БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE DES SCIENCES DE BULGARIE
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Vol.) VII

РАЗВИТИЕ НА АНАЛИТИЧНИ ФУНКЦИИ ПО ПОЛИНОМИТЕ НА ЯКОБИ

П. Русев

1. Дефиниция на полиномите на Якоби

Да разгледаме диференциалното уравнение

$$(1)\qquad \frac{\varrho'(z)}{\varrho(z)}=\frac{\alpha}{z-z_1}+\frac{\beta}{z-z_2},$$

където α, β, $z_1 \neq z_2$ са произволни комплексни числа, като α, β, $\alpha+\beta \neq -1, -2, \ldots$ Във всяка едносвързана област G, която не съдържа точките z_1, z_2 и ∞, горното уравнение има регулярни решения. Наистина в G съществуват еднозначни и регулярни клонове на функциите $\log(z-z_1)$ и $\log(z-z_2)$, които да означим с $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$. Тогава не е трудно да се покаже, че функцията

$$(2)\qquad \varrho(z)=\exp(\alpha\,\varphi_1(z)+\beta\,\varphi_2(z)),$$

която очевидно е регулярна в G, е решение на уравнението (1).

Да положим по-нататък

$$(3)\qquad P_n(\alpha,\beta;z)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}\,\frac{1}{\varrho(z)}\,\frac{d^n}{dz^n}\{\varrho(z)(z-z_1)^n(z-z_2)^n\}.$$

Известно е, че (3) е полином от n-та степен на z, който се нарича n-ти полином на Якоби.

2. Диференциално уравнение за полиномите на Якоби

Като се има пред вид, че функцията $\varrho(z)$ удовлетворява уравнението (1), установява се, че полиномите (3) удовлетворяват диференциалното уравнение

$$(4)\qquad (z-z_1)(z-z_2)y''+[(\alpha+\beta+2)z-(z_1+z_2)-(\alpha z_2+\beta z_1)]y'-$$
$$-n(\alpha+\beta+n+1)y=0.$$

По-нататък ще предполагаме, че $z_1=1$ и $z_2=-1$. Ако означим с l разреза $\{x\leq 1,\ y=0\}$ от реалната ос и положим $\operatorname{Log} z=\ln|z|+i\arg z$ $(-\pi<\arg z<\pi)$, функцията $\varrho(z)=\exp(\alpha\operatorname{Log}(z-1)+\beta\operatorname{Log}(z+1))$ ще бъде регулярно решение на уравнението (1) със $z_1=1$ и $z_2=-1$ в областта $E-l$ (с E означаваме комплексната равнина). За полиномите (3) ще имаме

$$(5)\qquad P_n(\alpha,\beta;z)=(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}\frac{1}{\varrho(z)}\frac{d^n}{dz^n}\{\varrho(z)(1-z^2)^n\},$$

а диференциалното уравнение (4) добива известния вид

$$(6)\qquad (1-z^2)y''-[(\alpha+\beta+2)z+\alpha-\beta]y'+n(\alpha+\beta+n+1)y=0.$$

3. Рекурентна зависимост

Както е известно, между три последователни полинома на Якоби съществува зависимостта

$$(7)\qquad P_{n+2}(\alpha,\beta;z)=(z-a_{n+2})P_{n+1}(\alpha,\beta;z)-\lambda_{n+1}P_n(\alpha,\beta;z),$$

където

$$(8)\qquad a_{n+2}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n+4)},$$

$$(9)\qquad \lambda_{n+1}=\frac{4(n+1)(\alpha+n+1)(\beta+n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)^2(\alpha+\beta+2n+3)}.$$

Нека z е произволна точка от областта $E-l$ и C е произволна проста регулярна затворена крива линия, лежаща в областта $E-l$ и неминаваща през точката z. Тогава, като имаме пред вид формулата на Коши, от (7) ще получим равенството

$$(10)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\Big\{(-1)^{n+2}(n+2)!\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+3)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+5)}\frac{\varrho(\zeta)(1-\zeta^2)^{n+2}}{(\zeta-z)^{n+3}}-$$
$$-(z-a_{n+2})(-1)^{n+1}(n+1)!\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+3)}\frac{\varrho(\zeta)(1-\zeta^2)^{n+1}}{(\zeta-z)^{n+2}}+$$
$$+\lambda_{n+1}(-1)^n n!\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}\frac{\varrho(\zeta)(1-\zeta^2)^n}{(\zeta-z)^{n+1}}\Big\}d\zeta=$$
$$=\varrho(z)\{P_{n+2}(\alpha,\beta;z)-(z-a_{n+2})P_{n+1}(\alpha,\beta;z)+$$
$$+\lambda_{n+1}P_n(\alpha,\beta;z)\}\,ind_z C=0.$$

