БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) IX

ПРЕДСТАВЯНЕ НА ПОЗИТИВНИ ЛИНЕЙНИ ФУНКЦИОНАЛИ, ДЕФИНИРАНИ В ПРОСТРАНСТВОТО НА ХОМОГЕННИТЕ РЕАЛНИ ПОЛИНОМИ ОТ ДАДЕНА ЧЕТНА СТЕПЕН

Владимир Чакалов и Димитър Скордев

В настоящата работа се разглеждат функционали, дефинирани в пространства, чиито елементи са функции. Нека X е линейно пространство от реални функции, дефинирани в някакво множество T, и нека F е линеен функционал, дефиниран в X. Ще казваме, че функционалът F е **позитивен**, ако $F(x)\geq 0$ за всяка неотрицателна функция на X. Ще казваме, че F е **строго позитивен**, ако $F(x)>0$ за всички неотрицателни функции $x\in X$, които не се анулират тъждествено. Позитивен функционал, който не е строго позитивен, ще наричаме **нестрого позитивен**.

Нека m е четно естествено число, а n — естествено число. Означаваме с X_n^m линейното пространство от хомогенните полиноми на n променливи от m-та степен с реални коефициенти, разгледани за реални стойности на аргументите. Като пример за позитивни функционали, определени в пространството X_n^m, могат да служат функционалите $F_{\langle u_1, \ldots, u_n\rangle}$, дефинирани (при реални $u_1, \ldots, u_n$) по следния начин:

$$F_{\langle u_1, \ldots, u_n\rangle}(x)=x(u_1, \ldots, u_n).$$

В настоящата работа се разглеждат представяния на позитивни линейни функционали, дефинирани в пространството X_n^m, във вид на суми на функционали от вида $F_{\langle u_1, \ldots, u_n\rangle}$. Нашите разглеждания ще се основават на една теорема, която в основата си принадлежи на Ф. Рис [3] и която ние ще формулираме в следната най-удобна за нашите цели форма:

Теорема 1. Нека X е p-мерно линейно пространство от реални функции, дефинирани в някое множество T, и нека са изпълнени следните две условия:

а) съществува функция $x\in X$ такава, че $x(t)>0$ за всяко $t\in T$;

б) за всяка редица $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ $(t_k\in T)$ съществува $t_0\in T$ и подредица $t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_k}, \ldots$ такива, че да е в сила равенството $\lim\limits_{k\to\infty} x(t_{i_k})=x(t_0)$ за всяка функция $x\in X$. Ако F е линеен позитивен функционал, определен в пространството X, F има представяне от вида

1) $$F(x) = A_1 x(t_1) + \cdots + A_s x(t_s),$$

където[1] $0 < s \leq p$ и $t_i \in T$, $A_i > 0$ при $i = 1, \ldots, s$.

За да получим от тази теорема някои следствия, отнасящи се до пространството X_n^m (пространството X_n^m не удовлетворява условията на теорема 1, ако разглеждаме полиномите като функции, дефинирани в n-мерното афинно пространство), ние ще дадем следната дефиниция.

Нека $x \in X_n^m$. С $\tilde{x}$ ще означаваме функция, дефинирана в $n-1$-мерното реално проективно пространство T_{n-1} по следния начин: ако $t \in T_{n-1}$ и числата $u_1, \ldots, u_n$ са координати на точката t, то

$$\tilde{x}(t) = \frac{x(u_1, \ldots, u_n)}{(u_1^2 + \cdots + u_n^2)^{\frac{m}{2}}}.$$

С $\tilde{X}_n^m$ ще означаваме множеството на всички функции от вида $\tilde{x}$, където $x \in X_n^m$.

Очевидно $\tilde{X}_n^m$ е линейно пространство и съответствието $x \to \tilde{x}$ е изоморфизъм на X_n^m върху $\tilde{X}_n^m$. Поради това може да се даде още следната дефиниция:

Нека F е линеен функционал, дефиниран в X_n^m. Ще означаваме с $\tilde{F}$ линеен функционал, дефиниран в $\tilde{X}_n^m$ с равенството $\tilde{F}(\tilde{x}) = F(x)$.

