БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) IX

ВЪРХУ ЕДНА ХАРАКТЕРИСТИКА НА КОНФОРМНИТЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВОТО

Татяна Аргирова

Известно е, че единствените еднолистни конформни изображения на дадена равнинна област D в друга равнинна област D', които трансформират един кръг от D в кръг от D', са дробно-линейните.

От друга страна, ако не предполагаме, че изображението е конформно, очевидно условието един кръг от D да се трансформира в кръг от D' не е достатъчно, за да можем да заключим, че функцията, която осъществява изображението, е дробно-линейна.

По такъв начин съвсем естествено възниква въпросът, колко кръга от D трябва да се трансформират в кръгове от D', за да може да се твърди, че изображението е дробно-линейно, ако е известно само това, че то е еднолистно.

Този въпрос поставя и решава Каратеодори в [1]. Той доказва следната теорема:

Да предположим, че на всяка точка P от някаква равнинна област D отговаря една точка P' от някаква точкова съвкупност D' и че на две различни точки P и Q отговарят две различни точки P' и Q' от D'. Да предположим още, че на всяка окръжност C, съдържаща се заедно с вътрешността си в D, съответствува окръжност C' от D'. Тогава точковата съвкупност D' е област, изображението на D в D' е конформно от I или от II род и изобразяващата функция има вида $w=\frac{az+b}{cz+d}$ или вида $w=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $(ad-bc\neq 0)$.

В тази работа се поставя и решава аналогичен въпрос за изображенията в тримерното пространство. Полученият резултат усилва няколко теореми от [2].

Както е известно, единствените еднолистни конформни изображения, в тримерното пространство са суперпозициите от хомотетии, ротации транслации и четен брой инверсии. Тези трансформации преобразуват всяка сфера в сфера или равнина.

Ние ще покажем, че условието всяка сфера от дадена област да се трансформира в сфера характеризира конформните изображения от I и II род.

В сила е следната

Теорема 1. Нека еднозначно-обратимото съответствие φ на една област D от тримерното пространство в някаква точкова съвкупност D'

от същото пространство трансформира всяка сфера, която принадлежи заедно с вътрешността си на D, в сфера от D'. Тогава съответствието φ е конформно изображение от I или II род.

Най-напред ще докажем теоремата в един частен случай.

Теорема 2. Нека съответствието φ е еднозначно-обратимо и преобразува кълбото D в ограничената точкова съвкупност D'. Нека при това на всяка сфера от D отговаря сфера от D'. Тогава съответствието φ е конформно изображение от I или II род.

Доказателство. Предварително да направим следната тривиална, но важна забележка: Ако две сфери от D имат само една обща точка, то и съответните им сфери имат само една обща точка, т. е. на допиращи се сфери отговарят допиращи се сфери. Ако сферите от D се пресичат, то и съответните им сфери от D' се пресичат.

За удобство ще считаме, че D и D' са множества от едно и също тримерно пространство и че координатите на всички точки се отчитат спрямо една и съща координатна система XYZ.

Вместо даденото съответствие φ ще разгледаме едно съответствие φ_1, което се получава по следния начин.

Чрез транслация и хомотетия преобразуваме кълбото D в единичното кълбо. По същия начин преобразуваме една сфера Γ, която съдържа във вътрешността си съвкупността D' и има за център образа на центъра на кълбото D при съответствието φ, в единичната сфера. По този начин с помощта на съответствието φ се получава едно ново еднозначно-обратимо съответсвие φ_1 на единичното кълбо в една съвкупност, съдържаща се в единичното кълбо, при което началото се трансформира в себе си и всяка сфера от единичното кълбо се преобразува в сфера от съответната съвкупност.

По-нататък с C ще означаваме единичното кълбо, а с C_1 съответната при трансформацията φ_1 точкова съвкупност.