Следователно съществува функция $\Psi_n(z;\zeta)$ на комплексната променлива ζ, регулярна в областта $E-l$, от която е изключена точката z, и такава, че

$$(11)\qquad \frac{d\Psi_n(z;\zeta)}{d\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\Big\{(-1)^{n+2}(n+2)!\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+3)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+5)}\frac{\varrho(\zeta)(1-\zeta^2)^{n+2}}{(\zeta-z)^{n+3}}-$$
$$-(z-a_{n+2})(-1)^{n+1}(n+1)!\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+3)}\frac{\varrho(\zeta)(1-\zeta^2)^{n+1}}{(\zeta-z)^{n+2}}+$$
$$+\lambda_{n+1}(-1)^n n!\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}\frac{\varrho(\zeta)(1-\zeta^2)^n}{(\zeta-z)^{n+1}}\Big\}.$$

Функцията $\Psi_n(z;\zeta)$ може да се представи във вида

$$\Psi_n(z;\zeta)=C_n(z)+\int_a^{\zeta} R_n(z;\zeta)\,d\zeta, \tag{12}$$

където $C_n(z)$ е константа, a е точка от областта $E-l$, отлична от z, $R_n(z;\zeta)$ е функцията от дясната страна на (11) и интегрирането е извършено по произволна регулярна крива линия, която лежи в областта $E-l$ и не минава през точката z. Константата $C_n(z)$ може да се избере така, че за всички достатъчно големи n,

$$\lim_{\zeta\to-1} \Psi_n(z;\zeta)=0. \tag{13}$$

Наистина, ако $n>-\mathrm{Re}(\beta), \lim\limits_{\zeta\to-1} R_n(z;\zeta)=0$ и ако положим

$$C_n(z)=-\int_a^{-1} R_n(z;\zeta)\,d\zeta,$$

равенството (13) ще бъде удовлетворено.

4. Обобщени ортогонални полиноми

Нека

$$F(z)=\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots+\frac{c_n}{z^n}+\cdots \tag{14}$$

е функция, регулярна в областта $|z|>R(0\leq R<+\infty)$. Да означим с K множеството на всички прости регулярни затворени криви линии, които лежат в областта $|z|>R$ и съдържат кръга $|z|\leqq R$ във вътрешността си. Да положим

$$Q_n(z)=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots c_{n+1} \\ c_2 & c_3 & \dots c_{n+2} \\ \\ c_n & c_{n+1} & \dots c_{2n} \\ 1 & z & \dots z^n \end{vmatrix} \quad (n=0, 1, 2\dots). \tag{15}$$

Ако допуснем още, че за всяко $n=0, 1, 2, \dots$ детерминантата

$$\Delta_{n+1}=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots c_{n+1} \\ c_2 & c_3 & \dots c_{n+2} \\ \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \dots c_{2n+1} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{16}$$

то (15) е полином от n-та степен. Полиномите (15) ще наричаме обобщени ортогонални полиноми (вж. [1] [2]) с тегло функцията $F(z)$. Последното название се оправдава от факта, че каквато и да е кривата $C\in K$ при $m\neq n$

$$\int_C F(z)\,Q_m(z)\,Q_n(z)\,dz=0. \tag{17}$$

Да отбележим, че ортогоналност от вида (17) е разгледана от Н. Обрешков в [3].

