БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE DES SCIENCES DE BULGARIE
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Vol.) VII

ВЪРХУ ПОЛИНОМИТЕ НА ЯКОБИ

Ив. Байчев

В настоящата работа се занимаваме с класическите полиноми на Якоби $J_n(x;\alpha,\beta)$ при произволни комплексни стойности на параметрите α и β, като α, β и $\alpha+\beta$ предполагаме отлични от цели отрицателни числа.

Като използуваме един резултат на Krall за обобщените ортогонални полиноми, установяваме ортогоналност на полиномите на Якоби от вида

$$\int\limits_L R(x;\alpha,\beta)\,J_m(x;\alpha,\beta)J_n(x;\alpha,\beta)\,dx \begin{cases} =0 & m\neq n \\ \neq 0 & m=n, \end{cases}$$

където $R(x;\alpha,\beta)$ е регулярна функция на x в разрязаната равнина $E_1=E-[-1,1]$, а L е проста затворена крива, съдържаща отсечката $[-1,1]$ във вътрешността си.

По-нататък извеждаме асимптотични формули за полиномите и асоциираните им функции $H_n(x;\alpha,\beta)$ при големи n и $x\in E_1$. С тяхна помощ доказваме теореми за развитие на аналитични функции в редове на Фурие по полиномите на Якоби и в редове по функциите $H_n(x;\alpha,\beta)$, аналогични на известните при реални α и β.

1. Обобщени ортогонални полиноми

Нека $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ е редица от комплексни числа, за която

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|r_n|}=\varrho,\quad 0\leqq\varrho<\infty.$$

Тогава функцията

$$r(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_{k+1}}{x^{k+1}}$$

е аналитична в областта $G: |x|>\varrho$ и притежава особени точки в кръга $|x|\leqq\varrho$.

Ако C е проста затворена крива, лежаща в G, ще търсим система от полиноми $G_n(x)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, от n-та степен, ортогонални по C с тегло $r(x)$, т. е. удовлетворяващи релациите

$$(1.1)\qquad \int\limits_C r(x)\,G_m(x)\,G_n(x)\,dx \left.\right\} \begin{matrix} =0 & m\neq n, \\ \neq 0 & m=n. \end{matrix}$$

Теорема 1. *Ако*

$$(1.2)\qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & & r_n \\ r_2 & r_3 & \dots & r_{n+1} \\ & & & \\ r_n & r_{n+1} & \dots & r_{2n-1} \end{vmatrix} \neq 0, \quad n=1, 2, 3, \dots,$$

полиномите $G_0(x)=1$,

$$(1.3)\qquad G_n(x) = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} r_1 & r_2, & & r_{n+1} \\ r_2 & r_3 & & r_{n+2} \\ & & & \\ r_n & r_{n+1} & \dots & r_{2n} \\ 1 & x & & x^n \end{vmatrix}, \quad n=1, 2, 3\dots$$

от n-та степен са ортогонални по C с тегло $r(x)$.

Действително имаме

$$\int_C r(x)\, G_n(x)\, x^\nu\, dx = \frac{2\pi i}{\Delta_n} \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & & r_{n+1} \\ r_2 & r_3 & & r_{n+2} \\ & & & \\ r_n & r_{n+1} & \dots & r_{2n} \\ r_{\nu+1} & r_{\nu+2} & \dots & r_{\nu+n+1} \end{vmatrix} = 0$$

за $\nu = 0, 1, 2, \dots, n-1$,

$$g_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C r(x)\, G_n^2(x)\, dx = \frac{1}{2\pi i} \int_C r(x) G_n(x)\, x^n\, dx = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} \neq 0.$$

Лесно се установява, че полиномите $G_n(x)$ удовлетворяват рекурентната зависимост

$$(1.4)\qquad \frac{1}{g_n} G_{n+1}(x) = \frac{1}{g_n} (x+\gamma_n)\, G_n(x) - \frac{1}{g_{n-1}}\, G_{n-1}(x),$$

$$n=1, 2, 3, \dots$$

където

$$\gamma_n = \frac{G_{n+1}(0)\, g_{n-1} + G_{n-1}(0)\, g_n}{G_n(0)\, g_{n-1}}.$$

Ако $H_0(x), H_1(x), \dots, H_n(x), \dots$ е произволна редица от функции, за които е в сила същата релация (1.4), то при $x \neq y$ и

$$h(y) = \frac{1}{g_0} [G_1(y)\, H_0(y) - H_1(y)] \neq 0$$

имаме аналогично на формулата на Кристофел за ортогоналните полиноми

$$\frac{1}{y-x}=\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{g_n}\;G_n(x)\;\frac{H_n(y)}{h(y)}+R_p(x,y),$$

