БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE DES SCIENCES DE BULGARIE
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Vol.) VII

НЯКОИ НЕОБХОДИМИ УСЛОВИЯ ЗА УСИЛЕНА УСТОЙЧИВОСТ НА ЕДНА РЕДИЦА ОТ СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ

А. Обретенов

Нека $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ са случайни величини, имащи функции на разпределение $G_k(x)$, $k=1, 2, 3, \ldots$ Редицата $\{S_n\}$ се нарича усилено устойчива, ако съществуват константи β_n такива, че

$$P(S_n-\beta_n\to 0)=1. \tag{1}$$

Ако релацията (1) е изпълнена, константите β_n могат да се заменят с медианите mS_n на величините S_n. В случай че величините $S_1, S_2, S_3, \ldots$ са независими, от известната лема на Борел-Кантели следва, че едно необходимо условие за усилена устойчивост е сходимостта на реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n-mS_n|\geqq\varepsilon n) \tag{2}$$

при произволно положително ε.

В настоящата работа ще разглеждаме специалната редица $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$, където $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ са независими случайни величини. За така избраната редица $\{S_n\}$ необходимо условие за (1) е сходимостта на реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n-m\xi_n|\geqq\varepsilon n),$$

което условие престава да е необходимо (вж. [1]), ако вместо εn поставим функция $\varphi(n)=o(n)$. Освен това условие, без да се поставят някакви ограничения на величините ξ_n, друго не е известно. Тук ще дадем някои необходими условия за усилената устойчивост на една редица от горния вид.

Лема 1. Нека $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ са независими събития, а $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ произволни събития, за които при някаква константа r е изпълнено неравенството

$$P(A_n/E_k)\geqq r \text{ за всяко } n\geqq N \text{ и } k=1, 2, \ldots, n.$$

Тогава, ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ е сходящ, то сходящ е и редът $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} P(E_k)$.

Доказателство. Да фиксираме n и да положим $p_n = \sum_{k=1}^{n} P(E_k)$. Нека c е произволна константа, отговаряща на изискването $c < r/2$.

I. Да предположим, че има поне едно k измежду числата $1, 2, \ldots, n$, за което $P(E_k) \geqq cp_n$, тогава

$$P(A_n) \geqq P(E_k)\, P(A_n/E_k) \geqq rcp_n$$

и твърдението ще е доказано.

II. Ако такова k няма, в такъв случай ще имаме $P(E_i) < cp_n$ за $i = 1, 2, \ldots, n$. Да означим с k най-малкия индекс измежду $i = 1, 2, \ldots, n$, за който $P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_i) \geq cp_n$. Очевидно, че

$$cp_n \leqq P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_k) \leqq 2cp_n.$$

Нека B_k е събитието

$$B_k = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_{k-1}.$$

Понеже B_i и E_i са независими, ще получим за $i \leq k$

$$P(B_i/E_i) = P(B_i) \leq \sum_{i=1}^{k} P(E_i) \leqq 2cp_n,$$

отгдето намираме

$$P(A_n \bar{B}_i/E_i) = P(A_n/E_i) - P(A_n B_i/E_i) \geq r - 2cp_n.$$

От последното неравенство следва

$$P(A_n \bar{B}_i E_i) = P(E_i)\, P(A_n \bar{B}_i/E_i) \geq (r - 2cp_n)\, P(E_i). \tag{3}$$

Тъй като $\bigcup_{i=1}^{k} A_n \bar{B}_i E_i \subset A_n$ и $E_i \bar{B}_{i+1} = 0$, ще имаме неравенството

$$P(A_n) \geqq \sum_{i=1}^{k} P(A_n \bar{B}_i E_i),$$

което, като използуваме неравенството (3), ще ни даде

$$P(A_n) \geqq (r - 2cp_n) \sum_{i=1}^{k} P(E_i) \geqq (r - 2cp_n)\, cp_n$$

и твърдението ще е доказано и в този случай, ако редът с общ член p_n^2 е сходящ. Но този ред е сходящ, понеже, както е лесно да се види, и в случая I, и в случая II имаме $P(A_n) \geqq rcp_n^2$.

