БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Vol.) VIII

КЪМ ТЕОРИЯТА НА ВЕКТОРНОТО ПОЛЕ

Грозьо Станилов

С настоящата работа правим някои обобщения в теорията на векторното поле. В резултат на това, от една страна, даваме нови геометрични тълкувания на основните инварианти в теорията на това поле, а, от друга страна, получаваме нови инварианти. Това постигаме, като при дефинирането на понятията нормална кривина, геодезична торзия и други разглеждаме произволни направления на векторното поле, а не само ортогонални на вектора $\mathbf{l}_3$ на полето.

1. **Нормална кривина.** Нормална кривина ν в точка $\mathbf{M}$ на векторното поле $(\mathbf{l}_3)$ по направление $d\mathbf{M}(w_0^1,\ w_0^2,\ w_0^3)$ наричаме отношението на инвариантните диференциални форми

$$\mathrm{III}=d\mathbf{M}\,.\,d\mathbf{l}_3=qw_0^1-pw_0^2,$$

$$\mathrm{I}=(d\mathbf{M})^2\ =(w_0^1)^2+(w_0^2)^2+(w_0^3)^2.$$

Като вземем пред вид, че $p=p_i w_0^i$, $q=q_i w_0^i$, $i=1,\ 2,\ 3$, за нормалната кривина ν имаме израза

$$\nu=\frac{q_1(w_0^1)^2+(q_2-q_1)\,w_0^1w_0^2-p_2(w_0^2)^2+q_3w_0^1w_0^3-p_3w_0^2w_0^3}{(w_0^1)^2+(w_0^2)^2+(w_0^3)^2}. \tag{1}$$

Ако специално се интересуваме от ортогонални на $\mathbf{l}_3$ направления, то $w_0^3=0$ и дефинираната сега нормална кривина съвпада до знак с дадената от Бюшгенс в [2].

Търсим екстремалните стойности на нормалната кривина. Ще ги наричаме *главни нормални кривини* или само *главни кривини*, а съответните направления — *главни направления* на нормалната кривина. От равенство (1) с диференциране по w_0^i и вземайки пред вид, че $\dfrac{\partial\nu}{\partial w_0^i}=0$, получаваме системата

$$\begin{aligned}(2q_1-2\nu)\,w_0^1+(q_2-p_1)\,w_0^2+q_3w_0^3&=0,\\ (q_2-p_1)\,w_0^1+(-2p_2-2\nu)\,w_0^2-p_3w_0^3&=0,\\ q_3w_0^1-p_3w_0^2-2\nu w_0^3&=0,\end{aligned} \tag{2}$$

която има решение само тогава, когато ν е корен на характеристичното уравнение

$$
(3) \qquad \begin{vmatrix} 2q_1-2\nu & q_2-p_1 & q_3 \\ q_2-p_1 & -2p_2-2\nu & -p_3 \\ q_3 & p_3 & 2\nu \end{vmatrix} = 0.
$$

Развиваме детерминантата и получаваме кубичното уравнение

$$
(3') \qquad -\nu^3+\nu^2(q_1-p_2)-\nu\left[p_1q_2-p_2q_1-\frac{p_3^2+q_3^2+(p_1+q_2)^2}{4}\right]
$$

$$
+\frac{p_3q_3(p_1-q_2)+p_2q_3^2-q_1p_3^2}{4}=0
$$

за определяне на главните нормални кривини ν_1, ν_2, ν_3. Симетричните функции

$$
(4) \qquad \begin{aligned} S' &= 2H=\nu_1+\nu_2+\nu_3=q_2-p_2, \\ S'' &= K_g=\nu_1\nu_2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1=p_1q_2-p_2q_1-\frac{p_3^2+q_3^2+(p_1+q_2)^2}{4} \\ S''' &= \nu_1\nu_2\nu_3=\frac{p_2q_3^2-q_1p_3^2+p_3q_3(p_1-q_2)}{4} \end{aligned}
$$

се изразяват чрез основните инварианти i_s, $s=1,\ldots,6$ по следния начин:

$$
\begin{aligned} S' &= 2H=-i_2, \\ S'' &= K_g=i_3-\frac{i_4+i_1^2}{4}, \\ S''' &= \frac{i_6}{4} \end{aligned}
$$

Величината H наричаме **с р е д н а к р и в и н а** в точката **M** от векторното поле $(\mathbf{l}_3)$, K_g — **г а у с о в а к р и в и н а**, а S''' — **т р е т а к р и в и н а** на полето.

