БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE DES SCIENCES DE BULGARIE
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Vol.) VII

ВЪРХУ ПРИНЦИПА ЗА ОТДЕЛИМОСТ В АБЕЛЕВИТЕ АСОЦИАТИВНИ ПРОСТРАНСТВА

Я. Тагамлицки

§ 1. Дефиниции

Нека K е произволно множество. Ще казваме, че в K е дефинирана една изпъкналост σ, ако на всеки два негови елемента a и b е съпоставено по едно негово подмножество, което ние ще означаваме със знака ab и ще наричаме отсечка. Елементите a и b ще наричаме краища на отсечката ab.

Едно подмножество A на K ще наричаме изпъкнало, ако от $a \in A$ и $b \in A$ следва $ab \subset A$.

Нека в K са дадени две изпъкналости σ_1 и σ_2. Ще казваме, че σ_1 и σ_2 са еквивалентни, ако всяко подмножество на K, което е изпъкнало относно σ_1, е изпъкнало относно σ_2 и всяко подмножество, което е изпъкнало относно σ_2, е изпъкнало относно σ_1.

Нека A и B са две произволни подмножества на K. Под AB ще разбираме, както това често се прави, множеството от онези елементи x от K, за които е възможно да се намерят два елемента a и b (изобщо зависещи от x), които удовлетворяват условията

$$x \in ab, \quad a \in A, \quad b \in B.$$

Очевидно едно подмножество A на множеството K е изпъкнало тогава и само тогава, когато $AA \subset A$.

Нека a и b са два елемента на K. Под $\frac{a}{b}$ ще разбираме множеството на онези елементи x от K, за които $bx \ni a$. По такъв начин условията

$$bx \ni a \text{ и } x \in \frac{a}{b} \tag{1}$$

са еквивалентни. Зависимостите (1) изразяват едно правило за пренасяне на множители. Това правило е удобно.

Под $\frac{A}{B}$ ще разбираме множеството на онези елементи от K, за които могат да се намерят два елемента a и b (изобщо зависещи от x), за които са изпълнени условията

$$x \in \frac{a}{b}, \ a \in A, \quad b \in B.$$

Тук A и B означават две подмножества на K.

Твърде удобно е следното обобщение на правилото (1), върху което ни обърна внимание др. Проданов: условията[1]

(2) $$BX \cap A \neq O \text{ и } X \cap \frac{A}{B} \neq O,$$

където A, B и X са произволни подмножества на K, са еквивалентни. Ние постоянно ще се ползуваме от това правило.

Нека в множеството K е дефинирана една изпъкналост σ. Ще казваме, че K е асоциативно пространство, ако при всеки избор на a, b и c от K имаме

I. $$(ab)c = a(bc).$$

Ще казваме, че едно асоциативно пространство е абелево, ако при всеки избор на a и b от това пространство имаме

II. $$ab = ba.$$

Ще казваме, че едно абелево пространство K е двойно асоциативно ако при всеки избор на a, b и c от K имаме

III. $$a\frac{b}{c} \subset \frac{ab}{c}$$

Условието III ще наричаме втори асоциативен закон.

Нека K е едно асоциативно пространство и A е негово подмножество. Под изпъкнала обвивка на A ще разбираме сечението на всички изпъкнали подмножества на K, които съдържат A. Изпъкналата обвивка на A ще означаваме със символа (A).

Нека a и b са два елемента на едно асоциативно пространство K. Ще казваме, че елементите a и b са инцидентни, ако изпъкналите им обвивки (a) и (b) имат обща точка. За да изразим, че a и b са инцидентни, ще пишем накратко $a \sim b$. Релацията инцидентност е рефлективна и симетрична, но тя не е транзитивна в общия случай и следователно не е релация за еквивалентност. Ще казваме, че едно двойно асоциативно пространство е правилно пространство, ако в него инцидентността е транзитивна.

Нека на всеки елемент x на едно множество M съпоставим по едно подмножество $p(x)$ на едно множество N. В такъв случай ще казваме, че в M е дефинирана многозначна функция $p(x)$. Нека A е подмножество на M. Ще пишем, както това често се прави,

$$\bigcup_{x \in A} p(x) = p(A)$$

Под $p^{-1}(y)$ ще разбираме, както обикновено, множеството на онези елементи x от M, за които $p(x) \ni y$. По такъв начин двете условия

$$p(x) \ni y \text{ и } x \in p^{-1}(y)$$

[1] Символът O означава празното множество.