5. Теорема на H. L. Krall. Ортогоналност на полиномите на Якоби

В работата си [2] H. L. Krall дава следната теорема:

Необходимото и достатъчно условие полиномите (15) да удовлетворяват линейното диференциално уравнение от втори ред

$$(l_{22}z^2+l_{21}z+l_{20})y''+(l_{11}z+l_{10})y'-\mu_n y=0, \tag{18}$$

където

$$\mu_n=l_{11}n+l_{22}n(n-1), \tag{19}$$

е да бъдат удовлетворени равенствата

$$\begin{aligned}\{l_{11}+l_{22}(n-1)\}\,c_{n+1}+\{l_{10}+l_{21}(n-1)\}\,c_n+\\ +l_{20}(n-1)\,c_{n-1}=0 \qquad (n=1,2,3,\ldots).\end{aligned} \tag{20}$$

Да положим в диференциалното уравнение (6) $z=1+u$. Ще получим уравнението

$$(2u+u^2)y''+[(\alpha+\beta+2)u+2\alpha+2]\,y'-n(\alpha+\beta+n+1)\,y=0, \tag{21}$$

което е от вида (18) и при това условието (19) е удовлетворено. За уравнението (21) равенствата (20) добиват вида

$$(\alpha+\beta+n+1)\,c_{n+1}+2(\alpha+n)\,c_n=0 \qquad (n=1,2,3,\ldots), \tag{22}$$

откъдето (вж. [2], стр. 263) се намира, че

$$c_{n+1}=(-1)^n\frac{2^n\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+2)\,\Gamma(\alpha+1)}\,c_1. \tag{23}$$

Да означим с L^* множеството на всички прости регулярни затворени криви линии, които лежат в областта $|z-1|>2$ и съдържат кръга $|z-1|\leq 2$ във вътрешността си. Ще покажем, че полиномите на Якоби са ортогонални по всяка крива $L\in L^*$ с тегло функцията

$$\mathrm{F}(\alpha,\beta;z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+2)\,\Gamma(\alpha+1)}\,\frac{c_1}{(z-1)^{n+1}}, \tag{24}$$

където $c_1\neq 0$ е произволна константа. Последната функция е регулярна в областта $|z-1|>2$.

Да положим

$$\Phi(\alpha,\beta;u)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+2)\,\Gamma(\alpha+1)}\,\frac{c_n}{u^{n+1}} \tag{25}$$

и да разгледаме полиномите

$$(26) \qquad S_n(\alpha,\beta\,;u)=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & & c_{n+1} \\ c_2 & c_3 & & c_{n+2} \\ & & & \\ c_n & c_{u+1} & \dots & c_{2n} \\ 1 & u & & u^n \end{vmatrix},$$

където $c_{n+1}\,(n=1,\,2,\,3\,,\dots)$ са дадени с (23).

Да означим с K^* множеството на всички прости регулярни затворени криви линии L^*, които лежат в областта $|u|>2$ и съдържат кръга $|u|\leqq 2$ във вътрешността си. Както видяхме, полиномите (26) са ортогонални върху всяка крива $L^*\in K^*$ с тегло функцията (25), т. е. при $m\neq n$

$$(27) \qquad \int_{L^*}\Phi(\alpha,\beta\,;u)\,S_m(\alpha,\beta\,;u)\,S_n(\alpha,\beta\,;u)\,du=0.$$

От равенствата (22) и от теоремата на H. L. Krall следва, че полиномите (26) удовлетворяват диференциалното уравнение (21), което се получава от уравнението (6), като се положи $z=1+u$. Следователно полиномът $S_n(\alpha,\beta\,;u)$ се отличава от полинома $P_n(\alpha,\beta\,;\,1+u)$ с постоянен множител. Тогава от (27) следва, че при $m\neq n$

$$\int_{L^*}\Phi(\alpha,\beta\,;u)\,P_m(\alpha,\beta\,;\,1+u)\,P_n(\alpha,\beta\,;\,1+u)\,du=0,$$

и от последното равенство, като положим $u=z-1$, получаваме, че

$$\int_L F(\alpha,\beta\,;\,z)\,P_m(\alpha,\beta\,;\,z)\,P_n(\alpha,\beta\,;z)\,dz=0,$$

където $L\in K$.

