БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) VIII

АНАЛИТИЧНИ ТРАНСФОРМАЦИИ, КОИТО УВЕЛИЧАВАТ ОБЕМА, И ФУНКЦИЯТА НА БЕРГМАН

Петър Русев

Нека G е произволна ограничена област от пространството C^n на комплексните променливи $z_1, \ldots, z_n$. С $L(G, z^0)$ $(z^0 \in G)$ означаваме множеството на всички аналитични функции $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n)$, регулярни и еднозначни в G, които удовлетворяват условието $f(z^0) = 1$. Функцията на Бергман [1] $K_G(z^0; \bar{z}^0)$ за областта G в точката z^0 се определя чрез равенството

$$\{K_G(z^0; z^0)\}^{-1} = \inf_{f \in L(G, z^0)} A_G[f(z)],$$

където $A_G[f(z)] = \int\limits_G |f(z)|^2 d\omega.$

Аналитична трансформация на областта G наричаме всяко множество $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ от n аналитични функции $\varphi_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, регулярни в областта G (не непременно еднозначни) и такива, че функцията $J(z_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \dfrac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}$ е регулярна и еднозначна в G. Аналитичната трансформация $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ наричаме нормирана в точката $z^0 \in G$, ако $J(z^0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 1$. С $M(G, z^0)$ означаваме множеството на всички аналитични трансформации на областта G, нормирани в точката z^0. Полагаме

$$\{P_G(z^0)\}^{-1} = \inf_{(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in M(G, z^0)} A_G[J(z, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)].$$

Теорема 1. *За всяка точка $z^0 \in G$ е в сила равенството $K_G(z^0; \bar{z}^0) = P_G(z^0)$.*

Доказателство. Ако аналитичната трансформация $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in M(G, z^0)$, то $J(z, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in L(G, z^0)$ и следователно

$$\{K_G(z^0; z^0)\}^{-1} = \inf_{f \in L(G, z^0)} A_G[f(z)] \leqq A_G[J(z, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)],$$

откъдето получаваме, че $\{K_G(z^0; z^0)\}^{-1} \leqq \{P_G(z^0)\}^{-1}$. Да допуснем, че в последното съотношение имаме строго неравенство. Тогава съществува функция $f_0(z) \in L(G, z^0)$, такава че $A_G[f_0(z)] < \{P_G(z^0)\}^{-1}$. Полагаме $\varphi_k(z_1, \ldots, z_n)$

$(k=1, 2, \ldots, n-1)$, а функцията $\varphi_n(z_1, \ldots, z_n)$ определяме така, че да е в сила равенството $\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial z_n}=f_0(z)$. За това е достатъчно да положим

$$\varphi_n(z_1, \ldots, z_n)=\int_{z_n^0}^{z_n} f_0(z_1, \ldots, z_{n-1}, \zeta)\, d\zeta.$$

Аналитичната трансформация $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, определена по този начин принадлежи на множеството $M(G, z^0)$ и освен това $J(z, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)=f_0(z)$ в G. Следователно $A_G[J(z, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)]=A_G[f_0(z)]$. От друга страна, $A_G[J(z, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)]=\{P_G(z^0)\}^{-1}>A_G[f_0(z)]$. Получихме противоречие и теорема 1 е установена.

Означаваме по-нататък с $E(G)$ множеството на всички точки $z^0\in G$, които притежават следното свойство: каквато и да е аналитичната трансформация $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\in M(G, z^0)$, винаги $A_G[J(z, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)]\geqq V(G)$, където $V(G)=A_G[1]$ е обемът на областта G.

Теорема 2. *За да принадлежи точката z^0 на множеството $E(G)$, е необходимо и достатъчно да бъде удовлетворено равенството $K_G(z^0; z^0)=\{V(G)\}^{-1}$.*

Доказателство. Да допуснем, че $K_G(z^0; z^0)=\{V(G)\}^{-1}$. Тогава, ако аналитичната трансформация $(\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0)\in M(G, z^0)$, ще имаме

$$A_G[J(z, \varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0)]\geqq \inf_{(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\in M(G, z^0)} A_G[J(z, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)]$$

$$=\{P_G(z^0)\}^{-1}=\{K_G(z^0; z^0)\}^{-1}=V(G).$$

Нека $z^0\in E(G)$. Да допуснем, че $K_G(z^0; z^0)>\{V(G)\}^{-1}$ (да отбележим, че винаги $K_G(z^0; z^0)\geqq\{V(G)\}^{-1}$). Тогава за всяка аналитична трансформация $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\in M(G, z^0)$, $A_G[J(z, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)]\geqq V(G)$ и следователно $\{P_G(z^0)\}^{-1}\geqq V(G)>\{K_G(z^0; z^0)\}^{-1}$. Последното неравенство обаче противоречи на теорема 1.