са еквивалентни. Полезно е още следното правило: ако A е подмножество на M и B е подмножество на N, условията

(3) $$p(A) \cap B \neq O \text{ и } A \cap p^{-1}(B) \neq O$$

са еквивалентни. Ние често ще използуваме това свойство. Правилото (3) е обобщение на правилото (2) и се редуцира на него, когато в M е дефинирана изпъкналост и $p(x) = Px$, където P е подмножество на M.

Нека K е пространство, в което е дефинирана изпъкналост σ и многозначна функция $p(x)$. Нека освен това стойностите на $p(x)$ са подмножества на някое пространство L, в което също е дефинирана някаква изпъкналост. Ще казваме, че функцията $p(x)$ е **м о н о т о н н а**, ако при всеки избор на двата елемента a и b от K имаме

$$p(ab) \subset p(a)p(b).$$

В бъдеще понякога вместо думата функция ще употребяваме думата оператор.

§ 2. Построяване на асоциативни пространства

Нека S е полугрупа. Под отсечка ab ще разбираме множеството, съставено от единствения елемент $a.b$, където $a.b$ означава произведението на a и b. По такъв начин ние получаваме една изпъкналост в S. Очевидно S е асоциативно пространство относно тази изпъкналост. Ако полугрупата S е абелева, тя е правилно пространство, т. е. освен комутативния и асоциативния закон тя удовлетворява още и втория асоциативен закон и инцидентността е транзитивна. Доказателството, разбира се, е тривиално, но ние все пак ще покажем валидността поне на втория асоциативен закон, за да илюстрираме характера на разсъжденията. Нека a, b и c са три елемента от S и нека

$$x \in a\frac{b}{c}.$$

В такъв случай $x \in au$, където $u \in \frac{b}{c}$, т. е. $cu \ni b$ или още

$$x = au, \qquad b = cu$$

и следователно $cx = ab$. Да положим $v = ab$ В такъв случай $v = cx$ и следователно $v \in cx$, откъдето

$$x \in \frac{v}{c},$$

т. е.

$$x \in \frac{ab}{c}.$$

Елементът x обаче е избран произволно в множеството $a\frac{b}{c}$ и по такъв начин получаваме окончателно

$$a\frac{b}{c} \subset \frac{ab}{c}$$

Ние ще разгледаме няколко общи конструкции, които ни позволяват, като изхождаме от някое асоциативно пространство, да построяваме нови асоциативни пространства. По такъв начин, като изхождаме от полугрупа и прилагаме тези конструкции, добиваме възможност да образуваме различни асоциативни пространства.

1. Нека в едно множество K е дефинирана функция $p(x)$, чиито стойности са подмножества на едно асоциативно пространство L с изпъкналост λ. Полагаме

$$ab = p^{-1}[p(a)p(b)], \tag{4}$$

където a и b са произволни елементи на K. Така ние получаваме в K една изпъкналост σ. Нека множеството $p(x)$ не съдържа повече от един елемент, когато x е елемент на K (но може да бъде празно) и нека множеството $p^{-1}(y)$ не е празно, когато y е елемент на L. В такъв случай изпъкналостта σ е асоциативна. Ако изпъкналостта λ е комутативна, изпъкналостта σ е комутативна. Ако изпъкналостта λ удовлетворява и втория асоциативен закон, изпъкналостта σ също удовлетворява втория асоциативен закон.

Нека функцията $p(x)$ е обратима. Това значи, че когато x_1 и x_2 са два различни елемента от K, сечението $p(x_1) \cap p(x_2)$ е празно. В такъв случай, ако инцидентността относно λ е транзитивна, инцидентността относно σ е също тъй транзитивна.

Доказателствата на всички тези твърдения са тривиални и ние ще ги изоставим.

