7), може да се запише във вида

$$-1 = \sum_{k=1}^{m} p_k \zeta_k, \tag{12}$$

гдето

$$\zeta_k = (a_k w - 1)^{-1}, \quad w = z_0^{-1}. \tag{13}$$

Да разгледаме трансформацията $\zeta = (u-1)^{-1}$. Последната изобразява кръговата област $|u| > \sigma$ в кръга $|\zeta - c| < r$, гдето $c = (\sigma^2 - 1)^{-1}$ и $r = \sigma(\sigma^2 - 1)^{-1}$. Според допускането $|z_0| < \sigma^{-1}$, т. е. $|w| > \sigma$, и вследствие (9) имаме $|a_k w| > \sigma$. Следователно $|\zeta_k - c| < r$. Лесно се получава по-нататък, като се вземе пред вид още и (8), че числото $V = \sum_{k=1}^{m} p_k \zeta_k$ трябва да удовлетворява неравенството

$$|V-c|<r\sum_{k=1}^{m}|p_k|=\sigma^2(\sigma^2-1)^{-1}.$$

Но щом като z_0 е корен на уравнението (7), следва, че $V=-1$ и бихме достигнали до абсурдното неравенство $|-1-c|=\sigma^2(\sigma^2-1)^{-1}<\sigma^2(\sigma^2-1)^{-1}$. И така допускането, че уравнението (7) има корен в кръга $|z|<\left(\sum_{k=1}^{m}|p_k|\right)^{-1}$, ни доведе до противоречие и по такъв начин доказателството на теоремата е завършено.

Сега като приложение на току-що доказания резултат ще установим следната, в известен смисъл противоположна на класическата теорема на Гаус—Люка.

Теорема 2. *Ако нулите на даден полином $f(z)$ от степен n лежат в кръговата област*

$$|z-a|\geq r>0, \tag{14}$$

то всички нули на $f'(z)$ се намират в кръговата област

$$|z-a|\geq\frac{r^2}{n}\left|\frac{f'(a)}{f(a)}\right|. \tag{15}$$

Доказателство. Без ограничение на общността можем да приемем $a=0$ и $r=1$. Нека $f(z)$ да има вида $f(z)=z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$ и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ да означават нулите на $f(z)$, като не ще предполагаме, че те са обязателно различни. По условие имаме $|a_k|\geq 1$, $k=1, 2, \ldots, n$. Ако z_0 е нула на $f'(z)$ и същевременно е кратна нула на $f(z)$, то лесно се вижда, че z_0 удовлетворява неравенството (15) (при $a=0$ и $r=1$), т. е. $|z_0|\geq|f'(0)||nf(0)|^{-1}=|c_{n-1}||nc_n|^{-1}$. Това е така, понеже $-c_{n-1}c_n^{-1}=\sum_{k=1}^{n}a_k^{-1}$ и следователно

$$\frac{1}{n}\left|\frac{c_{n-1}}{c_n}\right|\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|a_k|}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1=1,$$

а, от друга страна, имаме $|z_0|\geq 1$. Ето защо без ограничение на общността можем да разглеждаме в нашето доказателство само онези нули на $f'(z)$, които не са кратни нули на $f(z)$. Последните очевидно са корени на уравнението

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-a_k}=0, \tag{16}$$

което може да се запише още във вида

$$\frac{1}{z}=\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{z-a_k},\quad p_k=\frac{1}{a_k}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)^{-1} \tag{17}$$

Очевидно имаме $\sum_{k=1}^{n}p_k=1$, така че получаваме възможност да приложим теорема 1. По такъв начин се убеждаваме, че щом $|a_k| \geqq 1$, $k=1, 2, \ldots, n$, корените на уравнението (16) удовлетворяват неравенството

$$|z| \geqq \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} |p_k|} = \frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{-1}\right|}{\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k^{-1}|} \geqq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k^{-1}\right| = \frac{1}{n}\left|\frac{c_{n-1}}{c_n}\right|$$

и следователно нулите на $f'(z)$ лежат в кръговата област $|z| \geqq |f'(0)| \times \times |nf(0)|^{-1}$. С това теоремата е доказана.