Нека с E и E' означим съответно инверсните образи спрямо единичната сфера на единичното кълбо C и съвкупността C_1. Ясно е, че E е външността на единичната сфера, а E' е точкова съвкупност, която се съдържа изцяло във външността на единичната сфера и съдържа безкрайната точка.

Трансформацията φ_1 индуцира еднозначно-обратимо съответствие φ_2 на E в E'. При това съответствие всяка равнина, лежаща изцяло в E, се преобразува в равнина от E' (тъй като равнините в E са инверсни образи на сфери през началото, а при съответствието φ_1 сфери се преобразуват в сфери). Две успоредни равнини се преобразуват в успоредни равнини. Всяка права от E се трансформира в права от E', тъй като всяка права от E може да се разглежда като сечение на две равнини от E.

Сега ще докажем, че съответствието φ_2 преобразува всеки две перпендикулярни равнини от E в перпендикулярни равнини от E'.

Да разгледаме две ортогонални равнини от E. Да построим куб, две от стените на който са върху дадените равнини и който е толкова малък, че описаната около него сфера се съдържа изцяло в E. Тъй като успоредни равнини се преобразуват в успоредни, а сфера — в сфера, то на куба ще отговаря четириъгълна призма, вписана в сфера, а такава призма е само правоъгълният паралелепипед. Следователно на ортогонални равнини съответствуват ортогонални.

Ще докажем по-нататък, че образът на E е област.

Да вземем две сфери от E, концентрични на единичната сфера, и да разгледаме два правоъгълни паралелепипеда, които са ортогонални помежду си и са вписани във външната сфера, а се допират до вътрешната. Тъй като съответната фигура от E' има същия вид, на нашите сфери отговарят също концентрични сфери. При това на вътрешната сфера отговаря вътрешна сфера.

Нека L е произволна сфера от E, концентрична на единичната, а L' е нейният образ. Нека Q' е произволна точка от външността на сферата L'. През Q' можем да прекараме допирателна равнина към сферата L'. Допирната точка P' на тази равнина е образ на някоя точка P от сферата L. Допирателната равнина към L в точката P се съдържа в E и се преобразува в допирателната равнина към сферата L' в точката P'. Последната равнина следователно принадлежи изцяло на E', тъй че точката Q' е също точка от E'. Това показва, че външността на сферата L' се съдържа в E'. Но тогава сферата L' съдържа във вътрешността си единичната сфера, тъй като иначе би излязло, че част от единичното кълбо принадлежи на E', а това не е вярно.

Да разгледаме една редица от сфери

$$L_1, L_2, L_3, \dots, L_n, .$$

концентрични на единичната, със съответни радиуси $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ $(r_1 > r_2 > \dots > r_n > \dots, \lim\limits_{n\to\infty} r_n = 1)$. Радиусите на съответните сфери $L_1', L_2', \dots$ $L_n', \dots$, които също са концентрични помежду си, образуват монотонно намаляваща редица $r_1', r_2', \dots, r_n', \dots$, като всяко $r_k' > 1$ $(k = 1, 2, \dots)$. Следователно тази редица е сходяща. Нека границата ѝ е r_0'. Очевидно множеството E' се състои от всички точки, които са външни за сферата с радиус r_0'. Тази сфера е също концентрична на сферите L_k' $(k = 1, 2, \dots)$.

Значи образът на E е наистина област.

От всичко това следва, че точковата съвкупност D', която отговаря на кълбото D при първоначално даденото съответствие φ, е кълбо.

Като имаме това пред вид, можем вместо помощната сфера Γ, която използвахме в началото, да вземем контурната сфера на кълбото D', като предварително преобразуваме това кълбо в себе си по такъв начин, че точката, която съответствува на центъра на кълбото D при съответствието φ, да се трансформира в центъра на кълбото D'. Така ще получим, че съответствието φ_2, индуцирано от трансформацията φ, преобразува външността на единичната сфера в себе си.

Да отбележим, че съответствието φ_2 преобразува сфери, концентрични на единичната сфера, в също такива сфери.

