БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Vol.) VIII

ВЪРХУ ГРАВИТАЦИОННИЯ ПОТЕНЦИАЛ НА ХОМОГЕННИ МНОГОЪГЪЛНИЦИ

Петър Бърнев

Известно е ([1], стр. 111), че ако е зададен хомогенен елипсоид, то определеното от него семейство конфокални елипсоиди притежава същия външен гравитационен потенциал. Граничният член на това семейство, който се получава, когато обемът клони към нула, представлява прост слой с променлива плътност, разположен върху елипса. Този прост слой е гравиметрично еквивалентен на зададения елипсоид и представлява негова важна характеристика.

Аналогичен въпрос може да се постави за други тела. По-точно задачата може да се формулира така: дадено е тяло T с плътност σ. Търси се прост слой със следните две свойства:

а) в точките извън тялото гравитационният потенциал на простия слой съвпада с външния гравитационен потенциал на тялото;

б) съвкупността от всички точки на пространството с изключение на точките, принадлежащи на простия слой, е свързана.

Такъв прост слой ще наричаме е к в и в а л е н т н а г р а в и м е т р и ч н а п л о ч а на даденото тяло или накратко ЕГП на тялото. Очевидно ЕГП е изцяло в тялото и нейният потенциал в точките, лежащи във вътрешността на тялото, се явява аналитично продължение на външния гравитационен потенциал на тялото.

Същата задача може да се постави за равнинни пластинки с логаритмичен потенциал:

$$U_0(x, y)=\iint_T \sigma(\xi, \eta) \ln \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\, d\xi\, d\eta. \tag{1}$$

Например ЕГП на хомогенен квадрат е посочена в [2].

В настоящата работа се определя ЕГП на произволен хомогенен многоъгълник и се доказва, че тя е единствена.

1. Външен гравитационен потенциал на хомогенен многоъгълник

Ще считаме, че даденият многоъгълник K лежи в равнината Oxy и че върховете му A_k, $k=1, 2, \ldots, n$, номерирани последователно, имат координати (x_k, y_k). За удобство точките в равнината понякога ще разглеждаме и като комплексни числа, т. е. ще означаваме със $z=x+iy$ точката (x, y) и със $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, върховете (x_k, y_k) на многоъгълника. Очевидно външният гравитационен потенциал (1) на многоъгълника K може да се запише във вида

$$U(x, y) = \operatorname{Re}\left\{\sigma \iint_K \ln(z - \xi - i\eta)\, d\xi\, d\eta\right\}. \tag{2}$$

Като извършим интегрирането, след някои прости преобразувания получаваме *

$$U(x, y) = \operatorname{Re}\left\{\sum_{k=1}^{n} C_k (z - z_k)^2 \left[\ln(z - z_k) - \frac{3}{2}\right]\right\}, \tag{3}$$

където коефициентите C_k зависят от ъглите на многоъгълника, плътността му и ориентацията на координатната система. Те се определят с някои от следните еквивалентни изрази:

$$C_k = \frac{i\sigma}{2}\left(\cos\varphi_{k-1,k}\, e^{-i\varphi_{k-1,k}} - \cos\varphi_{k,k+1}\, e^{-i\varphi_{k,k+1}}\right), \tag{4}$$

$$C_k = \frac{i\sigma}{4}\left(e^{-2i\varphi_{k-1,k}} - e^{-2i\varphi_{k,k+1}}\right), \tag{4'}$$

$$C_k = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha_k\, e^{-i\beta_k} \tag{4''}$$

Тук $\varphi_{k,k+1}$ означава ъгъла между оста Ox и страната $z_k z_{k+1}$ $(\varphi_{n,n+1} = \varphi_{n,1}$, $\varphi_{0,1} = \varphi_{n,1})$, $2\alpha_k$ е вътрешният ъгъл на многоъгълника при върха z_k и β_k е ъгълът между оста Ox и ъглополовящата на вътрешния ъгъл на многоъгълника при върха z_k.

2. Свойства на коефициентите C_k

Ще ни бъдат необходими следните свойства на коефициентите C_k: (p и q означават естествени числа, такива, че $1 \leq p \leq q \leq n$.)