2. Нека на всеки елемент α на едно множество A е съпоставено по едно асоциативно пространство K_α. Да означим с K множеството на всичките еднозначни функции $\varphi(\alpha)$, които са дефинирани в A и които удовлетворяват условието

$$\varphi(\alpha) \in K_\alpha$$

при всяко α от A. Нека $f = f(\alpha)$ и $g = g(\alpha)$ са две функции от K. Ще означим с fg множеството на всичките функции $\varphi = \varphi(\alpha)$ от K, които удовлетворяват условието

$$\varphi(\alpha) \in f(\alpha)g(\alpha).$$

По такъв начин получаваме в K една изпъкналост. Относно тази изпъкналост K е асоциативно пространство. Ако пространствата K_α са абелеви, пространството K е също абелево. Ако пространствата K_α удовлетворяват втория асоциативен закон, пространството K също удовлетворява втория асоциативен закон.

3. Нека K е асоциативно пространство с изпъкналост σ и Ω е една фамилия от монотонни оператори, които са дефинирани в K и чиито стойности са подмножества на K. Нека освен това Ω удовлетворява следните условия: каквито и да бъдат двата оператора p и q от Ω, нека

a) $pq \in \Omega$ (произведението на два оператора се разбира в обичайния смисъл);

b) $p^{-1} \in \Omega$;

c) $p(x) \neq O$, когато x е елемент от K.

Полагаме

$$ab = \bigcup_{p,q} p(a)\,q(b),$$

където $a \in K$ и $b \in K$ и p и q се менят по произволен начин в Ω. Така получаваме в K нова изпъкналост τ. Тази изпъкналост удовлетворява асоциативния закон. Ако изпъкналостта σ е комутативна, τ е също комутативна. Доказателствата са тривиални.

4. Нека в едно асоциативно пространство K с изпъкналост σ е дадена фамилия Ω от монотонни оператори, чиито стойности са подмножества на K. Нека в Ω е дефинирана сума на два оператора. Произведение на два оператора ще разбираме в обичайния смисъл. Нека при всеки избор на операторите p, q и r от Ω са изпълнени условията

a) $pq \in \Omega$;

b) $p^{-1} \in \Omega$;

c) $p+q \in \Omega$;

d) $p(x) \neq O$, когато x е елемент от K;

e) $p+q=q+p$;

f) $(p+q)+r=p+(q+r)$;

g) $p(q+r)=pq+pr$;

h) $(q+r)p=qp+rp$.

Полагаме

$$ab=\bigcup_{p,q} p(a)\,q(b),$$

където $a \in K$ и $b \in K$ и p и q се менят в Ω по такъв начин, че да е изпълнено условието

$$p(x)+q(x) \ni x.$$

Така получаваме в K нова изпъкналост τ. Тази изпъкналост е асоциативна. Ако σ удовлетворява комутативния закон, τ също удовлетворява комутативния закон. Доказателствата са тривиални.

Примери. Нека R е линейно пространство. То е една полугрупа относно събирането. Ние ще получим в R обичайната изпъкналост, ако към тази полугрупа приложим конструкцията 4, като наречем отсечка с краища a и b множеството от точките от вида $pa+qb$, където p и q са числа, които се менят така, че да са изпълнени условията $p>0$, $q>0$, $p+q=1$. Тук Ω е множеството от положителните числа и сумата на две такива числа се разбира в обичайния смисъл.

Друг пример ще получим, ако с ab означим множеството от точките от вида $\lambda a+\mu b$, където λ и μ са числа, които се менят произволно, като остават положителни. По такъв начин получаваме нова изпъкналост, като този път използувахме конструкцията 3.

И двете изпъкналости, които ние разгледахме, са двойно асоциативни и инцидентността относно тях е транзитивна.

§ 3. Принцип за отделимост[1]

Нека K е едно асоциативно пространство. Едно подмножество S на K ще наричаме полупространство, ако то и допълнението му $\overline{S}$ са изпъкнали, но не са празни.

Ще казваме, че в едно асоциативно пространство K е изпълнен принципът за отделимост, ако за всеки две негови изпъкнали непразни подмножества A и B, които нямат обща точка, може да се намери полупространство, което съдържа едното от тях и няма обща точка с другото.

