БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE DES SCIENCES DE BULGARIE
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Vol.) VII

КОНЦЕНТРАЦИЯ НА НАПРЕЖЕНИЯТА ПОД РОТАЦИОНЕН ЩАМП

Ив. Димовски

В работата [1] на Н. А. Ростовцев е дадено директно решение на аксиално-симетричната контактна задача от теорията на еластичността с помощта на комплексни потенциали. Полученото решение е в сила за произволен двукратно гладък ротационен щамп. Ще покажем как трябва да се модифицира резултатът на Н. А. Ростовцев, така че да важи и за ротационен щамп, контурът на който се представя чрез непрекъсната функция $f(r)$, $0 \leqslant r \leqslant a$, съставена от краен брой двукратно гладки дъги. Ще покажем, че за всяка точка r_0, за която $f'(r_0-0) \neq f'(r_0+0)$, се получава концентрация на напреженията по окръжността $r=r_0$. За тази цел ще бъде необходимо да изложим решението на аксиално-симетричната контактна задача по метода на Н. А. Ростовцев, което ще направим по малко по-кратък начин.

Ако с $u_r(r, z)$ и $u_z(r, z)$ означим съответно радиалното и вертикалното преместване, аксиално-симетричната контактна задача се свежда до следната смесена гранична задача от теорията на еластичността за полупространството $z \geqslant 0$:

$$u_z(r, 0) = f(r) \quad \text{за} \quad 0 \leqslant r \leqslant a$$

и

$$\sigma_z(r, 0) = 0 \qquad \text{за} \quad r > a.$$

Ще използуваме известно представяне

$$u_r = (1-2\nu)\frac{\partial \chi}{\partial r} + z\frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z},$$

$$u_z = -2(1-\nu)\frac{\partial \chi}{\partial z} + z\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2},$$

където $\chi(r, z)$ е хармонична функция на x, y, z, т. е.

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = 0.$$

Имаме

$$\sigma_z = 2\mu\left(-\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + z\frac{\partial^3 \chi}{\partial z^3}\right).$$

Ако въведем обозначението

$$-2(1-\nu)\frac{\partial \chi}{\partial z} = W(r, z),$$

хармоничната функция $W(r, z)$ ще удовлетворява граничните условия

$$W(r,0)=f(r) \qquad \text{за } 0\leqslant r\leqslant a \tag{3}$$

и

$$\frac{\partial W(r,0)}{\partial z}=0 \qquad \text{за } r>a. \tag{4}$$

Тъй като функцията $1/\sqrt{r^2+z^2}$, а заедно с нея и функцията

$$\int\frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}}=\ln\left(z+\sqrt{r^2+z^2}\right)$$

е хармонична, то и функцията

$$\psi(r,z,s)=\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\ln\left[z+is+\sqrt{(z+is)^2+r^2}\right],$$

където s е произволен реален параметър, е също хармонична. Тя удовлетворява граничните условия

$$\psi(r,0,a)=1 \qquad \text{за } 0\leqslant r\leqslant a$$

и

$$\frac{\partial\psi(r,0,a)}{\partial z}=0 \qquad \text{за } r>a.$$

Функцията $W(r, z)$ търсим от вида $\int\limits_0^a\psi(r,z,s)\,g(s)\,ds$,

или

$$W(r,z)=\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\int\limits_0^a\ln\left[z+is+\sqrt{(z+is)^2+r^2}\right]g(s)\,ds.$$

От условието (3) получаваме следното интегрално уравнение:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^r\arcsin\frac{s}{r}\,g(s)\,ds+\int\limits_r^a g(s)\,ds=f(r), \qquad 0\leqslant r\leqslant a.$$

Ако диференцираме това уравнение относно r, получаваме следното интегрално уравнение от абелев тип за функцията $g(s)$:

$$\int\limits_0^r\frac{s\,g(s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\,ds=-\frac{\pi}{2}\,rf'(r).$$

Решението на последното уравнение е

$$g(s)=-\int\limits_0^s\frac{D[rf'(r)]}{\sqrt{s^2-r^2}}\,dr,$$

където с D обозначаваме обобщено диференциране относно r, т. е.

диференциране в съвкупността на обобщените функции (виж [2]), а с щрих ($'$) обозначаваме обикновеното диференциране.