Ако положим по-нататък

$$(28) \qquad I_n(\alpha,\beta)=\int_L F(\alpha,\beta\,;\,z)\,\{P_n(\alpha,\beta\,;z)\}^2\,dz,$$

за интеграла (28) се получава следният израз:

$$(29) \qquad I_n(\alpha,\beta)=\frac{2^{2n}\,n!\,\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}$$

6. Аналитично продължение на функцията

$$F(\alpha,\beta\,;z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}\,\frac{1}{(z-1)^{n+1}}.$$

Ще покажем по-нататък, че функцията (24) с $c_1=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$ е продължима аналитично в равнината E с разрез по отсечката $[-1\,;+1]$. Да допуснем най-напред, че $\mathrm{Re}(\alpha)>-1$, $\mathrm{Re}(\beta)>-1$, и да разгледаме функцията

$$(30)\qquad \psi(\alpha,\beta;z)=-\frac{1}{\Gamma(\beta+1)(1-z)}\int_0^1\frac{t^{\alpha}(1-t)^{\beta}}{1-\frac{2t}{1-z}}\,dt.$$

Тази функция е регулярна в областта $E-[-1;+1]$ и освен това, ако $|z-1|>2$, $\psi(\alpha,\beta;z)=F(\alpha,\beta;z)$, т. е. ако $\mathrm{Re}(\alpha)>-1$ и $\mathrm{Re}(\beta)>-1$, функцията (30) е аналитично продължение на $F(\alpha,\beta;z)$ в областта $E-[-1;+1]$. Като се вземат обаче пред вид равенствата

$$\psi(\alpha,\beta;z)=-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)(1-z)}-\frac{2}{\Gamma(\beta+1)(1-z)^2}\,\psi(\alpha+1,\beta;z)$$

$$\psi(\alpha,\beta;z)=\frac{1+z}{\Gamma(\beta+1)}\,\psi(\beta,\alpha;-z),$$

се установява, че функцията $F(\alpha,\beta;z)$ е продължима аналитично в областта $E-[-1;+1]$ за всички стойности на параметрите α, β такива, че α, β, $\alpha+\beta\neq-1,-2,\ldots$, т. е. съществува функция $\varphi(\alpha,\beta;z)$, регулярна в областта $E-[-1;1]$ и такава, че при $|z-1|>2$ е удовлетворено равенството $\varphi(\alpha,\beta;z)=F(\alpha,\beta;z)$. Ако означим с C произволна проста затворена крива линия, която съдържа отсечката $[-1;+1]$ във вътрешността си, при $m\neq n$ ще бъде в сила равенството

$$(31)\qquad \int_C\varphi(\alpha,\beta;z)\,P_m(\alpha,\beta;z)\,P_n(\alpha,\beta;z)\,dz=0.$$

7. Асоциирани функции

Да положим в диференциалното уравнение (6) $y=\frac{w}{\varrho(z)}$. Функцията w ще удовлетворява уравнението

$$(32)\qquad (1-z^2)\,w''+[(\alpha+\beta-2)z+\alpha-\beta]\,w'+(n+1)(\alpha+\beta+n)\,w=0.$$

Да положим при $n>-\mathrm{Re}(\beta)$

$$(33)\qquad H_n(\alpha,\beta;z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varrho(\zeta)(1-\zeta^2)^n}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta,$$

където $z\in E-[-1;+1]$ и интегрирането е извършено по произволна проста регулярна затворена крива линия γ, която съдържа интервала $(-1;+1]$ във вътрешността си, минава през точката $\zeta=-1$ (и няма други общи точки с лъча $\{-\infty<\xi\leq 1,\eta=0\}$) и най-сетне точката z лежи извън γ. Ако поставим функцията (33) в лявата страна на уравнението (32), ще получим израза

$$\frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varrho(\zeta)(1-\zeta^2)^n}{(\zeta-z)^{n+3}}\{(n+2)(1-z^2)+[(\alpha+\beta-2)z+$$

$$+\alpha-\beta](\zeta-z)+(\alpha+\beta+n)(\zeta-z)^2\}\,d\zeta=$$

$$=-\frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d}{d\zeta}\left\{\frac{\varrho(\zeta)(1-\zeta^2)^{n+1}}{(\zeta-z)^{n+2}}\right\}d\zeta=0.$$

Да положим по-нататък

$$(34)\qquad Q_n(\alpha,\beta;z)=(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}\frac{n!}{2\pi i}\frac{1}{\varrho(z)}\int_\gamma\frac{\varrho(\zeta)(1-\zeta^2)^n}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta.$$

Функцията (34) ще бъде решение на уравнението (6) в областта $E-l$ за всички стойности на $n>-\mathrm{Re}(\beta)$. Да наречем както в [4], стр. 59, $Q_n(\alpha,\beta;z)$ асоциирана функция на полинома $P_n(\alpha,\beta;z)$.