а. От (4″) следва

$$C_k \neq 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{5}$$

б. Като се използува (4′), може непосредствено да се провери следното свойство:

$$\sum_{k=p}^{q} C_k = \frac{i\sigma}{4}\left(e^{-2i\varphi_{p-1,p}} - e^{-2i\varphi_{q,q+1}}\right) = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha_{pq}\, e^{-2i\beta_{pq}}, \tag{6}$$

---

* Функцията $U(x, y)$ е многозначна, но един неин клон съвпада с $U_0(x, y)$. Този въпрос е разгледан в т. 4.

където $2\alpha_{pq}$ е ъгълът между страните $z_{p-1}z_p$ и $z_q z_{q+1}$, а β_{pq} — ъгълът между оста Ox и ъглополовящата на страните $z_{p-1}z_p$ и $z_q z_{q+1}$. Специално

$$(6') \qquad \sum_{k=1}^{n} C_k = 0.$$

в. Като положим $z_{k+1}-z_k=\varrho_{k,\,k+1}\,e^{i\varphi_{k,\,k+1}}$ и използуваме (4), получаваме

$$\sum_{k=p}^{q} C_k z_k = \frac{i\sigma}{2}\left\{\sum_{k=p}^{q-1}\cos\varphi_{k,\,k+1}\,e^{-i\varphi_{k,\,k+1}}(z_{k+1}-z_k)+z_p\cos\varphi_{p-1,\,p}\,e^{-i\varphi_{p-1,\,p}}\right.$$

$$\left.-z_p\cos\varphi_{q,\,q+1}\,e^{-i\varphi_{q,\,q+1}}\right\}=\frac{i\sigma}{2}\left\{\sum_{k=p}^{q-1}\cos\varphi_{k,\,k+1}\,\varrho_{k,\,k+1}\right.$$

$$\left.+z_p\cos\varphi_{p-1,\,p}\,e^{-i\varphi_{p-1,\,p}}-z_q\cos\varphi_{q,\,q+1}\,e^{-i\varphi_{q,\,q+1}}\right\}.$$

Но

$$\cos\varphi_{k,\,k+1}\,\varrho_{k,\,k+1}=\operatorname{Re}(z_{k+1}-z_k),\quad \text{т. е.}\quad \sum_{k=p}^{q-1}\cos\varphi_{k,\,k+1}\,\varrho_{k,\,k+1}=\operatorname{Re}(z_q-z_p)$$

и следователно

$$(7) \qquad \sum_{k=p}^{q} C_k z_k=\frac{\sigma i}{2}\left\{\operatorname{Re}(z_q-z_p)+z_p\cos\varphi_{p-1,\,p}\,e^{-i\varphi_{p-1,\,p}}\right.$$

$$\left.-z_q\cos\varphi_{q,\,q+1}\,e^{-i\varphi_{q,\,q+1}}\right\}.$$

Специално от (7) следва

$$(7) \qquad \sum_{k=1}^{n} C_k z_k = 0.$$

г. Като използуваме (4), получаваме

$$\frac{1}{\sigma}\sum_{k=p}^{q} C_k z_k^2=\frac{i}{4}\sum_{k=p}^{q-1}(z_{k+1}-z_k)(z_{k+1}+z_k)\,e^{-2i\varphi_{k,\,k+1}}$$

$$+\frac{i}{4}\left(e^{-2i\varphi_{p-1,\,p}}z_p^2-e^{-2i\varphi_{q,\,q+1}}z_q^2\right).$$

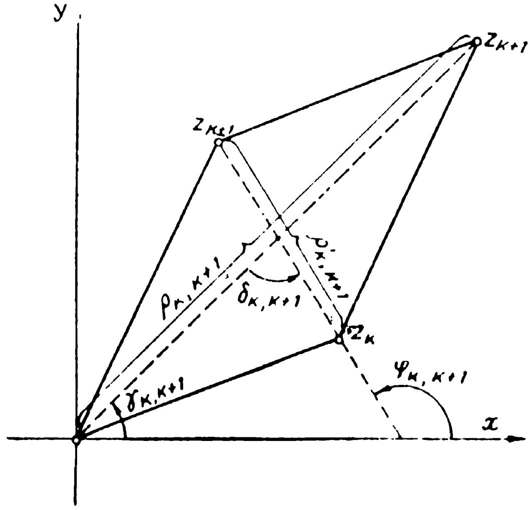
Въвеждаме следните означения: $z_{k+1}-z_k=\varrho_{k,\,k+1}\,e^{i\varphi_{k,\,k+1}}$ и $z_{k+1}+z_k$ $=\varrho'_{k,\,k+1}\,e^{i\gamma_{k,\,k+1}}$.