Съответствието $F \to \tilde{F}$ е изоморфизъм на пространството, спрегнато с X_n^m, върху пространството, спрегнато с $\tilde{X}_n^m$. При този изоморфизъм конусът от позитивните функционали, дефинирани за X_n^m, се изобразява върху конуса на позитивните функционали, дефинирани за $\tilde{X}_n^m$. Освен това ще направим следната бележка: нека е даден функционалът Φ, дефиниран в $\tilde{X}_n^m$, който е от вида

$$\Phi(\tilde{x}) = A\tilde{x}(t),$$

където $A > 0$, $t \in T_{n-1}$; ако числата $u_1, \ldots, u_n$ са координати на точката t,

$$\Phi(\tilde{x}) = \tilde{F}_{\langle u_1^{(0)}, \ldots, u_n^{(0)} \rangle}(\tilde{x}),$$

където $u_i^{(0)} = \frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}}\, u_i \; (i = 1, \ldots, n)$. Обратно, ако са дадени $u_1, \ldots, u_n$,

$$\tilde{F}_{\langle u_1, \ldots, u_n \rangle}(\tilde{x}) = A\tilde{x}(t),$$

където $A = (u_1^2 + \cdots + u_n^2)^{\frac{m}{2}}$, а t означава точка от пространството T_{n-1} с координати $u_1, \ldots, u_n$, в случая, когато не всички $u_1, \ldots, u_n$ са нули. В противен случай t означава коя да е точка от T_{n-1}.

Като приложим теорема 1 за пространството $\tilde{X}_n^m$, броят на измеренията на което е $\binom{m+n-1}{n-1}$ (X_n^m и $\tilde{X}_n^m$ са от едно и също измерение), и като използваме отбелязаните вече свойства на съответствието $F \to \tilde{F}$, получаваме:

---

[1] Под сума с нула на брой събираеми ще разбираме числото 0.

С л е д с т в и е. Всеки линеен позитивен функционал, дефиниран в пространството X_n^m, може да се представи като сума на не повече от $\binom{m+n-1}{n-1}$ функционала от вида $F_{\langle u_1,\ldots,u_n\rangle}$.

В настоящата работа ще се занимаем със следната задача: не може ли в това твърдение числото $\binom{m+n-1}{n-1}$ да се замени с по-малко число и ако може, то какво може да се каже за най-малкото число, с което можем да го заменим?

В теорема 1 в общия случай p не може да се замени с по-малко число, но за редица конкретни пространства X това е възможно. Например, ако T е затворен интервал, а X има за база някаква чебишева система от функции, p може да се замени с $\left[\frac{p+1}{2}\right]+1$ (вж. [1]). Обстоятелството, че T е интервал, е съществено, тъй като за всяко $p\geq 1$ съществува такова компактно множество T от реални числа, че функционалът $F(x)=\int\limits_T x(t)dt$, дефиниран в пространството от полиномите на една реална променлива с реални коефициенти от степен, не по-висока от $p-1$, не е представим във вида (1), където $0\leq s<p$ и $A_i>0$, $t_i\in T$, при $i=1,\ldots,s$.

Връщайки се към поставената проблема, ще отбележим, че случаят, когато $n=1$, е тривиален. В този случай всеки позитивен функционал има вида $F_{\langle u\rangle}$. Разглеждането на случая, когато $n=2$, не е трудно, тъй като в този случай пространството X_n^m има за база една чебишева система от функции, дефинирани върху проективната права; като използваме методите, приложени в [1], получаваме, че всеки позитивен функционал в пространството X_2^m е представим като сума на не повече от $\frac{m}{2}+1$ функционала от вида $F_{\langle u_1,u_2\rangle}$ но съществуват позитивни линейни функционали, които не могат да се представят като сума на по-малко от $\frac{m}{2}+1$ на брой функционала от този вид.

Случаят, когато $n=3$, е значително по-труден. Ние не знаем точната стойност на най-малкото число k, което притежава свойството: всеки линеен позитивен функционал в пространството X_3^m се представя като сума от не повече от k функционала от вида $F_{\langle u_1,u_2,u_3\rangle}$. За това най-малко число засега можем да дадем следната оценка: k удовлетворява неравенството

$$k\leq\binom{m+2}{2}-\min\left(3m-1,\ \frac{m^2}{8}+\frac{3}{4}m\right)\cdot$$

Ще преминем към доказателството на това твърдение. При доказателството ще използваме между другото така наречения метод на максималните маси [1], с чиято помощ въпросът за представянето на строго позитивните функционали се свежда към въпроса за представянето на нестрого позитивните функционали. По-точно на нас ще ни трябва следната лема, която е еквивалентна модификация на теорема 2.2 ([1], гл. I) и на чието доказателство не ще се спираме.