Забележка. За да не бъде функцията (34) тъждествено равна на нула, необходимо е да допуснем още, че параметърът α не е цяло неотрицателно число. Ще предполагаме по-нататък, че това условие е удовлетворено.

Като се вземат пред вид разглежданията в края на точка 3, се установява, че асоциираните функции на полиномите на Якоби удовлетворяват рекурентната зависимост (7). Това дава възможност да се определят асоциираните функции и за стойности на $n\leqq-\mathrm{Re}(\beta)$.

8. Формула на Кристофел—Дарбу

Рекурентната зависимост (7) може да се запише още във вида

$$(35)\qquad k_{n+1}(\alpha,\beta)P_{n+2}(\alpha,\beta;z)=\frac{1}{l_{n+1}(\alpha,\beta)}(z-a_{n+2})P_{n+1}(\alpha,\beta;z)-$$
$$-k_n(\alpha,\beta)P_n(\alpha,\beta;z),$$

където

$$k_n(\alpha,\beta)=\frac{1}{l_n(\alpha,\beta)},$$

и съответно за асоциираните функции

$$(36)\qquad k_{n+1}(\alpha,\beta)Q_{n+2}(\alpha,\beta;\zeta)=\frac{1}{l_{n+1}(\alpha,\beta)}(\zeta-a_{n+2})Q_{n+1}(\alpha,\beta;\zeta)-$$
$$-k_n(\alpha,\beta)Q_n(\alpha,\beta;\zeta).$$

От равенствата (35) и (36) по познат начин се получава известната формула на Кристофел—Дарбу

$$(37)\qquad \frac{1}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{N}P_n(\alpha,\beta;z)\frac{Q_n(\alpha,\beta;\zeta)}{l_n(\alpha,\beta)h(\alpha,\beta;\zeta)}+R_N(\alpha,\beta;z,\zeta),$$

където

$$(38)\qquad R_N(\alpha,\beta;z,\zeta)=\frac{k_N(\alpha,\beta)}{(\zeta-z)h(\alpha,\beta,\zeta)}\{P_{N+1}(\alpha,\beta;z)Q_N(\alpha,\beta;\zeta)-$$
$$-P_N(\alpha,\beta;z)Q_{N+1}(\alpha,\beta;\zeta)\},$$

$$h(\alpha,\beta;\zeta)=k_0(\alpha,\beta)\{P_1(\alpha,\beta;\zeta)Q_0(\alpha,\beta;\zeta)-Q_1(\alpha,\beta;\zeta)\}.$$

9. Асимптотични формули за полиномите на Якоби и асоциираните функции

Когато параметрите α и β са реални числа, по-големи от -1, за полиномите на Якоби е в сила следната „асимптотична формула“:

$$P_n(\alpha,\beta\,;z)=O(2^{-n}|t|^n), \tag{39}$$

където $|t|>1$ и $z=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$ ([5], стр. 203). При това горното равенство е удовлетворено равномерно по z във всяко ограничено и затворено множество $F\subset E-[-1\,;1]$. Като се използува производящата функция за полиномите на Якоби и се приложи методът на Дарбу, установява се, че равенството (39) е валидно, когато α и β са произволни комплексни числа, но такива, че α, β, $\alpha+\beta\neq-1,-2,\ldots$

За асоциираните функции на полиномите на Якоби ще установим следната „асимптотична формула“:

$$\varrho(z)\,Q_n(\alpha,\beta\,;z)=O(2^{-n}|u|^n), \tag{40}$$

където $|u|<1$ и $z=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)$. При това равенството (40) е удовлетворено равномерно по z във всяко ограничено и затворено множество $F\subset E-[-1\,;+1]$.

Забележка. Функциите $\varrho(z)\,Q_n(\alpha,\beta;z)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ са еднозначни и регулярни в областта $E-[-1\,;+1]$.