Не е тривиален въпросът за валидността на принципа за отделимост само за пространства, които съдържат непразни изпъкнали подмножества без обща точка. В противен случай принципът за отделимост е изпълнен.

Целта на нашата работа е да се изследват условията, при които е изпълнен принципът за отделимост в абелевите асоциативни пространства.

Теорема 1. *Нека K е двойно асоциативно пространство,[2] в което при всеки избор на елементите a и b е изпълнено условието*

$$abb \subset ab.$$

В такъв случай, ако A и B са две непразни изпъкнали подмножества на K без обща точка, съществува полупространство S, което съдържа A и няма обща точка с B.

Доказателство. Съгласно лемата на Цорн измежду изпъкналите подмножества на K, които съдържат A и нямат обща точка с B, има поне едно максимално подмножество S (т. е. такова, което съвпада с всяко изпъкнало подмножество, което го съдържа и няма обща точка с B).

Да разгледаме множеството $\frac{S}{x}$, където x е произволен елемент на K. Ще покажем, че

$$\frac{S}{xx} \subset \frac{S}{x}.$$

И наистина нека

$$\xi \in \frac{S}{xx}.$$

В такъв случай

$$\xi \cap \frac{S}{xx} \neq O$$

и следователно $\xi xx \cap S \neq O$; и тъй като $\xi xx \subset \xi x$, получаваме $\xi x \cap S \neq O$ или още

[1] В този параграф ние ще извършваме множество елементарни изчисления. За да може читателят с леснина да ги проследи, нека той си уясни предварително, че условията I, II и III могат да се обобщят, като вместо a, b и c се поставят произволни подмножества на разглежданото пространство. Ние ще се ползуваме и от други елементарни правила, валидността на които читателят лесно ще съзре.

[2] Това значи, че са изпълнени комутативният и двата асоциативни закона.

(5) $$\xi \cap \frac{S}{x} \neq O.$$

От друга страна, ξ е точка и по такъв начин (5) ни дава

$$\xi \in \frac{S}{x}.$$

Елементът ξ обаче е избран произволно в $\frac{S}{xx}$ и следователно

(6) $$\frac{S}{xx} \subset \frac{S}{x}.$$

Сега лесно се вижда, че множеството $S+\frac{S}{x}$ е изпъкнало.[1] И наистина с помощта на втория асоциативен закон и (6) имаме

$$\left(S+\frac{S}{x}\right)\left(S+\frac{S}{x}\right)=SS+S\frac{S}{x}+\frac{S}{x}S+\frac{S}{x}\frac{S}{x}=SS+S\frac{S}{x}+\frac{S}{x}\frac{S}{x}\subset$$

$$\subset SS+\frac{SS}{x}+\frac{\frac{S}{x}S}{x}\subset SS+\frac{SS}{x}+\frac{\frac{SS}{x}}{x}=$$

$$=SS+\frac{SS}{x}+\frac{SS}{xx}\subset S+\frac{S}{x}+\frac{S}{xx}=S+\frac{S}{x}.$$

Да разгледаме специалния случай, когато $x\in B$. Ще покажем, че в този случай $\frac{S}{x}$ няма обща точка с B. И наистина, ако допуснем противното, ще имаме

$$\frac{S}{x}\cap B \neq O$$

и следователно $S\cap xB \neq O$, откъдето $S\cap BB\neq O$, защото $x\in B$. От друга страна, множеството B е изпъкнало и следователно $BB\subset B$. По такъв начин получаваме

$$S\cap B\neq O,$$

което не е вярно. И така множеството $\frac{S}{x}$ няма обща точка с B. Оттук се вижда, че множеството

(7) $$S+\frac{S}{x}$$

също няма обща точка с B. Множеството (7), както видяхме, е изпъкнало. Като вземем под внимание максималността на S, получаваме

$$\frac{S}{x}\subset S$$

[1] Тук множествената сума за прегледност е означена със знака $+$.