(1.5)

$$R_p(x,\ y)=\frac{D_p(x,\ y)}{g_p(y-x)\,h(y)},$$

където

$$D_p(x,\ y)=G_{p+1}(x)\,H_p(y)-G_p(x)\,H_{p+1}(y).$$

За полиноми от вида (1.3), наречени обобщени ортогонални полиноми, Krall [1] доказва следната

Теорема 2. *За да бъдат полиномите* (1.3) *решения на диференциално уравнение от вида*

$$(l_{22}\,x^2+l_{21}\,x+l_{20})\,G_n''(x)+(l_{11}x+l_{10})G_n'\,(x)-\lambda_n\,G_n(x)=0,$$

където l_{ij} са независещи от n константи, а $\lambda_n=n\,l_{11}+n(n-1)\,l_{22}$, е необходимо и достатъчно да бъдат изпълнени неравенствата (1.2) *и релациите*

$$[l_{11}+(k-1)\,l_{22}]\,r_{k+1}+[l_{10}+(k-1)\,l_{21}]\,r_k+(k-1)l_{20}\,r_{k-1}=0$$

$$k=1,\ 2,\ 3,\ldots$$

Ние ще използуваме този резултат за някои разглеждания върху полиномите на Якоби.

2. Ортогоналност на полиномите на Якоби

Нека α и β са произволни комплексни числа, като $\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta \neq -1, -2, .$ Полиномите на Якоби с коефициент пред x^n равен на единица се дават с равенството

$$J_n(x;\ \alpha,\ \beta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}\,(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}\,\frac{d^n}{dx^n}[(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n}].$$

Както е известно, те удовлетворяват диференциалното уравнение

(2.1) $$(x^2-1)y''+[(\alpha+\beta+2)\,x+\alpha-\beta]y'-n(n+\alpha+\beta+1)y=0$$

и при $\alpha>-1$ и $\beta>-1$ са ортогонални върху интервала $[-1,\ 1]$ с тегло

$$(x-1)^{\alpha}(x+1)^{\beta}.$$

В работата си [2] Обрешков забелязва, че ако $\beta\neq 0,\ -1,\ -2,\ldots$ е произволно комплексно число, а α е комплексно число, за което $\operatorname{Re}(\alpha)>-1$, полиномите на Якоби са ортогонални по всеки разрез, започващ и завършващ в точката 1 и обхващащ точката -1 със същото тегло.

Тук ще изследваме въпроса за ортогоналност на тези полиноми при произволни комплексни α и β, като $\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\neq -1,\ -2,\ -3\ldots$[1]

Да поставим в (2.1) $x=1+t$. Получаваме уравнението

(2.2) $$(t^2+2\,t)\,y''+[(\alpha+\beta+2)\,t+2\,(\alpha+1)\,]y'-n\,(n+\alpha+\beta+1)y=0,$$

[1] Такива ще предполагаме α и β до края на тази работа.

което се удовлетворява от полиномите $J_n(1+t;\ \alpha,\ \beta)$.

Да разгледаме, от друга страна, полиномите

$$K_n=(t;\ \alpha,\ \beta)=\frac{1}{\Delta_n}\begin{vmatrix} r_1 & r_2 & & r_{n+1} \\ r_2 & r_3 & & r_{n+2} \\ & & & \\ r_n & r_{n+1} & & r_{2n} \\ 1 & t & & t^n \end{vmatrix}$$

$(K_0(t;\alpha,\ \beta)=1)$, където

$$r_1=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)},$$

$$(\alpha+\beta+k+1)r_{k+1}+2(\alpha+1)\,r_k=0,\quad k=1,2,\dots$$

Имаме

$$r_{k+1}=(-1)^k\frac{2^k\,\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+k+2)},\quad k=0,\ 1,\ 2,\dots$$

$$\Delta_n(\alpha,\ \beta)=\prod_{s=0}^{n-1}\frac{2^{2s}\,\Gamma(s+1)\,\Gamma(\alpha+s+1)\,\Gamma(\beta+s+1)}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+n+s+1)},\quad n=1,\ 2,\dots$$

По теорема 2 полиномите $K_n(t;\ \alpha,\ \beta)$ удовлетворяват уравнението (2.2) и понеже са със старши коефициент единица, ще имаме

$$K_n(t;\ \alpha,\ \beta)=J_n(1+t;\ \alpha,\ \beta).$$

Нека

$$r(t;\ \alpha,\ \beta)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^k\,\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+k+2)}\,\frac{1}{t^{k+1}}.$$