Нека G е едносвързана ограничена област от пространството C^1 и $\zeta=f(z)$ е такава еднолистна функция в G, че областта $D=f(G)$ е също ограничена. Тогава е в сила равенството ([1], стр. 102)

$$(*)\qquad K_D(\zeta^0; \zeta^0)=K_G(z^0; z^0)\,|f'(z^0)|^{-2},$$

където $z^0\in G$ и $\zeta^0=f(z^0)$. Като имаме пред вид последното равенство и освен това, че за кръга $A: |\zeta|<R$ имаме $K_A(\zeta^0; \zeta^0)=\pi^{-1}R^2(R^2-|\zeta^0|^2)^{-2}$, ще установим следната

Теорема 3. *Ако G е ограничена едносвързана област от пространството C^1 и ако множеството $E(G)$ съдържа поне една точка z^0, то G е кръг с център точката z^0 и $E(G)$ се състои само от точката z^0.*

Доказателство. Нека $\zeta=\varphi(z)$ е функцията, удовлетворяваща условията $\varphi(z^0)=0$, $\varphi'(z^0)=1$ и трансформираща G еднолистно в кръга A_{z^0}: $|\zeta|<R_{z^0}$, където R_{z^0} е конформният радиус на областта G в точката z^0. От равенството $(*)$, като имаме пред вид израза за функцията на Бергман за кръга A_{z^0}, получаваме, че $K_G(z^0; z^0)=\{\pi R_{z^0}^2\}^{-1}$ и следователно $V(G)$

$=\pi R^2_{z^0}$. От друга страна, $V(G)=\int\limits_{A_{z^0}} |\psi'(\zeta)|^2 d\omega$, където $\psi(\zeta)=\varphi^{-1}(\zeta)$, и от теоремата за площите следва, че $\psi(\zeta)=z^0+\zeta$, т. е. областта G е кръг с център точката z^0 и радиус R_{z^0}. От израза за функцията на Бергман за кръг следва веднага, че множеството $E(G)$ се състои само от точката z^0. (Теорема 3 може да се разглежда като обратна на теоремата за площите*.)

Теорема 3 се обобщава и за полицилиндрични области в пространството C^n.

Т е о р е м а 4. *Нека* $G=G_1\times\ldots\times G_n$ и $G_m\,(m=1, 2, \ldots, n)$ *е ограничена едносвързана област от пространството* C^1. *Ако множеството* $E(G)$ *съдържа поне една точка* $z^0=(z_1^0, \ldots, z_n^0)$, *то* G *е полицилиндър с център точката* z^0 *и множеството* $E(G)$ *се състои само от точката* z^0.

Теорема 4 е следствие от теорема 3 и равенствата

$$V(G)=\prod_{m=1}^{n} V(G_m),$$

$$K_G(z^0; \bar{z}^0)=\prod_{m=1}^{n} K_{G_m}(z_m^0; \bar{z}_m^0).$$

З а б е л е ж к а. От теорема 4 следва, че ако областта $G\subset C^n$ е полицилиндър с център в точката z^0, то за всяка аналитична трансформация $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\in M(G, z^0)$, $A_G\,[J(z, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)]\geqq V(G)$ (този резултат се установява, разбира се, и непосредствено). При това, както не е трудно да се види, знакът за равенство е възможен само тогава, когато $|J(z, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)|\equiv 1$. Да отбележим по-нататък, че ако $n>1$, от последното равенство не следва, че аналитичната трансформация $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ е линейна. Например за трансформацията

$$\begin{aligned}
w_1 &= \lambda_1 z_1 && =\varphi_1(z),\\
w_2 &= f_2(z_1)+\lambda_2 z_2 && =\varphi_2(z),\\
&\ldots\\
w_n &= f_n(z_1, \ldots, z_{n-1})+\lambda_n z_n && =\varphi_n(z),\\
&\lambda_1\ldots\lambda_n = 1,
\end{aligned}$$

където $f_2, \ldots, f_n$ са еднозначни аналитични функции в съответни области $J(z, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)\equiv 1$, но тази трансформация е изобщо „нелинейна“. Освен това тя е взаимно еднозначна.