или още

$$\frac{S}{x} \cap \bar{S} = O$$

(нека припомним, че с $\bar{S}$ ние означаваме допълнението на S), откъдето

$$\frac{S}{\bar{S}} \cap x = O.$$

Елементът x обаче е избран произволно от B и следователно

$$\frac{S}{\bar{S}} \cap B = O. \tag{8}$$

Да разгледаме пак изпъкналото множество $S + \frac{S}{x}$, където $x \in \bar{S}$. От (8) следва, че това множество няма обща точка с B и по такъв начин, като използуваме максималността на S, намираме

$$\frac{S}{x} \subset S.$$

Точката x обаче е избрана произволно в $\bar{S}$, т. е.

$$\frac{S}{\bar{S}} \subset S$$

и следователно

$$\frac{S}{\bar{S}} \cap \bar{S} = O,$$

откъдето $S \cap \bar{S}\bar{S} = O$, т. е. $\bar{S}\bar{S} \subset \bar{S}$, което показва, че множеството $\bar{S}$ е изпъкнало. Множествата S и $\bar{S}$ не са празни, защото $A \subset S$ и $B \subset \bar{S}$ и следователно са полупространства. С това доказателството е завършено.

Теорема 2. *Нека K е абелево асоциативно пространство и σ е неговата изпъкналост. За да бъде валиден принципът за отделимост в K, е необходимо и достатъчно*

1) инцидентността да бъде транзитивна и

2) да съществува в K еквивалентна на σ комутативна и асоциативна изпъкналост, която да удовлетворява втория асоциативен закон.

Доказателство на необходимостта. Да допуснем, че в K е изпълнен принципът за отделимост. Нека a, b и c са три елемента на K и нека $a \sim b$ и $b \sim c$. Да допуснем, че елементите a и c не са инцидентни. Това значи, че изпъкналите множества (a) и (c) нямат обща точка и следователно могат да се отделят с полупространства. Нека S е полупространство, което съдържа (a) и няма обща точка с (c). Това полупространство не може да съдържа b, защото в противен случай щѐ съдържа и (b) и следователно (b) няма да има обща точка с (c). По същия начин се вижда, че b не може да се съдържа и в $\bar{S}$. Така ние достигнахме до исканото противоречие, с което е установена транзитивността на инцидентността.

Сега ще посочим комутативна и асоциативна изпъкналост, която е еквивалентна на σ и удовлетворява втория асоциативен закон.

Да разгледаме изпъкналостта τ, която е дефинирана с помощта на условието

$$[ab]=(a)+(a)(b)+(b),$$

където $a \in K$, $b \in K$, а $[ab]$ означава отсечката, определена от a и b. Произведението относно τ на две множества A и B ще записваме със знака $[AB]$, а частното — с $\left[\frac{A}{B}\right]$. Подобни съкращения в означенията ние ще използуваме и в бъдеще.

Не е трудно да се провери, че изпъкналостта τ е комутативна и асоциативна. Така асоциативността се вижда от лесно доказуемото равенство

$$[[ab]c]=(a)+(b)+(c)+(a)(b)+(a)(c)+(b)(c)+$$
$$+(a)(b)(c)=[a[bc]].$$

Също тъй лесно се вижда, че изпъкналостта τ е еквивалентна на σ. Найсетне ще отбележим, че при всеки избор на a и b от K множеството $[ab]$ е изпъкнало и съдържа точките a и b. Доказателството на всички тези твърдения е тривиално. Ние ще покажем, че изпъкналостта τ удовлетворява втория асоциативен закон, т. е. че при всеки избор на a, b и c от K имаме

(9) $$\left[a\left[\frac{b}{c}\right]\right] \subset \left[\frac{[ab]}{c}\right].$$

Нека

(10) $$x \in \left[a\left[\frac{b}{c}\right]\right].$$

Това значи, че съществува елемент u от K, за който

(11) $$x \in [au], \qquad u \in \left[\frac{b}{c}\right]$$

и следователно

(12) $$[cu] \ni b.$$

Да разгледаме двете непразни изпъкнали множества $[ab]$ и $[xc]$. Ще покажем, че те имат обща точка. И наистина да допуснем противното. В такъв случай съществува полупространство S, което съдържа $[ab]$ и няма обща точка с $[xc]$. Това полупространство не може да съдържа точката u, защото от (11) ще следва, че $x \in S$, което не е възможно, тъй като $x \in [xc] \subset \bar{S}$. Точката u не може обаче да принадлежи и на $\bar{S}$, защото от (12) ще следва $b \in \bar{S}$, което не е възможно, защото $b \in [ab] \subset S$. Полученото противоречие показва, че двете множества $[ab]$ и $[xc]$ имат някоя обща точка v. В такъв случай $v \in [ab]$ и $v \in [cx]$ и следователно

$$x \in \left[\frac{v}{c}\right],$$

т. е.

$$x \in \left[\frac{[ab]}{c}\right].$$

Точката x обаче е избрана произволно, стига да е изпълнено условието (10). По такъв начин ние установихме включването (9). С това необходимостта е установена.