Тогава, ако положим

$$(2.3)\qquad R(x;\ \alpha,\ \beta)=r(x-1;\alpha,\ \beta)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^k\,\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+k+2)}\,\frac{1}{(x-1)^{k+1}}=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}(x-1)^{-1}F\left(\alpha+1,\ 1,\ \alpha+\beta+2;\ \frac{2}{1-x}\right),$$

според теорема 1 ще получим

$$\int_{C_1}R(x;\ \alpha,\ \beta)\,J_m(x;\ \alpha,\ \beta)\,J_n(x;\alpha,\beta)\,dx=0,\qquad m\neq n,$$

$$(2.4)\qquad i_n(\alpha,\ \beta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}R(x;\ \alpha,\ \beta)\,J_n^2(x;\ \alpha,\ \beta)\,dx=\frac{\Delta_{n+1}(\alpha,\ \beta)}{\Delta_n(\alpha,\ \beta)}=$$

$$=\frac{2^{2n}\,n!\,\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)},$$

където C_1 е произволна проста затворена крива, лежаща в областта $|x-1|>2$.

Функцията $R(x; \alpha, \beta)$ е дефинирана в (2.3) за $|x-1|>2$ и е аналитична в тази област. Тя обаче е аналитично продължима в цялата разрязана равнина E_1, понеже притежава представянето

$$R(x; \alpha, \beta)=2\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (x-\sqrt{x^2-1})^{k+1}, \tag{2,5}$$

където $(x-\sqrt{x^2-1})<1$,

$$\beta_k=\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+k+2)}\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\, 2^{2s}\binom{k+s+1}{k-s},\quad k=0,\ 1,\ldots$$

и редът е равномерно сходящ във всяка област $|x-\sqrt{x^2-1}|\leqq r<1$. Върху доказателството на тези факти тук няма да се спираме, понеже те ще следват от по-общи резултати в § 4.

Имаме следователно

Теорема 3. *Съществува функция тегло $R(x; \alpha, \beta)$, регулярна в пресечената равнина E_1, спрямо която полиномите на Якоби $J_n(x; \alpha, \beta)$ са ортогонални по всяка проста затворена крива L, съдържащи отсечката $[-1, 1]$ във вътрешността си.*

При $x\in E_1$ $R(x; \alpha,\beta)$ се дава с реда (2.5). При $|x-1|>2$ тя се дава с по-простия ред (2.3).

Според (1.4) полиномите $J_n(x; \alpha, \beta)$ удовлетворяват рекурентната зависимост

$$\frac{1}{i_n(\alpha, \beta)}J_{n+1}(x; \alpha, \beta)=\frac{x-\gamma_n}{i_n(\alpha, \beta)}J_n(x; \alpha, \beta)-\frac{1}{i_{n-1}(\alpha, \beta)}J_{n-1}(x; \alpha, \beta), \tag{2.6}$$

където $i_n(\alpha, \beta)$ се дават от (2.4), а

$$\gamma_n=\frac{\beta^2-\alpha^2}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)}.$$

3. Асимптотична формула за полиномите на Якоби

Имаме познатото равенство

$$J_n(x; \alpha, \beta)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}\sum_{k=0}^{n}2^{n-k}\binom{n}{k}(\alpha+k+1)\ldots(\alpha+n)\,\Gamma(\alpha+\beta+n+k+1)(x-1)^k.$$

(виж например [3], стр. 74). По начин, аналогичен на този, който се следва в работата [2], ние ще изведем от това представяне асимптотична формула за полиномите $J_n(x; \alpha, \beta)$.

Като поставим

$$x=\tfrac{1}{2}(z+z^{-1}),\quad |z|<1,$$

с прости пресмятания получаваме

$$L_n(z) = 2^n\, z^n J_n(x;\, a,\, \beta) = \sum_{k=0}^{2n} a_{n,k}\, z^k,$$

където

$$a_{n,k} = \frac{1}{\Gamma(a+\beta+2n+1)} \sum_{s=0}^{k} (-1)^{k-s} \binom{2n-2s}{k-s} \binom{n}{s} (a+n-s+1)$$

$$(a+n)\,\Gamma(a+\beta+2n-s+1).$$

Понеже очевидно $a_{n,\,2n-k} = a_{n,\,k}$, $k=0,\, 1,\, \ldots,\, n$, можем да пишем

(3.1) $$L_n(z) = g_n(z) + z^{2n} g_n(z^{-1}) - a_{n\,n}\, z^n,$$

където

$$g_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, z^k.$$

Ние ще покажем, че

(3.2) $$\lim g_n(z) = (1-z)^{-a-1/2}(1+z)^{-\beta-1/2} = g(z)$$

равномерно за $|z| \leqq r < 1$.