На всеки корен ν_1, ν_2, ν_3 на характеристичното уравнение (3) отговаря главно направление $d\mathbf{M}(w_0^1, w_0^2, w_0^3)$, което може да се получи, като се реши системата (2) за съответния корен. Можем да произнесем следните резултати.

Във всяка точка M на векторното поле $(\mathbf{l}_3)$ съществуват три реални главни кривини ν_1, ν_2, ν_3, на които отговарят три реални главни направления на нормалната кривина. Ако трите корена ν_1, ν_2, ν_3 на характеристичното уравнение са различни, имаме тройка взаимно ортогонални главни направления. Ако двата корена са равни, а третият ν_3 е различен от тях, на него отговаря точно едно главно направление $d\mathbf{M}_3$, а на двукратния корен $\nu_1=\nu_2$ отговарят безбройно много главни направления, именно всички онези направления, които са ортогонални на направлението $d\mathbf{M}_3$. Ако трите корена са равни, всяко направление е главно. Забележително е, че за всяка точка M от векторното поле $(\mathbf{l}_3)$ винаги могат да се намерят

тройка ортогонални реални главни направления на нормалната кривина.

Сега сме в състояние да дадем някои геометрични тълкувания. Най-напред е в сила следната теорема:

Необходимото и достатъчно условие векторът на полето $\mathbf{l}_3$ да бъде по главно направление е $i_4=0$, т. е. $p_3=q_3=0$, при предположение, че характеристичното уравнение (3) няма двукратен корен, равен на нула.

Действително нека $\mathbf{l}_3$ е по главно направление. Тогава системата от значения $w_0^1=w_0^2=0$, $w_0^3\neq 0$ удовлетворява (2), откъдето получаваме $p_3=q_3=0$, или $i_4=0$. Сега $\nu_3=0$ е корен на характеристичното уравнение (3).

Обратно, нека $i_4=0$, което в реалния случай означава $p_3=q_3=0$. Сега характеристичното уравнение има корен $\nu_3=0$, за който система (2) добива вида

$$2q_1w_0^1+(q_2-p_1)\,w_0^2=0,$$

$$(q_2-p_1)\,w_0^1-2p_2\,w_0^2=0.$$

Детерминантата на тази система е $\Delta = 4K_g = \nu_1\nu_2\neq 0$, тъй като по предположение нямаме двукратен корен нула. Тогава последната система има решение $w_0^1=w_0^2=0$, което означава, че $\mathbf{l}_3$ е по главно направление.

От (4) имаме следните геометрични тълкувания на основните инвариантни величини чрез главните кривини:

$$i_2=-(\nu_1+\nu_2+\nu_3),\qquad i_3=4\nu_1\nu_2\nu_3. \tag{5}$$

Търсим ли екстремалните значения на нормалната кривина измежду онези направления $d\mathbf{M}$, за които

а) $d\mathbf{M}\perp\mathbf{l}_1$, получаваме $2H_1=-p_2$, $\quad K_{g_1}=-\frac{1}{4}p_3^2$,

б) $d\mathbf{M}\perp\mathbf{l}_2$, получаваме $2H_2=\ \ q_1$, $\quad K_{g_2}=-\frac{1}{4}q_3^2$,

в) $d\mathbf{M}\perp\mathbf{l}_3$, получаваме $2H_3=q_1-p_2$, $\quad K_{g_3}=p_1q_2-p_2q_1-\frac{1}{4}(p_1+q_2)^2$.

Сравняването на резултатите от тези частни случаи с резултатите от общия случай ни довежда до следните връзки:

$$H_1+H_2=H_3=H,\qquad K_{g_1}+K_{g_2}+K_{g_3}=K_g. \tag{6}$$

2. Геодезична торзия. Геодезична торзия λ в точка $\mathbf{M}$ от векторното поле $(\mathbf{l}_3)$ по направление $d\mathbf{M}(w_0^1,\ w_0^2,\ w_0^3)$ наричаме отношението на инвариантните диференциални форми II и I, т. е.

$$\lambda=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}, \tag{7}$$

където
$$\mathrm{II} = (d\mathbf{M},\ \mathbf{l}_3,\ d\mathbf{l}_3) = p w_0^1 + q w_0^2 .$$

Най-напред ще покажем, че тази величина λ при $w_0^3 = 0$ или, когато се разглеждат ортогонални на $\mathbf{l}_3$ направления, съвпада с геодезичната торзия, дефинирана от А. Матеев в [1].