Пример. $f(z)=z^n$, $r=|a|$. Неравенството (15) в такъв случай добива вида $|z-a| \geqq |a|$ и очевидно е точно. Също така точна оценка се получава и за $f(z)=(z-\alpha)^p(z-\beta)^q$, $p+q=n$, $a=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, $r=\frac{1}{2}|\beta-\alpha|$.

Като друго приложение на теорема 1 ще докажем следващата

Теорема 3. *Нека $\varphi(z)$ е полином от степен $\leqq n-1$ и $P(z)$ да е полином от степен n, чиито нули $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са прости и лежат извън кръга $|z|<r$. При тези условия нулите на $\varphi(z)$ лежат в кръговата област*

$$|z| \geqq \left|\frac{\varphi(0)}{P(0)}\right| \left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\varphi(a_k)}{P'(a_k)a_k}\right|\right)^{-1} r.$$

Доказателството протича по същия начин, както при теорема 2, ето защо ние няма да извършим подробно разсъжденията, а само ще отбележим, че съгласно интерполационната формула на Лагранж нулите на $\varphi(z)$, които не анулират $P(z)$, удовлетворяват уравнението

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(a_k)}{P'(a_k)} \cdot \frac{1}{z-a_k} = 0$$

и последното може да се запише във вида

$$\frac{1}{z} = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{z-a_k},$$

гдето

$$p_k = \frac{\varphi(a_k)}{P'(a_k)a_k}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(a_k)}{P'(a_k)a_k}\right)^{-1} = \frac{\varphi(a_k)}{P'(a_k)a_k} \cdot \frac{P(0)}{\varphi(0)}.$$

Остава да се приложи теорема 1.

Да отбележим, че от теорема 3 лесно може непосредствено да се получи теорема 2, обаче не в цялата ѝ общност, а при ограничителното предположение, че $f(z)$ няма кратни нули. Това става, като се положи $P(z)=f(z)$ и $\varphi(z)=f'(z)$.

Като положим $P(z)=z^n-1$, от теорема 3 получаваме следната

Теорема 4. *Ако $f(z)$ е полином от степен $\leqq n-1$ и $\omega_0=1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ означават корените на биномното уравнение $z^n-1=0$, то нулите на $f(z)$ лежат в кръговата област*

$$z \quad f(0)|\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}|f(\omega_\nu)|\right)^{-1}$$

Следствие. Всички корени на уравнението

$$a_0+a_1z+\quad+a_mz^m=0 \tag{18}$$

лежат в областта

$$|z|\geqq|a_0|\cdot(|a_0|^2+|a_1|^2+\quad+|a_m|^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

Горното следствие съвпада по същество с една теорема на Carmichael—Mason; Kelleher; Fujiwara ([2], стр. 98, теорема 27,19) и се получава от теорема 4, като се положи $f(z)=a_0+a_1z+\quad+a_{n-1}z^{n-1}$, $n=m+1$ и за $\sum_{\nu=0}^{n-1}|f(\omega_\nu)|$ се приложи неравенството на Буняковски:

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}|f(\omega_\nu)|\leqq\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{\nu=0}^{n-1}|f(\omega_\nu)|^2}\sqrt{\sum_{\nu=0}^{n-1}1^2}=\sqrt{|a_0|^2+|a_1|^2+\quad+|a_{n-1}}$$

Може да се докаже, че е в сила следното по-общо твърдение:

Теорема 5. *Нека q е произволно комплексно число. Всички корени на уравнението* (18) *лежат в кръговата област*

$$|z|\geq\frac{(m+1)|a_0}{(m+1)\sqrt{\sum_{\nu=0}^{m}|a_\nu-q|^2}+\left|\sum_{\nu=0}^{m}a_\nu\right|-\left|\sum_{\nu=0}^{m}(a_\nu-q)\right|} \tag{20}$$