При $|z| < 1$ имаме развитието

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k,$$

където $a_{-1}=0$, $a_0 = 1$,

(3.3) $$k\, a_k - (a-\beta) a_{k-1} - (a+\beta+k-1) a_{k-2} = 0, \quad k \geqq 1.$$

При фиксирано k $(0 \leqq k \leqq n)$ имаме

(3.4) $$\lim_{n\to\infty} a_{n,\,k} = a_k.$$

Наистина, понеже полиномът $J_n(x;\, a,\, \beta)$ удовлетворява уравнението (2.1), полиномът $L_n(z)$ ще удовлетворява уравнението

$$z(z^2-1)\, L_n''(z) + [\,(a+\beta-2n+2)\, z^2 + 2(a-\beta)\, z + (a+\beta+2n)\,] L_n'(z)$$

$$-2n\,[\,(a+\beta+1)\, z + (a-\beta)\,]\, L_n(z) = 0.$$

Оттук със сравняване на коефициентите пред z^{k-1} получаваме $a_{n,\,-1}=0$, $a_{n,\,0} = 1$,

(3.5) $$\begin{aligned} &k(a+\beta+2n-k+1)\, a_{n,\,k} - 2\,(a-\beta)\,(n-k+1)\, a_{n,\,k-1} - \\ &-(a+\beta+k-1)(2n-k+2)\, a_{n,\,k-2} = 0, \quad k \geqq 1. \end{aligned}$$

От тази релация се вижда, че при фиксирано k и $n \to \infty$ числата $a_{n,\,k}$ притежават крайна граница a_k' и

$$k\, a_k' - (a-\beta)\, a_{k-1}' - (a+\beta+k-1) a_{k-2}' = 0.$$

Понеже $a_1' = a_{-1}$, $a_0' = a_0$, поради (3.3) $a_k' = a_k$, $k \geqq 1$, с което (3.4) е доказано.

Да положим за краткост

$$|\alpha-\beta|=\lambda,\ |\alpha+\beta|=\mu,\ \frac{2\mu+k+2}{k+1}=\tau_k>1,\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Ако

(3.6) $$0\leqq k\leqq n,\ n\geqq 2\mu,$$

имаме лесно проверимите неравенства

$$\frac{n-k+1}{2n-k+1-\mu}<\frac{2n-k+2}{2n-k+1-\mu}\leqq\tau_k.$$

Тогава от (3.5) при условията (3.6) получаваме

(3.7) $$|a_{n,k}|<\tau_k\left(\frac{2\lambda}{k}|a_{n,k-1}|+\frac{\mu+k-1}{k}|a_{n,k-2}|\right).$$

Да разгледаме сега функцията

$$\sigma(z)=(z-1)^{-\frac{2\lambda+\mu+1}{2}}(z+1)^{\frac{2\lambda-\mu-1}{2}}$$

При $|z|<1$ имаме

$$\sigma(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma_k z^k,$$

където $\sigma_{-1}=0$, $\sigma_0=1$,

(3.8) $$\sigma_k=\frac{2\lambda}{k}\sigma_{k-1}+\frac{\mu+k-1}{k}\sigma_{k-2},\quad k\geqq 1.$$

Очевидно $|a_{n-1}|=\sigma_{-1}$, $|a_{n,0}|=\sigma_0$ и понеже $\tau_k>1$, от (3.7) и (3.8) получаваме лесно

(3.9) $$|a_{n,k}|<\sigma_k\prod_{s=0}^{k}\tau_s=p_k.$$

Редът $\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_k z^k$ е равномерно сходящ при $|z|\leqq r<1$.

Нека $\varepsilon>0$ е произволно и $N>2\mu$ е така избрано, че да имаме

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}p_k|z|^k<\varepsilon.$$

На основание на (3.4) и (3.9) получаваме съответно

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{N}a_{nk}z^k=\sum_{k=0}^{N}a_k z^k,$$

$$\left|\sum_{k=N+1}^{n}a_{nk}z^k\right|<\sum_{k=N+1}^{\infty}p_k|z|^k<\varepsilon,$$

с което (3.2) е доказано.