Да разгледаме функцията $(n>-\mathrm{Re}(\beta))$

$$G_n(\alpha,\beta\,;z)=\int\limits_{\gamma}\frac{\varrho(\zeta)(1-\zeta^2)^n}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta, \tag{41}$$

където $z\in E-[-1\,;+1]$ и γ е същият контур, който беше използуван в точка 7 при дефиницията на асоциираните функции. За всяко $z\in E-[-1\,;+1]$ ще бъде в сила равенството

$$\varrho(z)\,Q_n(\alpha,\beta\,;z)=(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}\frac{n!}{2\pi i}\,G_n(\alpha,\beta\,;z). \tag{42}$$

Да изберем цялото положително число $p>\max(-\mathrm{Re}(\alpha),-\mathrm{Re}(\beta))$ и да положим за $x\in[-1\,;+1]$

$$\tau_+(z,x)=\lim_{\substack{\zeta\to x\\ \mathrm{Im}(\zeta)>0}}\frac{\varrho(\zeta)(1-\zeta^2)^p}{(\zeta-z)^{p+1}},$$

$$\tau_-(z,x)=\lim_{\substack{\zeta\to x\\ \mathrm{Im}(\zeta)<0}}\frac{\varrho(\zeta)(1-\zeta^2)^p}{(\zeta-z)^{p+1}}.$$

За всяко $x\in[-1\,;+1]$ е в сила равенството $\tau_+(z,x)=e^{2\alpha\pi i}\tau_-(z,x)$. От (41) ще получим тогава

$$G_n(\alpha,\beta\,;z)=\int\limits_{-1}^{+1}\{\tau_-(z,x)-\tau_+(z,x)\}\left(\frac{1-x^2}{x-z}\right)^{n-p}dx= \tag{43}$$

$$=(1-e^{2\pi\alpha i})\int_{-1}^{+1}\tau_-(z,x)\left(\frac{1-x^2}{x-z}\right)^{n-p}dx=$$

$$=(e^{-2\pi\alpha i}-1)\int_{-1}^{+1}\tau_+(z,x)\left(\frac{1-x^2}{x-z}\right)^{n-p}dx.$$

Нека примерно $\operatorname{Im}(z)>0$. Тогава $\operatorname{Im}(u)<0$ и от горното равенство получаваме

$$(44)\quad G_n(\alpha,\beta;z)=(1-e^{2\pi\alpha i})\left\{\int\limits_{[-1;u]}\frac{\varrho(\zeta)(1-\zeta^2)^p}{(\zeta-z)^{p+1}}\left(\frac{1-\zeta^2}{\zeta-z}\right)^{n-p}d\zeta+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{[u;+1]}\frac{\varrho(\zeta)(1-\zeta^2)^p}{(\zeta-z)^{p+1}}\left(\frac{1-\zeta^2}{\zeta-z}\right)^{n-p}d\zeta\right\}.$$

От (44) следва по-нататък, че

$$(45)\qquad G_n(\alpha,\beta,z)=O\left\{\int\limits_{[-1;u]}\left|\frac{1-\zeta^2}{\zeta-z}\right|^{n-p}ds+\int\limits_{[u;+1]}\left|\frac{1-\zeta^2}{\zeta-z}\right|^{n-p}ds\right\}$$

и последното равенство е удовлетворено равномерно по z във всяко ограничено и затворено множество $F\subset E-[-1;+1]$. Като заместим z с $\frac{u^2+1}{2u}$, от (45) ще получим

$$(46)\qquad G_n(\alpha,\beta;z)=2^{n-p}|u|^{n-p}O\left\{\int\limits_{[-1;u]}\left|\frac{1-\zeta^2}{u^2-2u\zeta+1}\right|^{n-p}ds+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{[u;+1]}\left|\frac{1-\zeta^2}{u^2-2u\zeta+1}\right|^{n-p}ds\right\}.$$

Обаче както ще покажем по-долу, по отсечките $[-1;u]$ и $[u;+1]$ е удовлетворено неравенството

$$(47)\qquad \left|\frac{1-\zeta^2}{u^2-2u\zeta+1}\right|\leqq 1$$

и тогава от (49) следва, че $G_n(\alpha,\beta;z)=O(2^n|u|^n)$. Като имаме пред вид, че

$$\frac{n!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}=O\left(\frac{1}{2^{2n}}\right),$$

от (42) получаваме (40).