Л е м а 1. Нека X е крайномерно линейно пространство от реални функции, дефинирани в някое множество T, и нека са изпълнени условията а) и б) от теорема 1. Нека F е строго позитивен линеен функционал, дефиниран в пространството X, и нека t_1 е произволна точка от T. Тогава съществува положително число ϱ такова, че функционалът

$$F_1(x) = F(x) - \varrho x(t_1)$$

е нестрого позитивен.

С оглед на по-нататъшните нужди ще формулираме без доказателство и една лема, която принадлежи на Щайниц [4].

Лема 2. Нека V е реално линейно пространство и нека $v_1, \dots, v_s$ са елементи от V. Ако някой елемент $v \in V$ може да се представи като линейна комбинация с неотрицателни коефициенти на елементите $v_1, \dots, v_s$ и ако r е максималният брой на линейно независимите елементи измежду елементите $v_1, \dots, v_s$, v може да се представи като линейна комбинация с неотрицателни коефициенти на не повече от r от елементите $v_1, \dots, v_s$.

С помощта на лема 2 се доказва следното твърдение.

Лема 3. Нека X е p-мерно линейно пространство от реални функции, дефинирани в някое множество T, и нека F е линеен функционал, дефиниран в X, който допуща представянето

$$F(x) = A_1 x(t_1) + \cdots + A_s x(t_s),$$

където $A_i > 0$, $t_i \in T$. Ако съществуват k линейно независими функции $x \in X$, за които $x(t_1) = \cdots = x(t_s) = 0$, то съществуват неотрицателни числа $B_1, \dots, B_s$, сред които има не повече от $p-k$ различни от нула, такива, че F има представяне от вида

$$F(x) = B_1 x(t_1) + \cdots + B_s x(t_s).$$

Доказателство. Да означим с r максималния брой на линейно независимите функционали от вида $F_i(x) = x(t_i)$, $i = 1, \dots, s$. По силата на лема 2 съществуват неотрицателни числа $B_1, \dots, B_s$, измежду които има не повече от r различни от нула такива, че F допуска представянето

$$F(x) = B_1 x(t_1) + \cdots + B_s x(t_s).$$

Остава да се докаже, че $r \leq p-k$. За тази цел ще отбележим, че подпространството от онези $x \in X$, за които

$$F_1(x) = \cdots = F_s(x) = 0,$$

има $p-r$ измерения. Тъй като то съдържа k линейно независими функции, в сила е неравенството $k \leq p-r$, откъдето следва твърдението на лемата.

За да формулираме следващите леми, ще въведем за удобство някои означения. Ще означим с R_3 множеството на всички хомогенни полиноми на три променливи с реални коефициенти, а с R_3^+ — множеството на онези полиноми от R_3, които за реални стойности на аргументите приемат неотрицателни стойности. Ще означим с K_3 множеството на всички хомогенни полиноми на три променливи с комплексни коефициенти. Ако $x \in K_3$, с $\bar{x}$ ще означаваме полином, който се получава от x чрез замяна на всички коефициенти със спрегнатите им числа.

Лема 4. Ако $x = y\bar{z}$, където $x \in R_3^+$, $y \in R_3^+$, $z \in K_3$, и y не е тъждествено нула, то $z \in R_3^+$.

Доказателство. От равенството $x=yz$ следва равенството $\bar{x}=\bar{y}\bar{z}$. Обаче $\bar{x}=x$ и $\bar{y}=y$, тъй като $x \in R_3$ и $y \in R_3$. Поради това ще имаме $x=y\bar{z}$. От равенствата $x=yz$ и $x=y\bar{z}$ с почленно изваждане получаваме $0=y(z-\bar{z})$. Оттук следва, че $\bar{z}=z$, т. е. $z \in R_3$. Да допуснем, че z приема за някоя тройка реални числа $(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)})$ отрицателна стойност. Тогава z ще приема отрицателни стойности и за всички тройки реални числа, достатъчно близки до тройката $(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)})$. За всички такива стойности на аргументите трябва да е изпълнено равенството $y=0$, тъй като стойностите на y и yz са неотрицателни. Това обаче е невъзможно, тъй като y не е тъждествено нула.