Теорема 1. *Ако $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ са независими случайни величини и ако редицата $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ е усилено устойчива, редът с общ член*

$$u_n = \sum_{k > 2^n}^{2^{n+1}} P(|\xi_k - m_k| \geqq \varepsilon 2^n)$$

(m_k — *медианата на* ξ_k, $\varepsilon > 0$) *е сходящ.*

Доказателство. Нека X_n е случайната величина $X_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k>2^n}^{2^{n+1}} \xi_k$ и да разгледаме събитията

$$A_n = \{ |X_n - m X_n| \geqq \varepsilon/2 \},$$

$$E_k = \{ |\xi_k - m_k| \geqq 2^n \varepsilon \}, \quad 2^n < k \leqq 2^{n+1},$$

$$M_k = \left\{ \left| X_n - m X_n - \frac{\xi_k - m_k}{2^n} \right| \geqq \varepsilon/2 \right\}, \quad 2^n < k \leqq 2^{n+1}.$$

Тъй като величините $X_n - \frac{\xi_k - m_k}{2^n}$ и $\frac{\xi_k - m_k}{2^n}$ са независими и

$$\{ \xi_k - m_k \geqq 0 \} M_k \subset A_n M_k,$$

имаме

$$P(A_n / M_k) \geqq P(\xi_k \geqq m_k) \geqq 1/2.$$

От усилената устойчивост на редицата $\{ S_n \}$ следва според една теорема на Прохоров [1], че и редицата $\{ X_n \}$ е такава и следователно по лемата на Борел-Кантели редът $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ ще е сходящ. Тогава за достатъчно голямо n: $P(A_n) \leqq 1/4$.

От $P(M_k) P(A_n / M_k) \leqq P(A_n)$ получаваме

$$P(M_k) \leqq 1/2 \text{ и } P(M_k / E_k) = P(M_k) \leqq 1/2.$$

Лесно се проверява, че $E_k \bar{M}_k \subset A_n$ и от това съотношение следва

$$E_k \subset M_k E_k \cup A_n \bar{M}_k \subset M_k \cup A_n;$$

следователно

$$P(M_k / E_k) + P(A_n / E_k) \geqq 1,$$

$$P(A_n / E_k) \geqq 1/2, \text{ за } n \geqq N \text{ и } 2^n < k \leqq 2^{n+1}.$$

Като приложим лема 1, получаваме казаното твърдение.

Лема 2. Нека $\{\eta_k\}$ са независими случайни величини, а $\{\xi_k\}$ друга редица от независими както помежду си, така и от $\{\eta_k\}$ случайни величини. Означаваме с $G_k(x)$ и $F_k(x)$ съответните им функции на разпределение. Нека при произволни $b > a$ са изпълнени неравенствата

$$F_k(b) - F_k(a) \leqq c_k [G_k(b) - G_k(a)], \tag{4}$$

където c_k са константи, по-големи от единица, и такива, че $\prod_{k=1}^{\infty} c_k < +\infty$. При горните условия, ако редицата $\left\{ S'_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_k \right\}$ е усилено устойчива, то и редицата $\left\{ S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \right\}$ е усилено устойчива.

Доказателство. Да означим със $\sigma_n(x)$ една интегрална сума на

$$F_1 * F_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x-t)\,dF_2(t),$$

т. е.

$$\sigma_n(x) = \sum_{i=1}^{n} F_1(x-t_i)\,[F_2(t_i) - F_2(t_{i-1})].$$

От условието (4) получаваме неравенството

$$\sigma_n(b) - \sigma_n(a) \leq c_1 c_2 \sum_{i=1}^{n} [G_1(b-t_i) - G_1(a-t_i)]\,[G_2(t_i) - G_2(t_{i-1})],$$

което в граница при $n \to \infty$ ни дава

$$F_1(b) * F_2(b) - F_1(a) * F_2(a) \leqq c_1 c_2 [G_1(b) * G_2(b) - G_1(a) * G_2(a)]. \tag{5}$$

Горното неравенство показва, че (4) е изпълнено за функциите $F_1 * F_2$ и $G_1 * G_2$ с константа $c_1 c_2$.

Да въведем величините

$$X_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k>2^n}^{2^{n+1}} \eta_k, \qquad \overline{X}_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k>2^n}^{2^{n+1}} \xi_k.$$

Понеже функцията на разпределение на $\overline{X}_n$ се изразява чрез „произведението" (относно $*$) на функциите F_k, $2^n < k \leqq 2^{n+1}$, а функцията на разпределение на X_n — чрез G_k, $2^n < k \leqq 2^{n+1}$, като вземем пред вид (5), ще получим

$$P(|\overline{X}_n - m\overline{X}_n| \geqq \varepsilon) \leqq \prod_{k>2^n}^{2^{n+1}} c_k\, P(|X_n - m X_n| \geqq \varepsilon). \tag{6}$$

Като вземем пред вид, че редиците $\{S'_n\}$ и $\{X_n\}$ са едновременно усилено устойчиви и в такъв случай редът с общ член $P(|X_n - m X_n| \geqq \varepsilon)$ е сходящ, от (6) следва сходимостта и на реда $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\overline{X}_n - m\overline{X}_n| \geqq \varepsilon)$.