Доказателство. Да положим $n=m+1$ и $\varphi(z)=f(z)-q(1+z+\quad+z^m)$, където $f(z)$ означава лявата част на (18). Очевидно при $\nu=1, 2, \ldots, n-1$ имаме $f(\omega_\nu)=\varphi(\omega_\nu)$ и $f(\omega_0)=f(1)=\varphi(1)-nq$. Според теорема 4 нулите на $f(z)$ лежат в областта

$$|z|\geq\frac{n|f(0)|}{\sum_{\nu=0}^{n-1}|f(\omega_\nu)}=\frac{(m+1)|f(0)|}{\sum_{\nu=0}^{m}\varphi(\omega_\nu)\quad-|\varphi(1)|+|f(1)} \tag{21}$$

и тъй като $|f(1)=\sum_{\nu=0}^{m}a_\nu$, $|\varphi(1)|=|\sum_{\nu=0}^{m}(a_\nu-q)|$ и благодарение на неравенството на Буняковски имаме

$$\sum_{\nu=0}^{m}\varphi(\omega_\nu)|\leqq(m\quad1)\sqrt{\sum_{\nu=0}^{m}|\varphi(\omega_\nu)^2}=(m+1)\sqrt{\sum_{\nu=0}^{m}a_\nu-q}$$

то от неравенството (21) следва (20).

Пример. Да разгледаме уравнението $\lambda z^m+z^{m-1}+\quad+z+1=0$, където λ е произволно комплексно число. Като приложим теорема 5 при $q\quad1$, получаваме, че корените на горното уравнение лежат в областта

$$|z| \geq (m+1)(m|\lambda-1|+|m+\lambda|)^{-1}$$

Накрая ще докажем следното обобщение на цитираната в началото теорема на Alexander.

Теорема 6. *Нека $f(z)$ да означава функция, аналитична в кръга $|z|<R$, и $f(z)$ да не се анулира в кръга $|z|<r, 0<r<R$ освен в точката $z=0$, която да е k-кратна нейна нула $(k \geqq 1)$. Ако ϱ е произволно число от интервала $r<\varrho<R$, подчинено на единственото ограничение $f(z)$ да не се анулира по окръжността $|z|=\varrho$, и $n(\varrho)$ означава броя на нулите на $f(z)$ в кръга $|z|\leqq\varrho$, а $s(\varrho)$ — средният модул на логаритмичната производна на $f(z)$ по окръжността $|z|=\varrho$,* т. е.

$$s(\varrho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(\varrho e^{i\theta})}{f(\varrho e^{i\theta})}\right| d\theta, \tag{22}$$

то $f'(z)$ не се анулира в кръга

$$|z| \leqq \frac{kr}{n(\varrho)+rs(\varrho)} \tag{23}$$

освен евентуално в началото (при $k>1$).

Доказателство. Нека $\zeta \neq 0$ е нула на $f'(z)$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $|\zeta|<r$ и следователно $f(\zeta)\neq 0$. Наистина, $|\zeta| \geqq r$, неравенството (23) не може да бъде удовлетворено при $z=\zeta$, понеже дясната страна на последното е очевидно по-малка от r. За краткост в $n(\varrho)$ и $s(\varrho)$ ще изпускаме аргумента ϱ и ще пишем само n и s. Нулите на $f(z)$, които лежат в кръга $|z|\leqq\varrho$ и са отлични от нула, да означим със $z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots, z_n$ и да положим $|\zeta|=x$, $l=n-k$. От условието $f'(\zeta)=0$ и $f(\zeta)\neq 0$ лесно получаваме, че е в сила равенството

$$-\frac{k}{\zeta}=\frac{1}{z_{k+1}-\zeta}+\frac{1}{z_{k+2}-\zeta}+\cdots+\frac{1}{z_n-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\varrho}\frac{f'(w)\,dw}{f(w)(w-\zeta)},$$

откъдето следва

$$\frac{k}{x} \leqq \frac{l}{r-x}+\frac{\varrho s}{\varrho-x} \quad (x<r<\varrho). \tag{24}$$