Като поставим в (3.1) $n \to \infty$, получаваме

$$\lim_{n\to\infty} L_n(z) = g(z)$$

равномерно за $|z| \leqq r < 1$.

Имаме окончателно

$$J_n(x; \alpha, \beta) = 2^{-n} z^{-n} (1-z)^{-\alpha-1/2} (1+z)^{-\beta-1/2} (1+\varepsilon_n), \tag{3.10}$$

където $z = x - \sqrt{x^2-1}$, $|z| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ равномерно за $|z| \leqq r < 1$.

4. Асоциирани функции и асимптотична формула за тях

Както е известно ([3], стр. 86), за разглежданите стойности на α и β при $|x-1| > 2$ асоциирана функция $H_n(x; \alpha, \beta)$ на полинома $J_n(x; \alpha, \beta)$ можем да въведем с равенството

$$U_n(x; \alpha, \beta) = (x-1)^\alpha (x+1)^\beta H_n(x; \alpha, \beta) = \tag{4.1}$$

$$= i_n(\alpha, \beta)(x-1)^{-n-1} F\left(\alpha+n+1,\ n+1,\ \alpha+\beta+2n+2; \frac{2}{1-x}\right) =$$

$$= 2^{-n-1} i_n(\alpha, \beta) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k}{k} \frac{(\alpha+n+1)\ldots}{(\alpha+\beta+2n+2)\ldots} \times$$

$$\times \frac{(\alpha+n+k)}{(\alpha+\beta+2n+k+1)} \left(\frac{2}{x-1}\right)^{n+k+1}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Функцията $U_n(x; \alpha, \beta)$ е аналитична при $|x-1| > 2$. Ние ще установим, че тя е аналитично продължима в цялата разрязана равнина E_1.

За целта да поставим в (4.1)

$$x = {}^1/_2 (z + z^{-1}), |z| < 1.$$

Понеже $\dfrac{2}{x-1} = \dfrac{4z}{(1-z)^2}$, при $\dfrac{4|z|}{(1-|z|)^2} < 1$ имаме развитието

$$U_n(x; \alpha, \beta) = 2^{n+1} z^{n+1} i_n(\alpha, \beta) \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{n,k} z^k, \tag{4.2}$$

където

$$\beta_{n,k} = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s 2^{2s} \binom{2n+k+s+1}{k-s} \binom{n+s}{s} \times$$

$$\times \frac{(\alpha+n+1)\ldots(\alpha+n+s)}{(\alpha+\beta+2n+2)\ldots(\alpha+\beta+2n+s+1)},$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

Да положим

$$h_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{n,k} z^k.$$

Лесно се убеждаваме, че $h_n(z)$ удовлетворява уравнението

$$z(1-z^2)\, h_n''(z) + [\,(\alpha+\beta-2n-4)\, z^2 + 2(\alpha-\beta)\, z + (\alpha+\beta+2n+2)\,]\, h_n'(z) +$$
$$+ 2(n+1)\,[(\alpha+\beta-1)\, z + \alpha - \beta]\, h_n(z) = 0,$$

откъдето чрез сравняване на коефициентите пред z^{k-1} намираме $\beta_{n,-1}=0$, $\beta_{n,0}=1$,

$$\text{(4.3)}\qquad \begin{aligned} &k(\alpha+\beta+2n+k+1)\,\beta_{n,k} + 2(\alpha-\beta)(n+k)\,\beta_{n,k-1} + \\ &+(\alpha+\beta-k+1)(2n+k)\,\beta_{n,k-2} = 0, \quad k \geqq 1. \end{aligned}$$

Оттук се вижда, че числата $\beta_{n,k}$ притежават крайна граница b_k' при фиксирано k и $n \to \infty$ и $b'_{-1} = 0$, $b'_0 = 1$,

$$\text{(4.4)}\qquad k\, b_k' + (\alpha-\beta)\, b'_{k-1} + (\alpha+\beta-k+1)\, b'_{k-2} = 0, \quad k \geqq 1.$$

Понеже редицата $\beta_{0,k}, \beta_{1,k}, \ldots \beta_{n,k}, \ldots$ при фиксирано k е ограничена, нека

$$|\beta_{n,k}| \leqq \beta_k', \quad k = 0,\ 1,\ 2 \ldots$$

Ако $k_0 = [\mu]$, от (4.4) при $k \geqq k_0$ получаваме

$$\text{(4.5)}\qquad |\beta_{n,k_0+s}| \leqq \frac{2n+k_0+s}{z_n+k_0+s+1-\mu}\left(\frac{2\lambda}{k_0+s}\,|\beta_{n,k_0+s-1}| + \frac{\mu+k_0+s-1}{k_0+s}\,|\beta_{n,k_0+s-2}|\right)_{s=0,1,2,\ldots}$$