Лема 5. Всеки полином $x \in R_3^+$ може да се представи във вида

$$x=(y_1^2+y_2^2)z_1 \dots z_l, \tag{2}$$

където $y_1, y_2 \in R_3$, y_1 и y_2 имат равни степени,[1] $l \geq 0$,[2] $z_i \in R_3^+$ и са неразложими в K_3, $i=1, \dots, l$.

Доказателство. Ако x е константа, твърдението е очевидно. Нека теоремата е доказана за полиноми, чиято степен е по-малка от естественото число h, и нека x е полином от степен h, който принадлежи на множеството R_3^+. Ако x е неразложим в K_3, твърдението е очевидно. Нека x е разложим в K_3. Тогава x може да се представи във вида $x=wx'$, където $w \in K_3$, $x' \in K_3$, w е неразложим в K_3. Ще разгледаме два случая:

а) полиномът $\bar{w}$ не се дели на w;

б) полиномът $\bar{w}$ се дели на w.

В случая а) разсъждаваме по следния начин. От равенството $x=wx'$ следва, че $\bar{x}=\bar{w}\bar{x}'$; обаче $\bar{x}=x$, понеже $x \in R_3$. Имаме $wx'=\bar{w}\bar{x}'$ и следователно произведението $\bar{w}\bar{x}'$ се дели в K_3 на неразложимия полином w. Тъй като $\bar{w}$ не се дели на w, оттук следва ([2], гл. XI, § 51; [5], гл. I, § 6), че $\bar{x}'$ се дели на w в K_3, т. е. съществува $x^* \in K_3$ така, че $\bar{x}'=wx^*$. Оттук получаваме $x'=\bar{w}\bar{v}^*$ и значи $x=w\bar{w}\bar{x}^*$. Ако напишем w във вида $w=w_1+iw_2$, където $w_1, w_2 \in R_3$, то $\bar{w}=w_1-iw_2$, а $w\bar{w}=w_1^2+w_2^2$ и следователно $x=(w_1^2+w_2^2)\bar{x}^*$. Очевидно $w_1^2+w_2^2$ принадлежи на множеството R_3^+ и има положителна степен.[3] От лема 4 следва, че $\bar{x}^* \in R_3^+$. Тъй като степента на полинома $\bar{x}^*$ е по-малка от h, $\bar{x}^*$ има представяне от вида, за който става въпрос в твърдението на теоремата. Нека това представяне е

$$\bar{x}^*=(y_1^{*2}+y_2^{*2})z_1 \dots z_l.$$

Оттук получаваме, че

$$x=(w_1^2+w_2^2)(y_1^{*2}+y_2^{*2})z_1 \dots z_l,$$

т. е.

$$x=[(w_1y_2^*+w_2y_1^*)^2+(w_1y_1^*-w_2y_2^*)^2]z_1 \dots z_l.$$

[1] На нулевия полином приписваме произволна степен.

[2] Произведение от нула на брой множители считаме равно на 1.

[3] Ние не разглеждаме константите като неразложими полиноми.

С това разглеждането на случая а) е завършено.

Преминаваме към случая б). Нека $\bar{w} = \varrho w$, където $\varrho \in K_3$. Очевидно ϱ е полином от нулева степен, т. е. комплексно число. Нещо повече, в сила е равенството $|\varrho| = 1$. Да означим с σ комплексно число, за което $\sigma^2 = \varrho$. Лесно се убеждаваме, че полиномът $\sigma \varrho w$ принадлежи на R_3. И наистина имаме

$$\overline{\sigma \varrho w} = \bar{\sigma} \bar{\varrho} \bar{w} = \bar{\sigma} \sigma^2 \varrho w = |\sigma|^2 \sigma \varrho w = \sigma \varrho w.$$

Ако означим с w^* полинома $\sigma \varrho w$, а с x^* — полинома $\frac{1}{\sigma \varrho} x'$, получаваме равенството

$$x = w^* x^*,$$

където $w^* \in R_3$, $x^* \in K_3$ и w^* е неразложим в K_3. Разглеждаме два случая:

б$_1$) w^* не мени знака си за реални стойности на аргументите;

б$_2$) w^* мени знака си за реални стойности на аргументите.