Следователно

$$\sum_{k=p}^{q-1}(z_{k+1}-z_k)(z_{k+1}+z_k)\,e^{-2i\varphi_{k,\,k+1}}=\sum_{k=p}^{q-1}\varrho_{k,\,k+1}\,\varrho'_{k,\,k+1}\,e^{-i(\varphi_{k,\,k+1}-\gamma_{k,\,k+1})}$$

$$= \sum_{k=p}^{q-1} \varrho_{k,k+1}\, \varrho'_{k,k+1} \cos(\varphi_{k,k+1} - \gamma_{k,k+1}) - i \sum_{k=p}^{q-1} \varrho_{k,k+1}\, \varrho'_{k,k+1} \sin(\varphi_{k,k+1} - \gamma_{k,k+1}).$$

Тъй като $\varphi_{k,k+1} - \gamma_{k,k+1} = \delta_{k,k+1}$ (черт. 1), то $\varrho_{k,k+1}\varrho'_{k,k+1} \sin(\varphi_{k,k+1} - \gamma_{k,k+1}) = 4S_{k,k+1}$, където $S_{k,k+1}$ е ориентираното лице на триъгълника Oz_kz_{k+1}.



Черт. 1

Освен това не е трудно да се провери, че $\varrho_{k,k+1}\, \varrho'_{k,k+1} \cos(\varphi_{k,k+1} - \gamma_{k,k+1}) = |z_{k+1}|^2 - |z_k|^2$. Следователно

$$\sum_{k=p}^{q-1} (z_{k+1} - z_k)(z_{k+1} + z_k) = \sum_{k=p}^{q-1} (|z_{k+1}|^2 - |z_k|^2 - 4iS_{k,k+1}) = |z_q|^2 - |z_p|^2 - 4iS_{pq}).$$

И тъй за сумата $\sum_{k=p}^{q} C_k z_k^2$ се получава изразът

$$\sum_{k=p}^{q} C_k z_k^2 = \varrho \left[S_{pq} + \frac{i}{4} (|z_q|^2 - |z_p|)^2 + e^{-2i\varphi_{p-1,p}} z_p^2 - e^{-2i\varphi_{q,q+1}} z_q^2 \right], \tag{8}$$

където S_{pq} е ориентираното лице на многоъгълника $Oz_pz_{p+1} \ldots z_q$.

Ако означим с S ориентираното лице на многоъгълника K, с M тоталната маса на многоъгълника, от (8) получаваме при $p=1$ и $q=n$

$$\sum_{k=1}^{n} C_k z_k^2 = \sigma S = M. \tag{8'}$$

д. Ако продълженията на страните $z_{p-1}z_p$ и z_qz_{q+1} се пресичат и пресечната им точка изберем за начало на координатната система, а оста Oy насочим по вътрешната ъглополовяща на тези две страни, то от (6), (7) и (8) получаваме съответно

$$(9)\qquad \sum_{k=p}^{q} C_k = -\frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha_{pq},$$

$$(10)\qquad \sum_{k=p}^{q} C_k z_k = 0,$$

$$(11)\qquad \sum_{k=p}^{q} C_k z_k^2 = \sigma S_{pq}.$$

е. Ако страните $z_{p-1}z_p$ и $z_q z_{q+1}$ са успоредни и изберем координатна система с ос Oy по симетралата им и начало O в пресечната точка на симетралата с отсечката $z_p z_q$, то не е трудно да се установи, че от (6), (7) и (8) съответно следват

$$(12)\qquad \sum_{k=p}^{q} C_k = 0,$$

$$(13)\qquad \sum_{k=p}^{q} C_k z_k = -il\sigma, \quad \left(l = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(z_q - z_p)\right),$$

$$(14)\qquad \sum_{k=p}^{q} C_k z_k^2 = \sigma S_{pq}.$$

3. Свойства на потенциала $U(x, y)$

Изразът (3) пред вид равенствата (6′), (7′) и (8′) може да се представи във вида

$$(15)\qquad U(x, y) = \operatorname{Re}\left\{\sum_{k=1}^{n} C_k (z - z_k)^2 \ln (z - z_k)\right\} - \frac{3}{2} M.$$

От последния израз се вижда, че функцията $U(x, y)$ е определена многозначно във всяка крайна точка от равнината с изключение на точките z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Ако променливото $z = x + iy$ опише еднократно в положителна посока произволен затворен контур, съдържащ във вътрешността си няколко последователни върха $z_p, z_{p+1}, \ldots, z_q$ $(1 \leqq p \leqq q \leqq n)$ на многоъгълника и несъдържащ останалите му върхове, то от (15) следва, че изменението на функцията $U(x, y)$ при тази обиколка е

$$(16)\qquad \Delta_{p, p+1, \ldots, q}\, U(x, y) = 2\pi \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{q} C_k (z_0 - z_k)^2,$$

където z_0 означава точката, от която е започнала и в която завършва обиколката.