Действително, ако сме избрали $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$ по главни направления на нормалната кривина, както в [1], имаме $p_1 = q_2 = \frac{1}{2} i_1$. Полагаме $1 : R_1 = -q_1$, $1 : R_2 = p_2$. Тогава за λ имаме представяне

$$\lambda = \frac{(p_1 w_0^1 + p_2 w_0^2)\, w_0^1 + (q_1 w_0^1 + q_2 w_0^2) w_0^2}{(d\mathbf{M})^2} = w_0^1 w_0^2 \frac{p_2 + q_1}{(ds)^2} + q_2 \frac{(w_0^1)^2 + (w_0^2)^2}{(ds)^2}$$
$$= \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \sin\theta \cos\theta + \frac{1}{2} i_1 ,$$

от което се вижда, че тя съвпада с дефинираната геодезична торзия (43) в [1].

Търсенето на екстремалните значения на λ води до кубичното уравнение

$$\lambda^3 + \lambda^2 (p_1 + q_2) + \lambda \left[p_2 q_1 - p_1 q_2 + \frac{p_3^2 + q_3^2 + (p_2 - q_1)^2}{4} \right] \tag{8}$$
$$+ \frac{p_3 q_3 (p_2 + q_1) - p_1 q_3^2 - q_2 p_3^2}{4} = 0.$$

Сега за симетричните функции на корените λ_1, λ_2, λ_3 имаме

$$\begin{aligned} \overset{*}{S}' &= 2\overset{*}{H} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = p_1 + q_2 , \\ \overset{*}{S}'' &= K_g = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = p_1 q_2 - p_2 q_1 - \frac{p_3^2 + q_3^2 + (p_2 - q_1)^2}{4} \\ \overset{*}{S}''' &= -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{p_3 q_3 (p_2 + q_1) - p_1 q_3^2 - q_2 p_3^2}{4} . \end{aligned} \tag{9}$$

Тогава за основните инварианти i_1, i_5 имаме следните геометрични тълкувания чрез екстремалните стойности на геодезичната торзия:

$$\begin{aligned} i_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 , \\ i_5 &= -4\lambda_1\lambda_2\lambda_3 . \end{aligned} \tag{10}$$

Могат да се кажат и неща, аналогични на казаните за главните направления на нормалната кривина в предната точка, тъй като и тук уравнението за λ е едно характеристично уравнение.

3. В произволна точка $\mathbf{M}$ от векторното поле ($\mathbf{l}_3$) по направление $d\mathbf{M}$ дефинираме величината μ с помощта на следното равенство:

$$\mu = \frac{\mathrm{III}}{\mathrm{II}} . \tag{11}$$

Тази чисто формална дефиниция ни довежда до нови инвариантни изрази. За екстремалните стойности на тази величина получаваме кубичното уравнение

$$(\mu i_5+i_6)(\mu^2+1)=0, \tag{12}$$

а съответните направления се дават от системата

$$\begin{aligned}
&[2\mu p_1-2q_1]\,w_0^1+[\mu(p_2+q_1)+p_1-q_2]\,w_0^2+[\mu p_3-q_3]\,w_0^3=0,\\
&[\mu(p_2+q_1)+p_1-q_2]\,w_0^1+[2\mu q_2+2p_2]\,w_0^2+[\mu q_3+p_3]\,w_0^3=0,\\
&[\mu p_3-q_3]\,w_0^1+[\mu q_3+p_3]\,w_0^2=0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Противно на първите два случая заключаваме, че имаме само една реална екстремална стойност за μ и тя е

$$\mu=-\frac{i_6}{i_5}, \tag{14}$$

а другите две са комплексно-спрегнати $\mu=\pm i$. Съответно на това имаме едно реално главно направление за $\mu=-\frac{i_6}{i_5}$, а другите две са комплексно-спрегнати направления. Те са $U_1(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$, $U_2(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$, като сме означили $w_0^1=\alpha$, $w_0^2=\beta$, $w_0^3=\gamma$. Третото уравнение на система (13) за $\mu=\pm i$ дава

$$\begin{aligned}
&(p_3\alpha_1+q_3\beta_1)\,i=q_3\alpha_1-p_3\beta_1,\\
-&(p_3\alpha_2+q_3\beta_2)\,i=q_3\alpha_2-p_3\beta_2.
\end{aligned} \tag{15}$$