В първия случай можем да считаме, че $w^* \in R_3^+$. От лема 4 получаваме, че $x^* \in R_3^+$. Степента на x^* е по-малка от h. Нека

$$x^* = (y_1^2 + y_2^2) z_1 \ldots z_l$$

е представянето на x^* от вида, за който става дума в твърдението на лемата. Тогава

$$x = (y_1^2 + y_2^2) z_1 \ldots z_l w^*$$

е представяне на x от същия вид.

В случай б$_2$) разсъжденията са по-сложни. В този случай кривата с уравнение $w^* = 0$ в проективната равнина съдържа безкрайно множество реални точки. Всяка от тези точки е особена точка за кривата с уравнение $w^* x^* = 0$ (всички реални точки на кривата $x = 0$ са особени по силата на предположението, че $x \in R_3^+$). Поради това всяка реална точка от кривата $w^* = 0$ е или особена точка за тази крива, или лежи и на кривата $x^* = 0$. От неразложимостта на w^* следва ([5], гл. III, теорема 4.4), че на кривата $w^* = 0$ има само краен брой особени точки. Следователно кривите $w^* = 0$ и $x^* = 0$ имат безброй много общи точки. Оттук следва ([5], гл. III, теорема 3.1), че тези две криви имат обща компонента, а това означава, (поради неразложимостта на w^*), че x^* се дели на w^* Нека $x^* = w^* x^{**}$, където $x^{**} \in K_3$. Тогава $x = w^{*2} x^{**}$. Съгласно лема 4 $x^{**} \in R_3^+$. Степента на x^{**} е по-малка от h. Разглеждаме представянето на x^{**}, чието съществуване се гарантира от индуктивното предположение. Нека това представяне изглежда така:

$$x^{**} = (y_1^{*2} + y_2^{*2}) z_1 \ldots z_l.$$

Тогава можем да напишем

$$x = [(w^* y_1^*)^2 + (w^* y_2^*)^2] z_1 \ldots z_l.$$

С това разглеждането на б$_2$), а и доказателството на лемата е завършено.

С помощта на теорема 1, леми 3 и 5 се доказва следната лема.

Лема 6. Нека m е четно естествено число. Всеки нестрого позитивен линеен функционал F, дефиниран в $\tilde{X}_n^m$, има представяне от вида

$$F(\tilde{x})=A_1\tilde{x}(t_1)+\cdots+A_s\tilde{x}(t_s),$$

където $0\leq s\leq\binom{m+2}{2}-\min\left(3m, \frac{m^2}{8}-\frac{3}{4}m+1\right)$, $A_i>0$ и $t_i\in T_2$ $(i=1,\ldots,s)$.

Доказателство. Нека ни е даден нестрого позитивният функционал F, дефиниран в пространството $\tilde{X}_3^m$. По силата на теорема 1 той има представяне от вида

$$F(\tilde{x})=A_1^{(0)}\tilde{x}(t_1^{(0)})+\cdots+A_{s_0}^{(0)}\tilde{x}(t_{s_0}^{(0)}),$$

където $0\leq s_0\leq\binom{m+2}{2}$, $A_i^{(0)}>0$ и $t_i^{(0)}\in T_2$ при $i=1,\ldots,s_0$. Нека $\tilde{x}_0$ е ненулева функция от $\tilde{X}_3^m$, която е неотрицателна за всяко $t\in T_2$ и за която $F(\tilde{x}_0)=0$. Очевидно $\tilde{x}_0(t_i^{(0)})=0$ при $i=1,\ldots,s_0$ (ще отбележим, че ако x е ненулев полином от X_3^m и $t\in T_2$, то $\tilde{x}(t)=0$ тогава и само тогава, когато точката t принадлежи на кривата $x=0$). Тъй като полиномът x_0 принадлежи на R_3^+, може да се приложи лема 5. Нека имаме

$$x_0=(y_1^2+y_2^2)\,z_1\ldots z_l,$$

където $y_1, y_2\in R_3$, y_1 и y_2 имат равни степени, $l\geq 0$, z_i е неразложим в K_3 полином от R_3^+ $(i=1,\ldots,l)$. Означаваме с C кривата с уравнение $z_1\ldots z_l=0$ (ако $l=0$, C означава празното множество). Означаваме с r степента на полиномите y_1 и y_2. Разглеждаме функционала F_1, дефиниран с равенството