Последното неравенство може да се запише във вида

$$x^2(n+\varrho s)-x[kr+\varrho(n+\varrho s)]+kr\varrho \leqq 0. \tag{25}$$

От (25) получаваме следното по-грубо неравенство

$$x^2(n+rs)-x[kr+\varrho(n+\varrho s)]+kr\varrho<0. \tag{26}$$

За нулите на квадратния тричлен от лявата страна на (26) получаваме

$$x_1=kr(n+rs)^{-1}, \quad x_2=\varrho \ (x_1<x_2),$$

откъдето следва, че числото x, което по предположение е по-малко от ϱ, трябва да бъде $>x_1$, т. е.

$$x>kr(n+rs)^{-1}. \tag{27}$$

С това теоремата е доказана.

Да отбележим, че изхождайки от (25), можем да получим следното по-прецизно, обаче по-сложно от (27) неравенство

$$(28)\qquad =x \geq 2kr\left[n+rs+\frac{kr}{\varrho}+\sqrt{(n+rs-kr\varrho^{-1})^2-4kr(\varrho-r)s\varrho^{-1}}\,\right]^{-1}.$$

Ако $f(z)$ е полином от степен n, то очевидно при $\varrho \to \infty$ ще имаме $n(\varrho) \to n$, $s(\varrho) \to 0$ и по такъв начин получаваме в частност теоремата на Alexander.

Постъпила на 10. VII. 1962 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Обрешков Н., Върху някои класи от полиноми и рационални функции, Год. на Соф. у-т, Физ.-мат. фак., т. **33**, кн. 1, 1936—1937, 39—148.
2. Marden M., The geometry of the zeros, New York, 1949.
3. Alexander I. W., Annals of Math., II ser, **17**, 1915, 16.

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ИЗ ГЕОМЕТРИИ НУЛЕЙ

К. Дочев

(Резюме)

В работе доказаны следующие теоремы:

1. Все корни уравнения

$$\frac{1}{z}=\sum_{k=1}^{m}\frac{p_k}{z-a_k}$$

при условии, что $\sum\limits_{k=1}^{m} p_k=1$ и $|a_k| \geqq 1$, $k=1, 2, \ldots, m$ лежат в круговой области:

$$|z| \geqq \left(\sum_{k=1}^{m}|p_k|\right)^{-1}$$

2. Если нули данного многочлена $f(z)$ степени n лежат в круговой области $z-a| \geqq n > 0$, то все нули $f'(z)$ находятся в области $|z-a| \geqq \geqq r^2\ f'(a)\quad nf(a)\ ^{-1}$.

3. Пусть $\varphi(z)$ есть многочлен степени $\leqq n-1$ и $P(z)$ есть многочлен n-й степени, нули которого $a_1, a_2, \ldots, a_n$ простые и лежат вне круга $z < r$. При этих условиях нули $\varphi(z)$ лежат в круговой области:

$$|z \geq \left|\frac{\varphi(0)}{P(0)}\right|\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\varphi(a_k)}{P'(a_k)\,a_k}\right|\right)^{-1} r.$$

4. Если $f(z)$ многочлен степени $\leqq n-1$ и $\omega_0=1$, ω_1, $\omega_2, \ldots$, ω_{n-1} являются корнями уравнения деления круга $z^n-1=0$, то нули $f(z)$ лежат в области

$$|z| \geq |f(0)| \left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} |f(\omega_\nu)| \right)^{-1}$$

5. Пусть q произвольное комплексное число. Все корни уравнения $a_0+a_1 z+ \cdots +a_m z^m=0$ лежат в области

$$|z| \geq \frac{(m+1)\, |a_0|}{(m+1)\sqrt{\sum_{\nu=0}^{m} |a_\nu-q|^2}+\left|\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu\right|-\left|\sum_{\nu=0}^{m} (a_\nu-q)\right|}$$

6. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая, в круге $|z|<R$, не обращающаяся в ноль при $0<|z|<r$, $0<r<R$, для которой точка $z=0$ является нулем кратности $k\,(k\geqq 1)$. Если ϱ — произвольное число из интервала $r<\varrho<R$, подчинненое единственному условию, чтобы $f(z)$ не обращалась в ноль по окружности $|z|=\varrho$ и $n(\varrho)$ обозначает число нулей $f(z)$ в круге $|z|\leq\varrho$, а $s(\varrho)$ — средний модуль логарифмической производной $f(z)$ по окружности $|z|=\varrho$, то $f'(z)$ не обращается в ноль в круге

$$|z| \leq k\, r\,[n(\varrho)+r\, s(\varrho)]^{-1}.$$

Некоторые из этих предложений связаны с результатами, полученными Н. Обрешковым ([1]). В известном смысле теорема 2 противоположна классической теореме Гаусса—Люка. Из теоремы 5 (при $q=0$) как следствие получается известная теорема из [2]. Из теоремы 6 в том случае, когда $f(z)$ является многочленом, в частности получается теорема Александера [3].

Превел: В. Ребров

ON SOME THEOREMS IN THE GEOMETRY OF ZEROS

K. Dochev

(*Summary*)

The following theorems have been demonstrated in the paper:

1. All roots of the equation

$$\frac{1}{z}=\sum_{k=1}^{m}\frac{p_k}{z-a_k}$$

provided $\sum_{k=1}^{m} p_k=1$ and $|a_k|\geq 1$, $k=1,\ 2, \ldots, m$, lie in the circular region

$$|z| \geq \left(\sum_{k=1}^{m} |p_k| \right)^{-1}$$

2. When the zeros of a given polynomial $f(z)$ of degree n lie in the circular region $|z-a| \geq r > 0$, all zeros of $f'(z)$ are in the region $|z-a| \geq r^2 |f'(a)| |nf(a)|^{-1}$.

3. Let $\varphi(z)$ be a polinomial of degree $\leq n-1$ and $P(z)$ be a polinomial of degree n, whose zeros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are simple and lie outside the circle $|z| < r$. Under these conditions the zeros of $\varphi(z)$ lie within the circular region

$$|z| \geq \left|\frac{\varphi(0)}{P(0)}\right| \left(\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\varphi(a_k)}{P'(a_k)\, a_k} \right| \right)^{-r} r.$$

4. When $f(z)$ is a polynomium of degree $\leq n-1$ and $\omega_0 = 1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ denote the roots of the binomial equation $z^n - 1 = 0$, then the zeros of $f(z)$ lie in the region

$$|z| \geq |f(0)| \left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} |f(\omega_\nu)| \right)^{-1}$$

5. Let us assume that q denotes an arbitrary complex number. All roots of the equation $a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m = 0$ lie in the region

$$|z| \geq \frac{(m+1)|a_0|}{(m+1)\sqrt{\sum_{\nu=0}^{m} |a_\nu - q|^2} + \left| \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu \right| - \left| \sum_{\nu=0}^{m} (a_\nu - q) \right|}.$$

6. Let us assume that $f(z)$ denotes a function analytical in the circle $|z| < R$, and that $f(z) \neq 0$ in the circle $|z| < r$, $0 < r < R$, with the exception of $z = 0$ which is its k-multiple zero ($k \geq 1$). If ϱ is an arbitrary number of the interval $r < \varrho < R$, subjected to the only condition that $f(z) \neq 0$ along the circle $|z| = \varrho$, and $n(\varrho)$ denotes the number of zeros $f(z)$ in the circle $|z| \leq \varrho$, while $s(\varrho)$ ist the mean modulus of the logarithmic derivative of $f(z)$ along the circle $|z| = \varrho$, then $f'(z)$ is not annulled within the circle

$$|z| \leq k r [n(\varrho) + r s(\varrho)]^{-1}.$$

Some of these assertions are related to results obtained by N. Obreshkov [1]. Theorem 2 is in a certain sense contrary to the classical theorem of Gauss—Lucas. A well known theorem of [2] is obtained as a consequence of theorem 5 (at $q=0$). A theorem of Alexander [3] is obtained from theorem 6 when $f(z)$ is a polynomial.

Превел Г. Чакалов