Остава да установим неравенството (47). По отсечката $[-1;u]$ $\zeta=-1+t(u+1)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ и следователно

$$\frac{1-\zeta^2}{u^2-2u\zeta+1}=\frac{2t-t^2(u+1)}{u+1-2tu}=\varphi(u).$$

За всяко $t \in (0, 1)$ функцията $\varphi(u)$ е регулярна в кръга $|u| \leq 1$. За да покажем, че $|\varphi(u)| \leqq 1$, достатъчно е да установим, че $|\varphi(e^{i\theta})| \leq 1$. Но

$$|\varphi(e^{i\theta})|^2 = \frac{(2t - t^2\cos\theta - t^2)^2 + t^4\sin^2\theta}{(\cos\theta + 1 - 2t\cos\theta)^2 + (\sin\theta - 2t\sin\theta)^2}$$

и неравенството $|\varphi(e^{i\theta})| \leq 1$ е еквивалентно с неравенството

$$(2t - t^2\cos\theta - t^2)^2 + t^4\sin^2\theta \leq (\cos\theta + 1 - 2t\cos\theta)^2 +$$
$$+ (\sin\theta - 2t\sin\theta)^2,$$

което от своя страна е еквивалентно с неравенството $\cos\theta \geqq -1$.

По аналогичен начин се установява валидността на неравенството (47) и по отсечката $[u, +1]$.

10. Развитие на аналитични функции по полиномите на Якоби

Нека E е произволна елипса с фокуси в точките -1 и $+1$. Като се използуват равенствата (39) и (40), се получава следният резултат: нека α и β са произволни комплексни числа такива, че $\alpha, \beta, \alpha+\beta \neq -1, -2, \ldots$ (и освен това $\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots$). Тогава

$$(48) \quad \frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\alpha, \beta; z) \frac{\varrho(\zeta) Q_n(\alpha, \beta; \zeta)}{I_n(\alpha, \beta)\, q(\alpha, \beta; \zeta)},$$

$$q(\alpha, \beta; \zeta) = \varrho(\zeta)\, h(\alpha, \beta; \zeta),$$

когато ζ и z са точки от областта $E - [-1; +1]$ и ζ лежи вън от E, а z лежи вътре в E. При това редът от дясната страна на (48) е равномерно сходящ, когато ζ и z принадлежат на затворени и ограничени множества F и Φ от областта $E - [-1; +1]$ такива, че F лежи вън от E, а Φ — вътре в E (вж. [5], стр. 260, където се предполага, че α и β са реални числа, по-големи от -1).

Нека $f(z)$ е аналитична вътре в елипсата E с фокуси в точките -1 и $+1$. От (48) следва тогава, че

$$(49) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\alpha, \beta; z)$$

$$(\alpha, \beta, \alpha+\beta \neq -1, -2, \ldots),$$

където

$$(50) \qquad a_n = \frac{1}{2\pi I_n(\alpha, \beta)\, i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta) \varrho(\zeta) Q_n(\alpha, \beta; \zeta)}{q(\alpha, \beta; \zeta)} d\zeta$$

и интегрирането е извършено по произволна проста затворена крива линия от вътрешността на E, която лежи в областта $E - [-1; +1]$ и съдържа отсечката $[-1; +1]$ във вътрешността си.

Като се вземе пред вид обаче (31), за коефициентите (50) се получават равенствата

$$a_n = \frac{1}{I_n(\alpha, \beta)} \int_C f(z)\, \varphi(\alpha, \beta; z)\, P_n(\alpha, \beta; z)\, dz \tag{51}$$

$$(n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Постъпила на 22. VII. 1962 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shohat J., Sur les polynomes orthongonaux generalisés, C. R., Paris, v. **207**, 1938, 556—558.
2. Krall H. L., On derivatives of orthogonal polynomials, Bull. of the Amer. Math. Soc., vol. **47**, 1941, 261—264.
3. Obrechkoff N., Sur le developpement des functions analytiques suivant les polynomes orthogonaux, C. R. de l'Ac. Bulg. des Sc., t. **7**, 1957, 5—8.
4. Обрешков Н., Върху някои ортогонални полиноми в комплексна област, Изв. на Мат. инст. на БАН, т. II, кн. 1, 1956.
5. Сеге Г., Ортогональные многочлены, Гостехиздат, Москва, 1962.

РАЗЛОЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЯКОБИ

П. Русев

(Резюме)

Пусть $\varrho(z)$ есть регулярное решение дифференциального уравнения

$$\frac{\varrho'(z)}{\varrho(z)} = \frac{\alpha}{z-1} + \frac{\beta}{z+1},$$

где α и β произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условиям $\alpha \neq 0, -1, \dots, \beta \neq 0, -1, \dots, \alpha+\beta \neq 0, -1, \dots$. Пусть

$$P_n(\alpha, \beta; z) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)} \frac{1}{\varrho(z)} \frac{d^n}{dz^n} \left\{ \varrho(z)(1-z^2)^n \right\}$$

многочлен Якоби степен n. Автором устанавливается существование аналитической функции $\varphi(\alpha, \beta; z)$, регулярной в области $E - [-1; 1]$ где E — полная комплексная плоскость и $[-1; 1]$ интервал $-1 \leq x \leq 1$) и такую, что

$$\int_C \varphi(\alpha, \beta; z)\, P_m(\alpha, \beta; z)\, P_n(\alpha, \beta; z) = 0 \qquad (m \neq n)$$

для любой замкнутой регулярной кривой $C \in E - [-1; 1]$.

Далее, как это установлено в настоящей работе, любая аналитическая функция $F(z)$, являющейся регулярной в эллипсе E с фокусами в точках -1 и $+1$, разлагается в ортогональный ряд

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\alpha,\beta;z)$$

по многочленам Якоби с

$$C_n=\frac{1}{I_n(\alpha,\beta)}\int_C \varphi(\alpha,\beta;z)\,P_n(\alpha,\beta;z)\,F(z)\,dz,$$

где

$$I_n(\alpha,\beta)=\frac{2^{2n}\,n!\,\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}$$

и C — произвольная простая замкнутая регулярная кривая, лежащая в эллипсе E и такая, что $ind_{[-1;1]}\,C \neq 0$.

Превел: В. Ребров

EXPANSION OF ANALYTIC FUNCTIONS IN SERIES OF JACOBI POLYNOMIALS

P. Russev

(Summary)

Let $\sigma(z)$ be a regular solution of the differential equation

$$\frac{\varrho'(z)}{\varrho(z)}=\frac{\alpha}{z-1}+\frac{\beta}{z+1}$$

where α and β are arbitrary complex numbers different from $0,-1,-2,\ldots$ and such that $\alpha+\beta \neq 0,-1,-2,\ldots$ Let

$$P_n(\alpha,\beta;z)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}\;\frac{1}{\varrho(z)}\;\frac{d^n}{dz^n}\{\varrho(z)(1-z^2)^n\}$$

be the well-known expression of Jacobi polynomial of degree n. In the paper is established the existence of an analytical function $\varphi(\alpha,\beta;z)$ which is regular in the region $E-[-1;1]$ (E denotes the whole complex plane; $[-1;1]$ denotes the real segment $-1\le x\le 1$) and such that

$$\int_C \varphi(\alpha,\beta;z)\,P_m(\alpha,\beta;z)\,P_n(\alpha,\beta;z)\,dz=0 \qquad (m\neq n)$$

for every closed regular curve $C\in E-[-1;1]$.

Furthermore, as it is proved in the paper, every analytic function $F(z)$ which is regular in an ellipsis E with focuses at -1 and $+1$, is expansible in an orthogonal series

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\alpha,\beta;z)$$

of Jacobi polynomials with

where

$$C_n = \frac{1}{I_n(\alpha, \beta)} \int_C \varphi(\alpha, \beta; z) P_n(\alpha, \beta; z) F(z)\, dz,$$

$$I_n(\alpha, \beta) = \frac{2^{2n}\, n!\, \Gamma(\alpha+n+1)\, \Gamma(\beta+n+1)\, \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+1)\, \Gamma(\alpha+\beta+2n+1)\, \Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}$$

and C denotes an arbitrary simple closed regular curve lying in the ellipsis E and such that $ind_{[-1;\,1]}\, C \neq 0$.

Превел авторът