Това означава, че точките U_1 и U_2 лежат съответно на равнините с уравнения

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1:&\quad (p_3\alpha+q_3\beta)\,i=q_3\alpha-p_3\beta,\\
\varepsilon_2:&-(p_3\alpha+q_3\beta)\,i=q_3\alpha-p_3\beta
\end{aligned}$$

в текущи координати α, β, γ. Умножим ли уравнения (15), получаваме резултата: точките U_1 и U_2 лежат върху повърхнината от втора степен с уравнение

$$(p_3^2-q_3^2)\,\alpha^2+4p_3q_3\,\alpha\beta+(q_3^2-p_3^2)\,\beta^2=0. \tag{16}$$

Тя се изражда, разбира се, на равнините ε_1, ε_2 и има единствена ненулева инварианта, която е до знак квадратът на инвариантата $i_4=p_3^2+q_3^2$. Ако $i_4=0$, може да се покаже, че равнините ε_1 и ε_2 са изотропни.

Аналогично от първото уравнение на система (13) за $\mu=\pm i$ получаваме точките U_1, U_2 на повърхнината с уравнение

$$\begin{aligned}
&4(p_1^2-q_1^2)\,\alpha^2+[(p_2+q_1)^2-(q_2-p_1)^2]\,\beta^2+(p_3^2-q_3^2)\,\gamma^2+4(p_1p_3-q_1q_3)\,\alpha\gamma\\
&+4[p_1(p_2+q_1)-q_1(q_2-p_1)]\,\alpha\beta+2[p_3(p_2+q_1)-q_3(q_2-p_1)]\,\beta\gamma=0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Тази повърхнина се изражда на две комплексно-спрегнати равнини и има инварианти

$$i_7=4(p_1^2-q_1^2)+(p_2+q_1)^2-(q_2-p_1)^2+p_3^2-q_3^2,$$

$$
\begin{aligned}
(18)\quad i_8 = 4(p_1^2-q_1^2)[(p_2+q_1)^2-(q_2-p_1)^2]-4[p_1(p_2+q_1)-q_1(q_2-p_1)]^2 \\
+4(p_1^2-q_1^2)(p_3^2-q_3^2)+(p_3^2-q_3^2)[(p_2+q_1)^2-(q_2-p_1)^2] \\
-[p_3(p_2+q_1)-q_3(q_2-p_1)]^2-4(p_1p_3-q_1q_3)^2,
\end{aligned}
$$

които са също така и инварианти на векторното поле.

По същия начин от второто уравнение на (13) може да бъде получена повърхнината с уравнение

$$
\begin{aligned}
(19)\quad [(p_2+q_1)^2-(q_2-p_1)^2]\alpha^2+4(q_2^2-p_2^2)\beta^2+(q_3^2-p_3^2)\gamma^2+4(q_2q_3-p_2p_3)\beta\gamma \\
+4[q_2(p_2+q_1)+p_2(q_2-p_1)]\alpha\beta+2[q_3(p_2+q_1)+p_3(q_2-p_1)]\alpha\gamma=0
\end{aligned}
$$

и новите инварианти на векторното поле

$$
(20)\quad i_9=(p_2+q_1)^2-(q_2-p_1)^2+4(q_2^2-p_2^2)+q_3^2-p_3^2,
$$

$$
\begin{aligned}
i_{10}=4(q_2^2-p_2^2)[(p_2+q_1)^2-(q_2-p_1)^2]-4[q_2(p_2+q_1)+p_2(q_2-p_1)]^2 \\
(20)\quad +4(q_2^2-p_2^2)(q_3^2-p_3^2)+(q_3^2-p_3^2)[(p_2+q_1)^2-(q_2-p_1)^2] \\
-[q_3(p_2+q_1)+p_3(q_2-p_1)]^2-4(p_2p_3-q_2q_3)^2.
\end{aligned}
$$

Получените нови инварианти не са независими от основните инварианти на векторното поле i_s, $s=1,\dots,6$. От първите уравнения на (18) и (20) получаваме следната връзка:

$$
(21)\quad i_7+i_9=2(i_1^2-i_2^2).
$$

Постъпила на 17. I. 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матеев А., Геометрия векторного поля в пространстве Кэли, Вестн. Моск. унив., **3**, 1960, 3—13.
2. Бюшгенс С. С., Геометрия векторного поля, Изв. АН СССР, **10**, 1, 1946, 73—96.

К ТЕОРИИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Гр. Станилов

(Резюме)

Пусть дано некоторое векторное поле $(\mathbf{M}, \mathbf{l}_3)$. Квадратичные формы $\mathrm{I}=(d\mathbf{M})^2$, $\mathrm{II}=(d\mathbf{M}, \mathbf{l}_3, d\mathbf{l}_3)$, $\mathrm{III}=d\mathbf{M}\, d\mathbf{l}_3$ имеют инвариантный характер. Для произвольных направлений $d\mathbf{M}(w_0^1, w_0^2, w_0^3)$ определяем следующие величины:

1. Отношение $\nu=\mathrm{III}:\mathrm{I}$ называем нормальной кривизной поля $(\mathbf{l}_3)$ в точке $\mathbf{M}$ по направлению $d\mathbf{M}$. Экстремальные значения ν называем главными нормальными кривизнами. Симметрические функции корней (3′) даны формулой (4). Величину H называем средней кривизной, K_g — кри-

визной Гаусса, S''' — третьей кривизной поля. В любой точке **M** существуют три вещественные ортогональные главные напрвления нормальной кривизны.

2. Отношение $\lambda = \mathrm{II}:\mathrm{I}$ называем геодезическим кручением в точке **M** поля ($\mathbf{l}_3$) по направлению $d\mathbf{M}$. Это определение представляет собой обобщение определения, предложенного А. Матеевым [1].

3. Для экстремальных значений величины $\mu = \mathrm{III}:\mathrm{II}$ получаем кубическое уравнение (12), обладающее всего лишь одним вещественным корнем $\mu = -i_6 : i_5$. Используя другие два корня $\pm i$ образуем новые инварианты i_7, i_8 при помощи (18) и i_9, i_{10} (20); при этом имеет место зависимость (21).

Даем геометрическое толкование (5) и (8) инвариантов i_1, i_2 и i_5, i_6 векторного поля.

ZUR THEORIE DES VEKTORFELDES

G. Stanilov

(Zusammenfassung)

Es sei ein Vektorfeld ($\mathbf{M}$, $\mathbf{l}_3$) gegeben. Die Quadratformen $\mathrm{I} = (d\mathbf{M})^2$, $\mathrm{II} = (d\mathbf{M}, \mathbf{l}_3, d\mathbf{l}_3)$, $\mathrm{III} = d\mathbf{M}\, d\mathbf{l}_3$ haben invarianten Charakter. Wir definieren folgende Größen für beliebige Richtungen $d\mathbf{M}(w_0^1, w_0^2, w_0^3)$.

1. Den Quotienten $\nu = \mathrm{III}:\mathrm{I}$ nennen wir Normalkrümmung im Punkte **M** des Feldes ($\mathbf{l}_3$) in der Richtung $d\mathbf{M}$. Die Extremwerte von ν nennen wir Hauptnormalkrümmungen. Die symmetrischen Funktionen der Wurzeln von (3′) werden durch (4) gegeben. Die Größe H nennen wir mittlere Krümmung, K_g — Gaußsche Krümmung und S''' — dritte Krümmung des Feldes. In jedem Punkt **M** existieren drei reelle orthogonale Hauptrichtungen der Normalkrümmung.

2. Den Quotienten $\lambda = \mathrm{II}:\mathrm{I}$ nennen wir geodätische Torsion im Punkte **M** des Feldes ($\mathbf{l}_3$) in der Richtung $d\mathbf{M}$. Diese Definition verallgemeinert die von Mateev in [1] gegebene Definition.

3. Für die Extremwerte der Größe $\mu = \mathrm{III}:\mathrm{II}$ erhält man die kubische Gleichung (12). Jetzt haben wir nur eine reelle Wurzel $\mu = -i_6 : i_5$. Mit Hilfe der anderen beiden Wurzeln $\pm i$ führen wir die neuen Invarianten i_7, i_8 durch (18) und i_9, i_{10} durch (20) ein. Es besteht die Beziehung (21).

Es werden die Invarianten i_1, i_2, i_5, i_6 des Feldes geometrisch gedeutet (5) und (8).