Доказателство на достатъчността. Нека инцидентостта е транзитивна и нека съществува двойно асоциативна изпъкналост, еквивалентна на дадената. За тази изпъкналост ние запазваме означението σ, за да не пишем много нови символи.

Да разгледаме изпъкналостта τ, дефинирана с помощта на условието

$$[ab]=(a)(b), \tag{13}$$

където $a \in K$ и $b \in K$. Без всякакъв труд се вижда, че тази изпъкналост е комутативна и асоциативна. Ще покажем, че тя удовлетворява и втория асоциативен закон. Нека

$$x \in \left[a\left[\frac{b}{c}\right]\right].$$

Това значи, че съществува елемент u от K, за който са изпълнени условията

$$x \in [au], \quad u \in \left[\frac{b}{c}\right]$$

и следователно $[cu] \ni b$. Като използуваме дефиницията (13), получаваме по такъв начин

$$x \in (a)(u),$$

$$b \in (c)(u)$$

и следователно

$$x \cap (a)(u) \neq O,$$

$$b \cap (c)(u) \neq O,$$

откъдето

$$\frac{x}{(a)} \cap (u) \neq O,$$

$$\frac{b}{(c)} \cap (u) \neq O.$$

Нека

$$\xi \in \frac{x}{(a)} \cap (u),$$

$$\eta \in \frac{b}{(c)} \cap (u).$$

В такъв случай

$$(\xi) \cap (u) \neq O,$$

$$(\eta) \cap (u) \neq O,$$

т. е. $\xi \sim u$ и $\eta \sim u$. Като вземем под внимание транзитивността на инцидентността, заключаваме, че $\xi \sim \eta$, т. е.

$$(\xi) \cap (\eta) \neq O. \tag{14}$$

От друга страна,

$$\xi \in \frac{x}{(a)}, \qquad \eta \in \frac{b}{(c)}$$

и следователно

$$\xi \in \frac{(x)}{(a)}, \qquad \eta \in \frac{(b)}{(c)}.$$

Множествата $\frac{(x)}{(a)}$ и $\frac{(b)}{(c)}$ обаче са изпъкнали, както това се вижда с помощта на втория асоциативен закон. Това ни дава възможност да твърдим, че

$$(\xi) \subset \frac{(x)}{(a)}, \quad (\eta) \subset \frac{(b)}{(c)},$$

което заедно с (14) ни дава

$$\frac{(x)}{(a)} \cap \frac{(b)}{(c)} \neq O.$$

Оттук получаваме с помощта на втория асоциативен закон

$$(x)(c) \cap (b)(a) \neq O.$$

Нека v е общ елемент за двете множества $(x)(c)$ и $(b)(a)$. В такъв случай имаме

$$v \in (x)(c), \qquad v \in (b)(a),$$

т. е. $\qquad v \in [ba] \qquad$ и $\qquad v \in [xc] \qquad$ или още

$$x \in \left[\frac{v}{c}\right]$$

и следователно

$$x \in \left[\frac{[ab]}{c}\right],$$

с което е показано, че изпъкналостта τ удовлетворява втория асоциативен закон.

От друга страна, лесно се вижда, че при всеки избор на a и b от K имаме

$$[abb] \subset [ab],$$

защото $[abb]=[a[bb]]$ и $[bb]=(b)(b) \subset (b)$. По такъв начин относно τ са изпълнени всичките условия, при които е доказана нашата теорема 1. Това ни дава право да твърдим, че в K е изпълнен принципът за отделимост относно τ. Лесно се вижда обаче, че изпъкналостите τ и σ са еквивалентни. С това е установено, че в K е изпълнен принципът за отделимост и относно σ (а следователно и относно всяка изпъкналост, която е еквивалентна на σ). С това доказателството е завършено.