Нека ω е така избрано, че да имаме

$$\beta'_{k_0-r} \leqq \omega\, \sigma_{k_0-r}, \quad 0 \leqq r \leqq k_0.$$

Понеже

$$\frac{2n+k_0+s}{2n+k_0+s+1-\mu} \leqq \frac{k_0+s+1}{k_0+s+1-\mu} = \omega_s \geqq 1,$$

от (4.4) получаваме

$$\text{(4.6)}\qquad |\beta_{n,k_0+s}| < \omega\, \sigma_{k_0+s} \prod_{r=0}^{s} \omega_r = q_{k_0+s} \qquad {}_{s=0,1,2\ldots}$$

Редът $\sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k$ е очевидно сходящ за $|z| < 1$. Тогава редът $h_n(z)$ е също сходящ за $|z| < 1$.

Имаме следователно

$$\text{(4.7)}\qquad U_n(x;\alpha,\beta) = 2^{n+1}\, i_n(\alpha,\beta)\,(x-\sqrt{x^2-1})^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{n,k}\,(x-\sqrt{x^2-1})^k,$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\dots$$

където $|x-\sqrt{x^2-1}|<1$ и редът е равномерно сходящ във всяка област $|x-\sqrt{x^2-1}|\leqq r<1$.

С това аналитичната продължимост на $U_n(x;\ \alpha,\ \beta)$ е установена.

Сравняването на (2.3) и (4.1) показва, че

$$R(x;\ \alpha,\ \beta)=U_0(x:\alpha,\ \beta),$$

откъдето следва и представянето (2.5) за $R(x;\ \alpha,\ \beta)$.

Сега лесно ще намерим асимптотична формула за $U_n(x;\ \alpha,\ \beta)$ при $n\to\infty$.

Имаме

$$\lim_{n\to\infty} h_n(z)=(1-z)^{\alpha-1/2}(1+z)^{\beta-1/2}$$

равномерно спрямо z при $|z|\leqq r<1$.

Действително при $|z|<1$ имаме

$$(1-z)^{\alpha-1/2}(1+z)^{\beta-1/2}=\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k,$$

където $b_{-1}=0,\ b_0=1,$

$$k\,b_k+(\alpha-\beta)\,b_{k-1}+(\alpha+\beta-k+1)\,b_{k-2}=0,\quad k\geqq 1.$$

Поради (4.4) $b_k=b_k',\ k\geqq 0$.

Неравенствата (4.6) показват, че редът $h_n(z)$ е равномерно сходящ относно параметъра n, поради което

$$\lim_{n\to\infty} h_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\beta_{nk}z^k=\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k=(1-z)^{\alpha-1/2}(1+z)^{\beta-1/2}$$

равномерно за $|z|\leqq r<1$.

По формулата на Стирлинг от (2.4) имаме

$$i_n(\alpha,\beta)\sim\frac{2^{-2n-1-2\alpha-2\beta}\pi}{\Gamma(\beta+1)}$$

и от (4.7) получаваме

$$(4.8)\quad U_n(x;\ \alpha,\ \beta)=2^{-n-2\alpha-2\beta}\frac{\pi}{\Gamma(\beta+1)}z^{n+1}(1-z)^{\alpha-1/2}(1+z)^{\beta-1/2}(1+\eta_n),$$

където $z=x-\sqrt{x^2-1},\ |z|<1,\ \lim\limits_{n\to\infty}\eta_n=0$ равномерно при $|z|\leq r<1$.

Да отбележим, че функциите $U_n(x;\alpha,\beta)$ удовлетворяват същата рекурентна зависимост (2.6), както полиномите $J_n(x;\alpha,\beta)$, т. е.

$$(4.9)\qquad \frac{1}{i_n(\alpha,\beta)}U_{n+1}(x)=\frac{x-\gamma_n}{i_n(\alpha,\beta)}U_n(x)-\frac{1}{i_{n-1}(\alpha,\beta)}U_{n-1}(x),$$

$$n=1,\ 2,\dots$$

Проверката, като се излезе например от (4.1), е непосредствена.