Специално при $p=q$ получаваме

(17) $$\Delta_p U(x, y) = 2\pi \operatorname{Im} C_k (z_0 - z_k)^2,$$

а при $p=1$, $q=n$, пред вид (6′), (7′) и (8′)

(18) $$\Delta_{1,2,\ldots,n} U(x, y) = 2\pi \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} C_k(z_0 - z_k)^2$$

$$= 2\pi \operatorname{Im} \left\{ z_0^2 \sum_{k=1}^{n} C_k - 2z_0 \sum_{k=1}^{n} C_k z_k + \sum_{k=1}^{n} C_k z_k^2 \right\} = 0.$$

От (5) и (17) следва, че точките z_k, $k=1, 2, \ldots, n$, са за функцията $U(x, y)$ точки на разклонение от логаритмичен тип, а от (18) следва, че при обиколка по контур, съдържащ всички върхове на многоъгълника, т. е. при обиколка на безкрайно отдалечената точка на равнината, функцията $U(x, y)$ остава без изменение. Следователно безкрайно отдалечената точка е прост полюс на функцията $U(x, y)$, тъй като $U(x, y)$ расте неограничено при $|z| \to \infty$. При това свойството $\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} [U(x, y) - M \ln \sqrt{x^2+y^2}] = 0$ на логаритмичния потенциал може лесно да се докаже в разглеждания конкретен случай.

За по-нататъшните разглеждания ще ни е необходимо да определим при какви начални точки z_0 на обикаляне ще имаме

(19) $$\Delta_{p,p+1,\ldots,q} U(x, y) = 0.$$

Като заместим в последното уравнение стойността на $\Delta_{p,p+1,\ldots,q} U(x,y)$ от (17), получаваме

(20) $$\operatorname{Im} \sum_{k=p}^{q} C_k (z_0 - z_k)^2 = \operatorname{Im} \left\{ z_0^2 \sum_{k=p}^{q} C_k - 2z_0 \sum_{k=p}^{q} C_k z_k + z_0^2 \sum_{k=p}^{q} C_k z_k^2 \right\} = 0.$$

Ще разгледаме два случая:

а. Страните $z_{p-1}z_p$ и $z_q z_{q+1}$ се пресичат в крайна точка. Избираме тази точка за начало на координатната система и насочваме оста Oy по ъглополовящата на тези две страни. Като заместим (9), (10) и (11) в (20), получаваме $\operatorname{Im} \left(-z_0^2 \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha_{pq} + \sigma S_{pq} \right) = 0$, т. е. $\operatorname{Im} z_0^2 = 0$, откъдето следва, че в този случай уравнението (19) се удовлетворява, ако началните точки на обикаляне лежат на ъглополовящата на страните $z_{p-1}z_p$ и $z_q z_{q+1}$ и че това са единствените точки с описаното свойство.

б. Страните $z_{p-1}z_p$ и $z_q z_{q+1}$ са успоредни. Избираме координатна система с ос Oy по симетралата на двете страни и начало — пресечната точка на симетралата с отсечката $z_p z_q$. Като заместим (12), (13) и (14) в (20), получаваме $\operatorname{Im}[-2z_0(-il\sigma) + \sigma S_{pq}] = 0$, т. е. $\operatorname{Re} z_0 = 0$. Следователно съвкупността от точки z_0, за които уравнението (19) се удовлетворява, е симетралата на страните $z_{p-1}z_p$ и $z_q z_{q+1}$.

4. ЕГП на хомогенен многоъгълник

Функцията $U(x, y)$, определена с (15), е многозначна поради многозначността на $\ln(z-z_k)$, $k=1, 2, \ldots, n$. Ако обаче въведем разрези между всеки две точки z_p и z_q $(p \neq q)$, то в разрязаната равнина за всеки логаритъм $\ln(z-z_k)$ може да се избере еднозначен клон $\ln_0(z-z_k)$ по такъв начин, че в точките извън многоъгълника функцията

$\operatorname{Re}\left\{\sum_{k=1}^{n} C_k(z-z_k)^2 \ln_0(z-z_k)\right\}-\frac{3}{2}M$ да съвпада с външния гравитационен потенциал $U_0(x, y)$ на многоъгълника.