Т е о р е м а 5. *Нека функциите* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *са регулярни и еднозначни в областта* G и $T=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *е взаимно еднозначна анали-*

* Тук и по-горе имаме пред вид следната теорема: *ако* $f(z)$ *е аналитична в кръга* A: $|z-z_0|<R$ и $f'(z^0)=1$, $\int\limits_A |f'(z)|^2 d\omega\geq\pi R^2$, *като равенство имаме само когато* $f(z)$ *е линейна функция.*

тична трансформация, принадлежаща на множеството $M(G, z^0)$. Полагаме $H = T(G)$ и нека точката $z^0 \in E(G)$. Тогава, ако $V(H) = V(G)$, точката $w^0 = Tz^0 \in E(H)$.

Доказателство. Нека аналитичната трансформация $(\phi_1, \ldots, \phi_n) \in M(H, w^0)$. Тогава

$$A_H[J(w, \phi_1, \ldots, \phi_n)] = \int\limits_H \left| \frac{\partial(\phi_1, \ldots, \phi_n)}{\partial(w_1, \ldots, w_n)} \right|^2 d\omega_w,$$

$$= \int\limits_G \left| \frac{\partial(\phi_1, \ldots, \phi_n)}{\partial(w_1, \ldots, w_n)} \cdot \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)} \right|^2 d\omega_z.$$

Да положим

$$\phi_k[\varphi_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, \varphi_n(z_1, \ldots, z_n)] = \psi_k(z_1, \ldots, z_n) \; (k = 1, \ldots, n).$$

Тогава $(\psi_1, \ldots, \psi_n) \in M(G, z^0)$ и освен това $A_H[J(w, \phi_1, \ldots, \phi_n)]$
$= A_G[J(z, \psi_1, \ldots, \psi_n)] \geqq V(G) = V(H)$, т. е. $w^0 \in E(H)$.

Следствие 1. Ако G е n-кръгова област с център в точката $(a_1, \ldots, a_n)$ и точката $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0) \in E(G)$, то всички точки $z(\theta_1, \ldots, \theta_n) = [a_1 + (z_1^0 - a_1) e^{i\theta_1}, \ldots, a_n + (z_n^0 - a_n) e^{i\theta_n}]$ $(0 \leqq \theta_k \leqq 2\pi)(k = 1, 2, \ldots, n)$ също принадлежат на множеството $E(G)$. Аналогично заключение може да се направи, ако допуснем, че G е кръгова или полукръгова област.

Следствие 2. Ако G е полицилиндър с център в точката z^0 и $T = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in M(G, z^0)$ е аналитичен автоморфизъм на G, точката z^0 е неподвижна точка за T.

Нека $T = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ е взаимно еднозначна аналитична трансформация на полицилиндъра $G \subset C^n$, принадлежаща на множеството $M(G, z^0)$, където z^0 е центърът на G. Полагаме $H = T(G)$ и допускаме, че $V(H) = V(G)$. Тогава по теорема 5 точката $w^0 = Tz^0 \in E(H)$. Освен това, ако по-нататък H е полицилиндрична област, то тя е полицилиндър с център точката w^0 (теорема 4) и тогава, както е известно ([2], стр. 30), може да се твърди, че аналитичната трансформация T е линейна. И така ние установихме следната

Теорема 6. *Нека $G \subset C^n$ е полицилиндър с център в точката z^0 и $T = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in M(G, z^0)$ е взаимно еднозначна аналитична трансформация, която преобразува G в полицилиндрична област H. Ако $V(H) = V(G)$, то H е полицилиндър с център в точката $w^0 = Tz^0$ и аналитичната трансформация T е линейна.*

Последното твърдение заедно със забележката към теорема 4 може да се разглежда като аналог на теоремата за площите.