5. Развития на функции в редове по полиномите на Якоби

Намереното тегло $R(x;\ \alpha,\ \beta)$ и асимптотичните формули (3.10) и (4.8) ни позволяват да установим следната

Теорема 4. *Нека $f(z)$ е холоморфна функция в известна област G, съдържаща отсечката $[-1,\ 1]$ и*

$$c_0 J_0(x;\alpha,\beta)+c_1 J_1(x;\ \alpha,\ \beta)+c_2 J_2(x;\ \alpha,\ \beta)+ \tag{5.1}$$

е съответният ѝ ред на Фурие, т. е.

$$c_n=\frac{1}{2\pi i\, i_n(\alpha,\beta)}\int_L R(x;\ \alpha,\ \beta)\, J_n(x;\alpha,\ \beta) f(x)\, dx, \qquad n=0,\ 1,\ 2, \tag{5.2}$$

където L е проста затворена крива, лежаща в G и заграждаща отсечката $[-1,\ 1]$. Тогава редът (5.1) е сходящ към $f(x)$ в елипсата γ с фокуси -1 и 1, минаваща през онази особена точка на $f(x)$, сумата от разстоянията на която до точките -1 и 1 е най-малка. Сходимостта е абсолютна и равномерна във всяка конфокална вътрешна на γ елипса.

За всяка точка, лежаща вън от γ, редът е разходящ.

Доказателство. Поради (2.6) и (4.9) можем да приложим формулата (1.5). Получаваме

$$\begin{gathered}\frac{1}{y-x}=\sum_{n=0}^{p} J_n(x)\frac{U_n(y)}{i_n h(y)}+R_p(x;\ \alpha,\ \beta),\\ R_p(x,\ y)=\frac{1}{(y-x)h(y)}\ \frac{J_{p+1}(x)U_p(y)-J_p(x)U_{p+1}(y)}{i_p},\\ x\neq y,\ h(y)=\frac{1}{i_0}[J_1(y)U_0(y)-U_1(y)]\neq 0.\end{gathered} \tag{5.3}$$

Нека x лежи вътре, а y — вън от произволна елипса с фокуси в точките -1 и 1 и да положим

$$x={}^1/_2(z+z^{-1}),\ y={}^1/_2(\zeta+\zeta^{-1}),\ 0<|\zeta|<|z|<1.$$

По асимптотичните формули (3.10) и (4.8) имаме

$$\frac{J_{p+1}(x)U_p(y)}{i_p}=\left(\frac{\zeta}{z}\right)^{p+1}\left(\frac{1-\zeta}{1-z}\right)^{\alpha-{}^1/_2}\left(\frac{1+\zeta}{1+z}\right)^{\beta-{}^1/_2}\frac{1+\varepsilon_p}{1-z^2},$$

където $\varepsilon'_p\to 0$ при $p\to\infty$.

От (5.3) при $p\to\infty$ намираме равенството

$$\frac{1}{y-x}=\sum_{n=0}^{\infty} J_n(x)\frac{U_n(y)}{i_n h(y)}. \tag{5.4}$$

Редът (5.4) е равномерно сходящ, ако x и y принадлежат на затворени множества, едното от които съответно лежи вътре, а другото вън от разглежданата елипса.

Нека елипсата γ е $|z|=r<1$. Да означим с γ' елипсата $|z|=r'$, където $r'>r$ е така избрано, че γ' да не минава през нула на $h(y)$. Ако x е произволна точка, която лежи вътре в γ', с умножение на (5.4) с $\frac{(y)}{2\pi i}$ и интегриране по γ' по формулата на Коши получаваме

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{f(y)\,dy}{y-x}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n J_n(x;\alpha,\beta), \tag{5.5}$$

където

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} f(y)\frac{U_n(x;\alpha,\beta)}{i_n(\alpha,\beta)\,h(y)}\,dy,$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Ясно е, че редът (5.5) е равномерно сходящ във всяка елипса $|z|=r'<1$, $r'>r$ и разходящ извън елипсата $|z|=r$. За да покажем, че той е абсолютно сходящ във всяка елипса $|z|=r'<1$, $r'>r$, да означим с x_0 произволна точка, за която е сходящ. Нека x е точка, лежаща вътре в елипсата $|z|=|z_0|$. Като напишем $c_n J_n(x;\ \alpha,\ \beta)$ във формата

$$c_n J_n(x;\alpha,\beta)=c_n J_n(x_0;\alpha,\beta)\frac{J_n(x;\alpha,\beta)}{J_n(x_0;\alpha,\beta)},$$

с помощта на формулата (3.10) получаваме неравенство от вида

$$|c_n J_n(x;\ \alpha,\ \beta)|<A(z,\ z_0)\left|\frac{z_0}{z}\right|^n,$$

където $A(z,z_0)$ не зависи от n. Понеже $|z|>|z_0|$, твърдението е установено.