Разрезите между всеки две точки z_p и z_q $(p \neq q)$ могат да се въведат по различни начини. Ние обаче ще подчиним системата разрези на следните допълнителни условия:

1) разрезите да удовлетворяват условие, аналогично на б) от дефиницията на ЕГП;

2) когато променливата точка (x, y) се стреми по произволен начин към някоя фиксирана точка от системата разрези Σ, оставайки в разрязаната равнина, то функцията $U_0(x, y)$ да клони към една и съща граница.

От условието 1) следва, че за всяка точка P, принадлежаща на Σ, съществува затворен контур, който пресича Σ в точката P и няма други общи точки с Σ. Във вътрешността на този контур ще се намират един или няколко последователни* върха $z_p, z_{p+1}, \ldots, z_q$ $(1 \leqq p \leqq q \leqq n)$. От условието 2) и от казаното в т. 3 за измененията на функцията $U(x, y)$ следва:

I. Точката P трябва да лежи на ъглополовящата (или симетралата) на някои две страни $z_{p-1}z_p$ и $z_q z_{q+1}$ на многоъгълника.

Освен това очевидно трябва да е изпълнено:

II. Всяка точка $P \in \Sigma$ може да се свърже с непрекъсната линия, лежаща изцяло в разрязаната равнина, с произволна точка от тези две страни на многоъгълника, на чиято ъглополовяща лежи точката P. (В противен случай няма да съществува затворен контур, който да пресича Σ само в точката P.)

Обратно, от I и II, като се има пред вид т. 3, следват 1) и 2).

Геометричните условия I и II определят еднозначно съвкупността от разрези Σ. Ние няма да се спираме подробно на доказателството на това твърдение, което е свързано с прости разсъждения, но ще дадем един метод за построяване на съвкупността Σ. Методът се състои в следното. Построяваме n равни остри двустенни ъгли с ръбове — страните на многоъгълника. Едната стена на всеки двустенен ъгъл определяме така, че да съвпада с тази полуравнина на равнината Oxy, която съдържа многоъгълника, а другите стени на всички двустенни ъгли да лежат в едно и също полупространство, определено от равнината Oxy. Предполагаме, че вторите стени на двустенните ъгли са непрозрачни и разглеждаме съвкупността от техните пресечници. Проектираме ортогонално върху равнината Oxy тези части от пресечниците, които са видими поне от една точка, лежаща във вътрешността на многоъгълника. Получените проекции определят системата от разрези Σ.

---

* Тъй като всеки два върха са свързани с разрез, то върховете, които влизат в затворения контур, трябва непременно да са последователни.

Посочената конструкция не зависи от големината на двустенните ъгли. Не е трудно да се види, че така определената система от разрези удовлетворява изискванията I и II. По-старателно изследване на посочената конструкция показва, че единствено получената съвкупност удовлетворява I и II. Ще отбележим само, че ортогоналните проекции на всички пресечници дават съвкупността от всички ъглополовящи на страните на многоъгълника. Отделянето на част от тях (чрез проектирането само на видимите части от пресечниците) се оказва необходимо и достатъчно за спазване на условието II.

И тъй съществува една единствена система от разрези Σ със свойствата 1) и 2). В разрязаната равнина функцията $U_0(x, y)$ е еднозначна и извън многоъгълника съвпада с неговия външен гравитационен потенциал.

Ние търсим прост слой със свойствата а) и б) от дефиницията на ЕГП. Очевидно единственото възможно място на носителя на този прост слой е определената по-горе съвкупност Σ. Действително, ако носителят на простия слой е някаква съвкупност Σ_1, то от свойствата на потенциала на простия слой следва, че трябва да бъде изпълнено условието 2). Но единствената съвкупност с това свойство е Σ. Следователно $\Sigma_1 \subset \Sigma$. Можем да считаме, че съвкупностите Σ_1 и Σ съвпадат, ако приемем, че в тези точки от Σ, които не принадлежат на Σ_1, плътността на простия слой е равна на нула.