Ще разгледаме случая, когато $f'(r)$ има точка на прекъсване от първи род r_0, $0 < r_0 < a$, т. е. $f'(r_0-0) \neq f'(r_0+0)$, а навсякъде другаде е двукратно гладка. Ако $\theta(r)$ е единичната функция на Хевисайд, а $\Delta = f'(r_0+0) - f'(r_0-0)$, функцията

$$\varphi(r) = f'(r) - \Delta\theta(r-r_0)$$

е непрекъсната в целия интервал $0 \leq r \leq a$.

Имаме

$$D[r\varphi(r)] = [r\varphi(r)]',$$

откъдето

$$D[rf'(r)] = [rf'(r)]' + \Delta\, r\,\delta(r-r_0),$$

където с $\delta(r)$ сме означили функцията на Дирак. Оттук получаваме

$$g(s) = -\int_0^s \frac{[rf'(r)]'}{\sqrt{s^2-r^2}}\, dr - \frac{r_0\Delta}{\sqrt{s^2-r_0^2}}\,\theta(s-r_0).$$

Функцията

$$g_2(s) = -\frac{r_0\Delta}{\sqrt{s^2-r_0^2}}\,\theta(r-r_0)$$

представлява поправката към решението на Н. А. Ростовцев в нашия случай.

Имаме

$$\sigma_z(r,z) = \sigma_z^{(1)}(r,z) + \sigma_z^{(2)}(r,z),$$

където $\sigma_z^{(1)}(r,z)$ е решението на Н. А. Ростовцев, което се получава от функцията

$$g_1(s) = -\int_0^s \frac{[rf'(r)]'}{\sqrt{s^2-r^2}}\, dr,$$

а $\sigma_z^{(2)}(r,z)$ е добавката към него, дължаща се на функцията $g_2(s)$.

Тъй като

$$\sigma_z(r,0) = \frac{\mu}{1-\nu}\,\frac{\partial W(r,0)}{\partial z} = -\frac{2\mu}{\pi(1-\nu)}\int_r^a \frac{g(s)\,ds}{\sqrt{s^2-r^2}},$$

имаме

$$\sigma_z^{(2)}(r,0) = -\frac{2\mu r_0\Delta}{\pi(1-\nu)}\int_r^a \frac{\theta(s-r_0)}{\sqrt{s^2-r^2}\sqrt{s^2-r_0^2}}\, ds =$$

$$= -\frac{2\mu r_0\Delta}{\pi(1-\nu)}\int_{\max(r,r_0)}^a \frac{ds}{\sqrt{s^2-r^2}\sqrt{s^2-r_0^2}}.$$

Непосредствено се вижда, че

$$\lim_{r\to r_0} \sigma_z^{(2)}(r,0) = +\infty \quad \text{за } \Delta < 0,$$

докато $\sigma_z^{(1)}(r, 0)$ остава ограничено при $r \to r_0$. Не е трудно да се провери, че и $\sigma_r^{(2)}(r, 0)$, и $\sigma_\varphi^{(2)}(r, 0)$ също растат неограничено, когато $r \to r_0$.

В заключение ще отбележим, че появилите се неотдавна работи на Сегедин [3] и Снедон [4] повтарят работата на Н. А. Ростовцев и също не засягат въпроса за концентрацията на напреженията под щампа.

Постъпила на 10. VIII. 1962 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ростовцев Н. А., Комплексные функции напряжений в осесимметричной контактной задаче теории упругости, ПММ, т. **17**, 1953, в. 5, 611–615.
2. Гельфанд и Шилов, Обобщенные функции, вып. I, Москва, 1959.
3. Segedin C. M., The Relation Between Load and Penetration for a Spherical Punch, Mathematica, vol. **4**, 1957, part 2, 156—161.
4. Sneddon I. N., A Note on Axially Symmetric Punch Problem, Mathematica, vol. **6**, part 2, 118–119.

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПОД РОТАЦИОННЫМ ШТАМПОМ

И. Димовски

(Резюме)

В статье уточняется метод Н. А. Ростовцева решения осесимметрической контактной задачи теории упругости для случая, когда штамп не гладкий, то есть имеет ребра в форме окружности. Показано, что под этими ребрами появляется концентрация напряжения.

Превел В. Ребров

CONCENTRATION OF STRESSES UNDER A ROTARY PUNCH

I. Dimovski

(Summary)

The article elaborates on the method devised by N. A. Rostovtsev for solving the axial-symmetric contact problem of the theory of elasticity in the case when the punch is not a smooth one, i. e. when it possesses edges in the shape of a circle. It has been demonstrated that concentration of stresses occurs under these edges.

Превел Г. Чакалов