Пример 1. Във всяка абелева полугрупа е валиден принципът за отделимост, защото в нея инцидентността е транзитивна и е изпълнен вторият асоциативен закон. По такъв начин, ако в една абелева полугрупа има две подполугрупи A и B без обща точка, то съществува подполугрупа S, която съдържа A, няма общи точки с B и чието допълнение е пак подполугрупа.

Пример 2. Теоремата на Какутани за отделимост на изпъкналите множества в линейните пространства е следствие от теорема 2, защото относно обичайната изпъкналост в линейните пространства инцидентността е транзитивна и е изпълнен вторият асоциативен закон.

§ 4. Топологични свойства на изпъкналите множества и на полупространствата

Нека в едно абелево асоциативно пространство K е дадена топология T.

Теорема 3. *Нека при всеки избор на отвореното множество G и на елемента x от K частното $\frac{G}{x}$ е отворено. Нека A е изпъкнало подмножество на K. В такъв случай затворената обвивка на A е изпъкнала.*

Доказателство. Означаваме съответно с V вътрешността, с W външността и с H контура на A. В такъв случай

$$\frac{W}{A} \subset \bar{A}. \tag{15}$$

Наистина, ако допуснем противното, ще имаме

$$\frac{W}{A} \cap A \neq O$$

и следователно $W \cap AA \neq O$ и тъй като $AA \subset A$, ще имаме $W \cap A \neq O$, което не е възможно. И тъй (15) е установено. От друга страна, множеството $\frac{W}{A}$ е отворено, защото е сума на отворени множества. По такъв начин намираме

$$\frac{W}{A} \subset W, \tag{16}$$

откъдето получаваме последователно

$$\frac{W}{A} \cap H + V = O,$$

$$W \cap A(H+V) = O,$$

$$\frac{W}{H+V} \cap A = O,$$

$$\frac{W}{H+V} \subset \bar{A}.$$

От друга страна, множеството $\frac{W}{H+V}$ е отворено и следователно

$$\frac{W}{H+V} \subset W,$$

$$\frac{W}{H+V} \cap H+V=O,$$

$$W \cap (H+V)(H+V)=O,$$

$$(H+V)(H+V) \subset H+V.$$

По такъв начин ние установихме изпъкналостта на множеството $H+V$. Това множество обаче е затворената обвивка на A. С това доказателството е завършено.

Следствие. Ако при всеки избор на отвореното множество G и на елемента x от K частното $\frac{G}{x}$ е отворено, контурът на всяко полупространство S е изпъкнал, защото е сечение на затворените обвивки на S и $\overline{S}$.

Теорема 4. *Ако в едно топологично абелево асоциативно пространство K при всеки избор на отвореното множество G и при всеки избор на елемента x от K множествата $\frac{G}{x}$ и Gx са отворени, вътрешността на всяко полупространство S е или празна, или полупространство.*

Доказателство. Нека W е вътрешността на S. Съгласно теорема 3 множеството $\ddot{W}$ е изпъкнало, защото е затворена обвивка на изпъкналото множество $\overline{S}$. Остава да покажем, че множеството W е изпъкнало. Това обаче е очевидно, защото

$$WW \subset SS \subset S$$

и множеството WW е отворено (като сума на отворени множества). По такъв начин $WW \subset W$, с което доказателството е завършено.

Теорема 5. *Нека в едно топологично двойно асоциативно пространство K, в което инцидентността е транзитивна, при всеки избор на отвореното множество G и при всеки избор на елемента x от K множествата Gx и $\frac{G}{x}$ са отворени. Нека A и B са две непразни изпъкнали множества, от които A е отворено* и $A \cap B = O$, *В такъв случай съществува отворено полупространство S, което съдържа A и няма общи точки с B.*

Доказателство. Нека S_1 е полупространство, което съдържа A и няма общи точки с B. Такова полупространство съществува съгласно теорема 2. В такъв случай вътрешността на S_1 е отворено полупространство, което съдържа A и няма общи точки с B.