Ще дадем сега друго доказателство на теорема 6, което се опира само на цитираната по-горе теорема на А. Картан и на забележката към теорема 4. За тази цел да означим с λ_{ik} матрицата $\left\| \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_k} \right)_{z^0} \right\|$ и да положим $\mu_{ik} = \|\lambda_{ik}\|^{-1}$. Посредством линейната трансформация $U_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ki}(z_i - z_i^0)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ полицилиндърът G се преобразува в полицилиндъра $D = \{|u_k| < \varrho_k, k = 1, 2, \ldots, n\}$ с център в точката $u^0 = (0, \ldots, 0)$.

При това, понеже $det|\lambda_{ik}| = J(z^0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 1$, $V(D) = V(G)$. Полагаме по-нататък

$$F_m(u_1, \ldots, u_n) = \varphi_m\left(z_1^0 + \sum_{j=1}^{n} \mu_{1j}u_j, \ldots, z_n^0 + \sum_{j=1}^{n} \mu_{nj}u_j \right).$$

$$(m = 1, 2, \ldots, n).$$

Аналитичната трансформация $F = (F_1, \ldots, F_n)$ очевидно трансформира полицилиндъра D в областта H. Освен това $F \in M(D, 0)$, понеже ако положим $a_{ik} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial u_k}\right)_{u^0=0}$, ще имаме $|a_{ik}| = |\lambda_{ik}| \cdot \|\mu_{ik}\| = E$, където E е единичната матрица от ред n. Нека $H = H_1 \times \ldots \times H_n$ и $\zeta_k = f_k(w_k)$ е функцията, която трансформира еднолистно едносвързаната област H_k в кръга $|u_k| < \varrho_k$ и освен това удовлетворява условието $f_k(w_k^0) = 0$, където $w_k^0 = F_k(0, \ldots, 0)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Означаваме с A аналитичната трансформация $(f_1(w_1), \ldots, f_n(w_n))$. Тогава аналитичната трансформация $T^* = AF$ е аналитичен автоморфизъм на полицилиндъра D, който запазва центъра му. Според теоремата на А. Картан трансформацията T^* е линейна, т. е. има вида $= \sum_{k=1}^{n} b_{ik}u_k$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. При това, както не е трудно да се убедим, $b_{ik} = 0$ при $i \neq k$ и $b_{ii} = f_i'(w_i^0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогава аналитичната трансформация $F = A^{-1}T^*$ има вида $(\psi_1(u_1), \ldots, \psi_n(u_n))$, където $\psi_k(u_k) = f_k^{-1}(b_{kk}u_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, и следователно $J(u, F_1, \ldots, F_n) = \prod_{k=1}^{n} \psi_k'(u_k)$. Но $V(H) = V(G) = V(D)$ и като имаме пред вид забележката към теорема 4, заключаваме, че $J(u, F_1, \ldots, F_n) \equiv 1$, т. е. $\prod_{k=1}^{n} |\psi_k'(u_k)| = 1$. От последното равенство следва, че за всяко $k = 1, 2, \ldots, n$ $\psi_k'(u_k) = \text{const} = \beta_k$, т. е. $\psi_k(u_k) = \alpha_k + \beta_k u_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Като имаме пред вид обаче определението на аналитичната трансформация F, заключаваме, че трансформацията $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ е линейна.

Теорема 7. *Нека $G \subset C^n$ е ограничена област, която допуска взаимно еднозначно изображение в полицилиндър. Тогава множеството $E(G)$ се състои най-много от една точка.*

Доказателство. Нека точката $z^0 \in E(G)$ и нека $T_1(G) = P = \{|\zeta_k - \zeta_k^0| < r_k\}, k = 1, 2, \ldots, n$, и T_1 е взаимно еднозначна аналитична трансформация. Разглеждаме трансформацията

$$L: w_k = \frac{a_{1k}\zeta_k + a_{2k}}{a_{3k}\zeta_k + a_{4k}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Константите a_{ik} $(i = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2, \ldots, n)$ могат да бъдат избрани така, че ако положим $LT_1 = T = (f_1, \ldots, f_n)$, да имаме $T(G) = H = \{|w_k| < R_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $Tz^0 = w^0 = 0$ и освен това $|J(z^0, f_1, \ldots, f_n)| = 1$. Тогава, като имаме пред вид равенството

$$K_G(z^0; \bar{z}^0) = K_H(0; \bar{0}) \, |J(0, g_1, \ldots, g_n)|^2,$$

където $(g_1, \dots, g_n) = T^{-1}$, получаваме, че $V(G) = V(H)$. Но $(g_1, \dots, g_n) \in M(H, 0)$ и от забележката към теорема 4 следва, че $J(w, g_1, \dots, g_n) \equiv 1$. Като имаме пред вид, че $E(H)$ се състои само от точката $w^0 = 0$ (теорема 4), заключаваме въз основа на теорема 5, че и множеството $E(G)$ се състои само от точката z^0.