Нашата задача по-нататък ще бъде да докажем, че φ_2 може да се представи като суперпозиция на хомотетии, ротации на единичната сфера и симетрии спрямо равнини.

Преди всичко ще докажем, че съответствието φ_2 е непрекъснато.

Нека P_0 е произволна точка от външността на единичната сфера. Нека редицата $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ от точки, принадлежащи на E, клони към точката P_0. Без ограничение на общността можем да считаме, че редицата от разстоянията на точките P_k $(k = 1, 2, \dots)$ до точката P_0 е стриктно намаляваща. Ще искаме още точките P_k $(k=1, 2, \ldots)$ да бъдат толкова близко до точката P_0, че сферите, които минават през тях и имат за център точката P_0, да не пресичат единичната сфера. Образите на тези сфери при съответствието φ_2 ще бъдат сфери, които минават пред образите P'_k на точките P_k. Редицата от образите на тези сфери също ще бъде стриктно намаляваща. За да докажем това, ще покажем, че при нашата трансформация всяка вътрешна точка на дадена сфера се преобразува във вътрешна точка на съответната сфера. Да допуснем противното — че съществува сфера K и една точка P от вътрешността ѝ такива, че образът P' на точката P е външна точка на съответната сфера K'. Да прекараме през P' права, която не пресича единичната сфера и сферата K'. Праобразът на тази права ще бъде права, която минава през точката P и не пробожда единичната сфера. Но тогава излиза, че тази права пробожда сферата K, което не е вярно. Следователно точката P' е вътрешна за K'.

Редицата от радиусите на сферите, отговарящи на точките P'_k, клони към нула. Наистина в противен случай тези сфери ще остават вън от дадена сфера, съдържаща точката P'_0. Но тогава ще излезе, че точките от вътрешността на последната сфера не са образи на никои точки от областта E, което не е вярно, защото тази сфера се съдържа заедно с вътрешността си в E'.

Следователно съответствието φ_2 е непрекъснато в точката P_0. Тъй като точката P_0 беше произволно избрана, следва, че съответствието φ_2 е непрекъснато в областта E.

Сега вече сме готови да докажем, че даденото съответствие е суперпозиция от хомотетии, ротации и инверсии.

Да разгледаме произволна сфера K с радиус r, концентрична на единичната. Нека образът на K при съответствието φ_2 е сферата K' с радиус r' (тази сфера също е концентрична на единичната). Ще покажем, че образът на всяка голяма окръжност от K е голяма окръжност от K'. Преди всичко образът е окръжност, тъй като всяка голяма окръжност може да се разглежда като сечение на две сфери, които не пресичат единичната сфера. Че съответната окръжност е голяма, следва от факта, че куб, описан около сферата K, четири от допирните точки на който са върху разглежданата окръжност, се преобразува в куб, описан около сферата K', четири от допирните точки на който са точки от съответната окръжност.

Нека сега чрез едно въртене ψ на сферата K' около началото да преобразуваме тази сфера в себе си по такъв начин, че голямата окръжност l''_1 на сферата K', която лежи в координатната равнина XOY, да отговаря при съответствието $\varphi_3=\psi\varphi_2$ на голямата окръжност l'_1, лежаща в същата равнина, и точката $(r', 0, 0)$ да е съответна на точката $(r, 0, 0)$.

Да разгледаме по-нататък фигурата, образувана от сферата K и n еднакви малки сферички, които се допират помежду си и до сферата K в точки от голямата окръжност l_1, като една от допирните точки е $(r, 0, 0)$.

Чрез трансформацията φ_3 тази фигура се преобразува в също такава фигура. Тъй като допирната точка на две сфери се преобразува в допирната точка на съответните сфери и на точката $(r, 0, 0)$ отговаря точката $(r', 0, 0)$, образите на допирните точки на сферичките до окръжността

Γ_1 се получават чрез хомотетия с коефициент r'/r или чрез симетрия спрямо равнината XOZ и хомотетия със същия коефициент.