Като използуваме въведената ортогоналност, от (5.5) получаваме и формата (5.2) за коефициентите c_n; $n=0,\ 1,\ 2\ldots$

Теорема 4 е доказана.

По същия начин можем да установим и следната

Теорема 5. *Ако $F(y)$ е холоморфна функция в известна околност K на точката $y=\infty$, като $F(\infty)=0$, то*

$$F(y)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\frac{U_n(y;\alpha,\beta)}{h(y)}, \tag{5.6}$$

където

$$b_n=\frac{1}{2\pi i\,i_n(\alpha,\beta)}\int_{\Gamma'} F(x)\,J_n(x;\alpha,\beta)\,dx,$$

$$n=0,1,2,\ldots,$$

и интегрирането е извършено по произволна елипса Γ' с фокуси -1 и 1, лежаща в K. Редът (5.6) е сходящ към $F(y)$ във външността на *елипсата Γ с фокуси —1 и 1, която минава през онази особена точка на $F(y)$, сумата от разстоянията на която до —1 и 1 е най-малка. Сходимостта е абсолютна и равномерна във всяка конфокална и външна на Γ елипса. Вътре в Γ редът е разходящ.*

Доказателство. Нека Γ е елипсата $|\zeta|=R<1$. Да означим с Γ' елипсата $|z|=R'<R$. Ако y е произволна точка, която лежи вън от Γ', от (5.5) с интегриране по Γ' спрямо x получаваме, както по-горе, равенството (5.6), като равномерната сходимост на реда вън от всяка елипса $|\zeta|=R'<R$ и разходимостта вътре в елипсата $\Gamma: |z|=R$ е очевидна. Абсолютната сходимост се доказва, както в теорема 4, с помощта на формулата (4.8).

Да отбележим накрая, че всяка функция, холоморфна в областта, заградена от две конфокални елипси с фокуси в точките —1 и 1, може да се представи като сума на два реда от вида (5.5) и (5.6). На точната формулировка и доказателството няма да се спираме.

Постъпила на 20 VII. 1962 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Krall H. L., On derivatives of orthogonal polynomials, Bull. of the Amer. Math Soc., **17**, 1941, 261—264.
2. Обрешков Н., Върху някои ортогонални полиноми в комплексна област, Изв. на Мат. инст. на БАН, т. 2, 46—67.
3. Сегё Г., Ортогональные многочлены, Москва, 1962.

О МНОГОЧЛЕНАХ ЯКОБИ

Ив. Байчев

(Резюме)

В настоящей работе рассматриваются классические многочлены Якоби $J_n(x\ \alpha,\beta)$, где α и β произвольные комплексные числа и α, β, $\alpha+\beta\neq-1$, $-2,\ldots$ Устанавливается ортогональность вида

$$\int_L R(x;\alpha,\beta)\,J_m(x;\alpha,\beta)\,J_n(x;\alpha,\beta)\,dx\ \begin{cases} =0 & m\neq n\\ \neq 0 & m=n,\end{cases}$$

где $R(x;\alpha,\beta)$ функция x аналитическая в комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрезка $[-1,1]$, а L простой, замкнутый контур, содержащий отрезок $[-1,1]$ внутри себя.

Даются разложения регулярных функций по многочленам $J_n(x;\alpha,\beta)$ и по функциям второго рода $H_n(x;\alpha,\beta)$.

Превел авторът

SUR LES POLYNOMES DE JACOBI

Iv. Bajčev

(Résumé)

Dans ce travail on considère les polynomes classiques de Jacoby, $J_n(x; \alpha, \beta)$ où α et β sont des nombres complexes arbitraires et $\alpha, \beta, \alpha+\beta \neq -1, -2, \ldots$

On établit une orthogonalité de la forme

$$\int_L R(x; \alpha, \beta)\, J_m(x; \alpha, \beta)\, J_n(x; \alpha, \beta)\, dx \begin{cases} = 0 & m \neq n, \\ \neq 0 & m = n, \end{cases}$$

où $R(x; \alpha, \beta)$ est une fonction analytique de x dans le plan complexe avec la coupure $[-1, 1]$. L est une courbe fermée simple contenant l'intervalle $[-1, 1]$ dans son intérieur.

Puis on donne des développements en séries de polynomes $J_n(x; \alpha, \beta)$ et leurs fonctions associées $H_n(x; \alpha, \beta)$.

Превел авторът