С това е установено казаното твърдение.

Лема 3. Нека редицата $\left\{ S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_k \right\}$, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ независими случайни величини е усилено устойчива. Ако $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ са независими помежду си и от $\{\eta_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, случайни величини, имащи функции на разпределение

$$F_k(x) = \begin{cases} \dfrac{G_k(x+m_k)}{G_k(k\varepsilon + m_k)}, & x \leqq k\varepsilon \\ 1 & x > k\varepsilon, \end{cases}$$

където $G_k(x)$ е функцията на разпределение на η_k, редицата $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right\}$ е усилено устойчива.

Действително да образуваме функцията

$$\Phi_k(x)=c_kG_k(x+m_k)-F_k(x), \text{ гдето } c_k=1/G_k(k\varepsilon+m_k).$$

От усилената устойчивост на редицата $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\right\}$ следва сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty}P(|\eta_k-m_k|\geqq\varepsilon k)$ за всяко $\varepsilon>0$. Следователно и редът с общ член $r_k=1-G_k(k\varepsilon+m_k)$ е сходящ, от което намираме, че

$$\prod_{k>2^n}^{2^{n+1}}c_k\to 1,$$

и тъй като функцията $\Phi_k(x)$ е монотонно растяща, по лема 2 следва усилената устойчивост на редицата $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right\}$.

Понеже ако $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k-\beta_n\to 0$, то и $-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k+\beta_n\to 0$ с вероятност 1, тогава според предишното и за редицата от независими случайни величини ξ_k, които имат функции на разпределение

$$F_k^*(x)=\begin{cases}\dfrac{1-G_k(-x+m_k)}{1-G_k(-k\varepsilon+m_k)}, & x\leqq k\varepsilon\\ 1 & , x>k\varepsilon,\end{cases}$$

ще имаме $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\alpha_n\to 0$ с вероятност 1. Ако приложим лема 3 по същия начин, вместо за функциите G_k, за функциите F_k^*, то ще получим следната

Теорема 2. *Ако $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ са независими случайни величини, необходимо условие, за да имаме $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k-\beta_n\to 0$ с вероятност 1, е редицата $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right\}$, където $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ са независими помежду си и от $\{\eta_k\}$ случайни величини с функции на разпределение*

$$F_k(x)=\begin{cases}0 & x\leqq -k\varepsilon\\ \dfrac{G_k(x+m_k)-G_k(-k\varepsilon+m_k)}{G_k(k\varepsilon+m_k)-G_k(-k\varepsilon+m_k)}, & -k\varepsilon<x\leqq k\varepsilon\\ 1 & x>k\varepsilon,\end{cases} \tag{7}$$

да е усилено устойчива.

Постъпила на 5 август 1962 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прохоров Ю. В., Об усиленном законе больших чисел, Изв. АН СССР, Сер. мат., **14**, 1950, 523 — 536.

НЕКОТОРЫЕ НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ УСИЛЕННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А. Обретенов

(Резюме)

Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$ независимые случайные величины и последовательность $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right\}$ усиленно устойчива, то ряд с общим членом

$$u_n = \sum_{k>2^n}^{2^{n+1}} P(\ \xi_k - m_k\ \geq \varepsilon\, 2^n), \quad m_k \text{ — медиана } \xi_k,$$

сходится.

В тех же условиях для величин $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_k \ldots$ с функциями распределения $G_k(x)$, $k = 1, 2 \ldots$, показано, что последовательность $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right\}$ усиленно устойчива, где $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k \ldots$ независимые как между собой, так и от $\{\eta_k\}$, суть случайные величины, имеющие функции распределения (7).

Превел В. Ребров

CERTAIN INDISPENSABLE CONDITIONS FOR AMPLIFIED STABILITY OF A SERIES OF RANDOM VARIABLES

A. Obretenov

(Summary)

It has been demonstrated that when $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$ are independent random variables and the sequence $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right\}$ is strongly stable, then the series with a common term

$$U_n = \sum_{k>2^n}^{2^{n+1}} P(|\xi_k - m_k| \geqq \varepsilon 2^n),$$

(m_k is the median of ξ_k) is convergent.

It has been demonstrated under the same conditions for variables $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots$ with distribution functions $G_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, that the series $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right\}$, wherein $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$ are random variables independent two by two and from $\{\eta_k\}$, with functions of distribution (7), is one of amplified stability.

Превел Г. Чакалов