Да означим с θ_1 идентичната трансформация в първия случай и симетрията във втория. Тогава можем да кажем, че образите на допирните точки на сферичките при трансформацията $\varphi_4 = \theta_1 \varphi_3$ се получават чрез хомотетия с коефициент r'/r.

Тъй като броят на сферичките n е произволно голям, точките от окръжността Γ_1, които се трансформират чрез хомотетия, са навсякъде гъсто по Γ_1. От непрекъснатостта на съответствието φ_4 следва, че образите на всички точки от окръжността Γ_1 се получават чрез хомотетия с коефициент r'/r.

Нека Γ_2 е голямата окръжност на сферата K, лежаща в равнината XOZ. Чрез φ_4 тази окръжност се преобразува в голяма окръжност Γ_2'' от сферата K', равнината на която е също XOZ. Това може да се докаже така: При съответствието φ_4 образът на куба, описан около K и допиращ се до K в точки от окръжностите Γ_1 и Γ_2, е куб, описан около K', допирните точки на който са върху окръжностите Γ_1'' и Γ_2'', а това показва, че равнината на окръжността Γ_2'' е ортогонална на равнината на окръжността Γ_1'' и тъй като Γ_2'' трябва да минава през точката $(r', 0, 0)$, нейната равнина е точно XOZ.

Като повторим конструкцията със сферичките за окръжността Γ_2, започвайки от точката $(r, 0, 0)$, ще получим, че и тази окръжност се преобразува чрез хомотетия или чрез хомотетия и симетрия спрямо равнината XOY. И в двата случая можем да кажем, че образът на Γ_2 при трансформацията $\varphi_5 = \theta_2 \varphi_4$ се получава чрез хомотетия, ако се условим под θ_2 да разбираме идентитета в първия случай и симетрията във втория.

Да спрем вниманието си по-нататък на една окръжност Γ_3 от K, различна от Γ_1, равнината на която е ортогонална на равнината на окръжността Γ_2. Окръжността Γ_3 има две общи точки с окръжността Γ_1 и две с Γ_2. Следователно четири точки от нея се преобразуват чрез хомотетия. Пак въз основа на конструкцията със сферичките, като изберем една от четирите точки за допирна точка, стигаме до извода, че образът и на окръжността Γ_3 при трансформацията φ_5 се получава чрез хомотетия с коефициент r'/r (този път симетрия не може да има).

Оттук вече можем да заключим, че трансформацията φ_5 преобразува всяка точка от сферата K в точка от сферата K', която е образ на дадената точка при хомотетията с коефициент r'/r.

Сега ще докажем, че трансформацията φ_5 е едно подобие на областта E.

Нека Q е произволна точка от E, нележаща на сферата K, и Q' е образът ѝ при съответствието φ_5. Ще докажем най-напред, че Q и Q' лежат на един и същ лъч l, излизащ от началото.

Нека K_1 е сферата, която минава през точката Q и е концентрична на единичната сфера, а сферата K_2 се допира до K и K_1 съответно в точките P и разглежданата точка Q. Образът P' на точката P при съответствието φ_5 се намира върху лъча l (върху него са и точките P и Q), тъй като P лежи на сферата K. Сферата K_1 се трансформира в сфера K_1', концентрична на K_1 и минаваща през точката Q'. Образът K_2' на сферата K_3 е сфера, която се допира до K' и K'_1 съответно в точките P' и Q'. Оттук следва, че и точката Q' лежи на лъча l.

Нека по-нататък M и N са произволни точки от един произволно избран лъч, излизащ от началото, а M' и N' са техните образи при съответствието $\varphi_Б$. Ще покажем, че M' и N' са образи на M и N при една и съща хомотетия.