Плътността μ на простия слой ще определим, като излизаме от познатата формула, изразяваща тази плътност чрез скока на нормалните производни. В случая споменатата формула може да се напише във вида

$$\mu(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n}[\Delta_{p,\, p+1, \dots, q}\, U(x, y)]_{(x_0, y_0) \in \Sigma} \tag{21}$$

Ако точката (x_0, y_0) лежи на ъглополовящата на страните $z_{p-1}z_p$ и $z_q z_{q+1}$ на многоъгълника, като въведем координатна система с начало пресечената точка на страните и ос Oy по ъглополовящата, положим $x_0 + iy_0 = z_0 = \varrho e^{i\varphi}$ и използуваме (9), (10), (11) и (16), от (21) получаваме

$$\begin{aligned}\mu(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi}\ \frac{\partial}{\partial n}\Delta_{p,\, p+1, \dots, q}\ U(x_0\, y_0) \\ &= \frac{1}{2\pi}\ \frac{1}{\varrho}\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\Delta_{p,\, p+1, \dots, q}\ U(\varrho e^{i\varphi})\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{\varrho}\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\operatorname{Im}\left[\sum_{k=p}^{q} C_k(\varrho e^{i\varphi} - z_k)^2\right]\right\}\Bigg|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \\ = \frac{1}{\varrho}\ \frac{\partial}{\partial p}&\left\{\operatorname{Im}\left[-\frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha_{pq}\,\varrho^2\, e^{2i\varphi}\right]\right\}_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \varrho\sigma \sin 2\alpha_{pq},\end{aligned} \tag{22}$$

т. е. плътността е пропорционална на разстоянието ϱ на точката (x_0, y_0) до пресечната точка на страните $z_{p-1}z_p$ и $z_q z_{q+1}$ и на синуса от ъгъла между тези две страни.

Ако страните $z_{p-1}z_p$ и z_qz_{q+1} са успоредни и точката $P\in\Sigma$ лежи на симетралата им, избираме координатна система с ос Oy по симетралата и начало O — пресечната точка на симетралата с отсечката z_pz_q. Като използуваме (12), (13), (14) и (16), от (21) получаваме

$$\mu(x_0, y_0)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\Delta_{p,p+1,\dots,q}\, U(x_0, y_0)\Big|_{x_0=0} \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{Im}\sum_{k=p}^{q} C_k (z_0-z_k)^2\Big|_{x_0=0}=\frac{\partial}{\partial x}\{\mathrm{Re}\, 2l\sigma z_0\}\Big|_{x_0=0}=2l\sigma,$$

т. е. плътността е постоянна и зависи от разстоянието между страните $z_{p-1}z_p$ и z_qz_{q+1}.

И тъй простият слой с носител Σ и плътност, определена от (22) и (23), е ЕГП на дадения многоъгълник и друга ЕГП многоъгълникът не притежава.

Ще отбележим, без да привеждаме елементарните, но не твърде кратки изчисления, че с непосредствено интегриране може да се покаже, че потенциалът на така определената ЕГП в точките извън многоъгълника съвпада с неговия външен гравитационен потенциал.

Авторът изказва благодарност на И. П. Недялков и И. Х. Димовски за направените от тях забележки във връзка с настоящата работа.

Постъпила на 23. IV. 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н., Теория Ньютоновского потенциала. Гос. изд. техн. — теор. лит., Ленинград, 1946.
2. Недялков И. П. и П. Х. Бърнев, Аналитично продължение към особеностите на хармонична функция, зададена върху права или равнина. Изв. на Физ. инст. с АНЕБ, IX, 2, 1962.

О ГРАВИТАЦИОННОМ ПОТЕНЦИАЛЕ ОДНОРОДНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

П. Бырнев

(Резюме)

В этой работе рассматривается внешний логарифмический гравитационный потенциал однородного многоугольника.

Показано, что существует единственный простой слой, такой что множество точек плоскости, не лежащих на простом слое — связное и потенциал простого слоя совпадает с внешним потенциалом многоугольника в точках, лежащих вне его.

SUR LE POTENTIEL GRAVIMETRIQUE DES POLYGONES HOMOGÈNES

P. Bărnev

(Résumé)

Dans cet travail on concidère le potentiel logarithmique extérieur d'un polygone homogène.

On démontre, qu'il existe une unique couche simple pour laquelle l'ensemble des points du plan, qui n'appartiennent pas à la couche simple, est connexe et dont le potentiel est égal au potentiel du polygone dans les points situés hors de lui.