Постъпила на 28. XI. 1962 г.

ОБ УСЛОВИЯХ ОТДЕЛИМОСТИ В АБЕЛЕВЫХ АССОЦИАТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Я. Тагамлицкий

(*Резюме*)

Обозначим через K некоторое множество. Функцию σ, определенную в $K \times K$, значениями которой являются подмножества K, будем называть выпуклостью пространства K. Если a, b пара элементов из K, то соответствующее значение σ будем обозначать через ab и будем называть отрезком. Если A и B два подмножества K, будем писать

$$AB = \bigcup_{\substack{x \in A \\ y \in B}} xy.$$

Назовем K ассоциативным абелевым пространством, если выполнены следующие условия:

$$\text{I.} \qquad (ab)\,c = a\,(bc)$$

и

$$\text{II.} \qquad ab = ba$$

Подмножество A пространства K будем называть выпуклым, если из $a \in K$, $b \in K$ следует $ab \subset K$. Две выпуклости пространства K будем называть эквивалентными, если они определяют одни и те же выпуклые подмножества. Две точки a и b из K будем называть инцидентными, если пересечение их выпуклых оболочек не пусто. Инцидентность является симметричным и рефлективным соотношением. В общем случае она не транзитивна.

Подмножество A цространства K будем называть полупространством если оба множества A и $\bar{A}$ выпуклы и не пусты.

Будем говорить, что в K выполнен принцип отделимости, если для любых его непустых, выпуклых и непересекающихся подмножеств A и B существует полупространство, содержащее A и не имеющее общих точек с B.

Теорема. *В абелевом ассоциативном пространстве K принцип отделимости выполнен тогда и только тогда, когда инцидентность твaнзитивна и существует выпуклость, эквивалентная выпуклости пространства K, для которой выполнено условие III из § 1.*

Приложение. Принцип отделимости выполнен в линейных пространствах (теорема Какутани) и в абелевых полугруппах.

ÜBER DIE TRENNBARKEITSBEDINGUNGEN IN DEN ABELSCHEN ASSOZIATIVEN RÄUMEN

J. Tagamlitzki

(*Zusammenfassung*)

Es sei K eine beliebige Menge. Eine in $K \times K$ definierte Funktion σ deren Werte Untermengen von K sind, heisst eine Konvexität von K. Sind a und b zwei Elemente von K, so wird der entsprechende Wert von σ als Strecke ab bezeichnet. Sind A und B zwei Untermengen von K, so wird

$$AB = \bigcup_{\substack{x \in A \\ y \in B}} xy$$

gesetzt.

Die Menge K wird assoziativ und abelsch genannt falls die Bedingungen

$$\text{I.} \qquad (ab)\,c = a\,(bc).$$

und

$$\text{II.} \qquad ab = ba$$

erfüllt sind.

Eine Untermenge A von K heisst konvex, wenn aus $a \in A$, $b \in A$ stets $ab \subset A$ folgt. Zwei Konvexitäten von K werden equivalent genannt, falls sie die gleichen konvexen Untermengen erzeugen. Zwei Punkte a und b von K heissen inzident, wenn der Durchschnitt der konvexen Hüllen von a und b nicht leer ist. Die Inzidenz ist eine symmetrische und reflexive Relation. Im allgemeinen ist sie aber nicht transitiv.

Eine Untermenge A von K wird als Halbraum bezeichnet, wenn die beiden Mengen A und $\bar{A}$ konvex und nicht leer sind.

Wir sagen, dass in K das Abtrennungsprinzip erfüllt ist, wenn es zu je zwei punktfremden nicht leeren konvexen Mengen A und B einen A enthaltenden und zu B fremden Halbraum gibt.

Satz. *Ist K abelsch und assoziativ, so gilt das Abtrennungsprinzip dann und nur dann, wenn die Inzidenz transitiv ist, und wenn es zu der Konvexität von K eine äquivalente Konvexität gibt, die der Bedingung III von § 1 genügt.*

Anwendungen. Das Abtrennungsprinzip gilt in den linearen Räumen (der Satz von Kakutani) und in den abelschen Halbgruppen.

Übersetzung des Verfassers