Постъпила на 14. III. 1964 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс, Б. А., Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, Москва, 1963.
2. Cartan, H., Sur les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique, Journ. math. pur. et appl., 9 sér., **10**, 1931, 1—114.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, УВЕЛИЧИВАЮЩИЕ ОБЪЕМ, И ФУНКЦИЯ БЕРГМАНА

П. Русев

(*Резюме*)

Аналитическим отображением области $G \subset C^n$ называется каждая совокупность $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ n аналитических функций, регулярных в G (быть может и неоднозначных) такая, что функция $J(z, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = \partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n) / \partial(z_1, \dots, z_n)$ регулярна и однозначна в G. Через $E(G)$ обозначим множество всех точек $z^0 \in G$, для которых выполняется следующее условие: каково бы ни было аналитическое отображение $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ области G, для которого $J(z^0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = 1$, всегда $\int\limits_G |J(z, \varphi_1, \dots, \varphi_n)|^2 d\omega \geq V(G)$, где $V(G)$ — объем области G. Через $K_G(z; \zeta)$ обзначается функция Бергмана области G.

Теорема. 2. *Для того, чтобы точка $z^0 \in E(G)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $K_G(z^0, \bar{z}^0) = \{V(G)\}^{-1}$.*

Теорема 3. *Если G — ограниченная односвязная область пространства C^1 и множество $E(G)$ содержит по крайней мере одну точку z^0, то G является кругом с центром в z^0 и $E(G)$ состоит только из точки z^0.*

Дано обобщение теоремы 3 для полицилиндрических областей пространства C^n.

Теорема 6. *Пусть $G \subset C^n$ будет полицилиндром с центром в точке z^0 и $T = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in M(G, z^0)$ (т. е. $J(z^0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = 1$) — взаимнооднозначное аналитическое отображение области G на полицилиндрическую область H. Если $V(H) = V(G)$, то H является полицилиндром с центром в точке $w^0 = Tz^0$ и отображение T — линейно.*

В работе приведены два доказательства последней теоремы. Одно из них основанно только на теореме А. Картана [2].

ANALYTIC TRANSFORMATIONS WHICH INCREASE THE VOLUME AND BERGMANN'S FUNCTION

P. Rusev

(*Summary*)

Under an analytic transformation of a region $G \subset C^n$ is meant a set $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ of n analytic functions which are regular in the region G and such that the function $J(z, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \; \partial(z_1, \ldots, z_n)$ is regular and single-valued in G. By $E(G)$ is denoted the set of all points $z^0 \in G$ which have the following property: for every analytic transformation $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ of G, such that $J(z^0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 1$, the inequality $\int_G J(z, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)^2 \, d\omega$

$V(G)$ holds where $V(G)$ is the volume of G. By $K_G(z; \zeta)$ is denoted Bergmann's function of G.

Theorem 2. *In order that the point z^0 belongs to $E(G)$ is necessary and sufficient $K_G(z^0; \bar{z}^0) = \{V(G)\}^{-1}$.*

Theorem 3. *If $G \subset C^1$ is a bounded simply connected region and if the set $E(G)$ contains at least one point z^0, then G is a circle with center z^0 and $E(G)$ consists of z^0 only.*

An extension of the theorem 3 for polycylindric regions $G \subset C^n$ is given.

Theorem 6. *Let $G \subset C^n$ be a polycylinder with center z^0 and $T = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in M(G, z^0)$ (i. e. $J(z^0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 1$) is a one-to-one analytic transformation of G into a polycylindric region H. If $V(H) = V(G)$, then H is a polycylinder with center $w^0 = Tz^0$ and the transformation T is linear.*