Образът на сферата T, чийто диаметър е отсечката с краища точките M и N, е сферата T', минаваща през точките M' и N'. Допирателният конус с връх началото към сферата T' съвпада с допирателния конус на сферата T и всяка точка от сферата T' се намира на същия лъч, на който е праобразът ѝ от сферата T. Ясно е, от друга страна, че сферата T' е хомотетичен образ на сферата T. От всичко това следва, че точките M' и N' са образи на M и N при една и съща хомотетия. Следователно трансформацията $\varphi_Б$ е хомотетия на областта E. Тъй като единичната сфера при тази хомотетия се преобразува в себе си, съответствието $\varphi_Б$ е идентитет. От равенството

$$\varphi_Б \quad \theta_2\theta_1\psi\varphi_2$$

следва равенството

$$\varphi_2=\psi^{-1}\theta_1^{-1}\theta_2^{-1}\varphi_Б$$

и като си спомним връзката между φ_2 и φ, стигаме до извода, че даденото еднозначно-обратимо съответствие φ на кълбото D в точковата съвкупност D' е суперпозиция от краен брой хомотетии, ротации, транслации и инверсии, т. е. конформно изображение от I или II род. С това е доказана теорема 2.

Да докажем сега теорема 1.

Нека C е произволна сфера от D, съдържаща се заедно с вътрешността си в D, а C' е нейният образ. Нека M и N са две точки от вътрешността на сферата, а M' и N' са образите им. През точките M и N можем да прекараме сфера, която няма общи точки със сферата C. Образът на тази сфера ще бъде сфера, която не се пресича със сферата C'. Оттук следва, че точките M' и N' са или и двете вътре в сферата C', или вън от нея. Следователно вътрешността на сферата C се преобразува в една съвкупност, която е изцяло вътре или вън от сферата C'. Ако е изпълнено второто, чрез една инверсия ще стигнем до първия случай. Но тогава за кълбото C е приложима теорема 2, от което следва, че образът на кълбото се получава чрез конформно изображение от I или II род. Но C беше произволна сфера от D. Следователно за всяка точка от D съществува кълбо, съдържащо тази точка, образът на което при трансформацията φ се получава чрез конформно изображение от I или II род.

Ако две кълба се пресичат, то съответните на тези кълба конформни изображения съвпадат в общата част, от което следва, че те са едни и същи, тъй като едно конформно изображение от I или II род се определя от краен брой параметри, значи и от краен брой точки.

Оттук следва верността на теорема 1.

Накрая ще отбележим, че доказаната теорема е в сила и за евклидови пространства с произволен брой измерения. За по-голяма нагледност ние доказахме теоремата в тримерния случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carathéodory C., Bull. Amer. Math. Soc., **43**, 1936, 573—579; вж. също Gesammelte Math. Schriften, III, 1955, 458—464.
2. Blaschke W., Vorlesungen über Differentialgeometrie, B. III, Berlin, 1929.

Постъпила на 28. XII. 1963 г.

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Татяна Аргирова

(Резюме)

В предлагаемой работе доказывается следующая теорема:

Пусть φ взаимно-однозначное отображение области D на точечное множество D', где D и D' являются множествами трехмерного пространства. Пусть φ отображает любую сферу, принадлежащую вместе со своей внутренностью области D, на сферу, содержащуюся в D'. Тогда φ будет конформным отображением первого или второго рода.

Эта теорема остается верной и для n-мерного случая. Она аналогична известной теореме Каратеодори [1].

ÜBER EINE CHARAKTERISTIK DER KONFORMEN ABBILDUNGEN IM RAUME

Tatjana Argirova

(Zusammenfassung)

In der vorliegenden Arbeit wird der folgende Satz bewiesen:

Es sei φ eine 1,1-deutige Abbildung des Gebietes D auf die Punktmenge D', wobei D und D' im dreidimensionalen Raum liegen.

Bildet φ jede Kugel, die zusammen mit ihrem Innern dem Gebiete D angehört, auf eine Kugel von D' ab, so ist φ eine konforme Abbildung erster oder zweiter Art.

Der Satz gilt auch im n-dimensionalen Falle.

Dieser Satz ist ein Analogon zu einem bekannten Satz von C. Carathéodory [1].