$$F_1(\tilde{x})=\sum_{t_i^{(0)}\notin C} A_i^{(0)}\tilde{x}(t_i^{(0)}).$$

Тъй като всички точки $t_i^{(0)}$ принадлежат на кривата $(y_1^2+y_2^2)z_1\ldots z_l=0$, точките $t_i^{(0)}$, непринадлежащи на C, са точки от кривата $y_1^2+y_2^2=0$. Поне един от полиномите y_1 и y_2 не е тъждествено нула. Нека например y_1 не се анулира тъждествено. Тогава точките $t_i^{(0)}$, непринадлежащи на C, са точки от кривата $y_1=0$. Нека x принадлежи на X_3^m и се дели на полинома y_1. Тогава от $t_i^{(0)}\notin C$ следва, че $\tilde{x}(t_i^{(0)})=0$. Може да се намерят $\binom{m-r+2}{2}$ линейно независими полиноми от X_3^m, които се делят на y_1. Следователно съществуват $\binom{m-r+2}{2}$ линейно независими функции от $\tilde{X}_3^m$, които се анулират във всички точки $t_i^{(0)}$, непринадлежащи на кривата C. От лема 3 следва, че функционалът F_1 има представяне от вида

$$F_1(\tilde{x})=A_1\tilde{x}(t_1)+\cdots+A_\sigma\tilde{x}(t_\sigma),$$

където $0\leq\sigma\leq\binom{m+2}{2}-\binom{m-r+2}{2}$, $A_i>0$, $t_i\in T_2\,(i=1,\ldots,\sigma)$.

Да означим с ϱ броя на онези от точките $t_i^{(0)}$, които принадлежат на кривата C. Тъй като

$$F(\tilde{x})=F_1(\tilde{x})+\sum_{t_i^{(0)}\in C} A_i^{(0)}x(t_i^{(0)}),$$

като означим точките $t_i^{(0)}$, принадлежащи на C, с $t_{\sigma+1},\ldots,t_{\sigma+\varrho}$, а съответните $A_i^{(0)}$ с $A_{\sigma+1},\ldots,A_{\sigma+\varrho}$ ще получим

$$F(\tilde{x})=A_1\tilde{x}(t_1)+\cdots+A_{\sigma+\varrho}\tilde{x}(t_{\sigma+\varrho}).$$

Ще си поставим за цел да оценим отгоре числото $\sigma+\varrho$. Ако $l=0$, то $r=\frac{m}{2}$, $\varrho=0$, тъй че $\sigma+\varrho\leq\binom{m+2}{2}-\binom{\frac{m}{2}+2}{2}$. Нека $l>0$. Означаваме с m_l степента на полинома z_i. Броят на особените точки на кривата $z_l=0$ не превишава $\frac{(m_i-1)(m_i-2)}{2}$ ([5], гл. III, теорема 4.4). Тъй като $z_l\in R_3^+$, всички реални точки на тази крива са особени. Следователно на кривата $z_l=0$ има не повече от $\frac{(m_i-1)(m_i-2)}{2}$ измежду всичките точки $t_i^{(0)}$. Всяка точка от кривата C принадлежи на някоя от кривите $z_i=0$ $(i=1,\ldots,l)$, следователно ще имаме

$$\varrho\leq\sum_{i=1}^{l}\frac{(m_i-1)(m_i-2)}{2}.$$

Лесно се проверява, че при $a>1$ и $b>1$ е изпълнено неравенството

$$(a-1)(a-2)+(b-1)(b-2)\leq(a+b-1)(a+b-2),$$

а оттук следва, че ще бъде изпълнено и неравенството

$$\sum_{i=1}^{l}\frac{(m_i-1)(m_i-2)}{2}\leq\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{l}m_i-1\right)\left(\sum_{i=1}^{l}m_i-2\right).$$

От горните неравенства следва неравенството

$$\varrho<\frac{1}{2}(m-2r-1)(m-2r-2).$$

За $\sigma+\varrho$ получаваме

$$\sigma+\varrho<\binom{m+2}{2}-\frac{(m-r+2)(m-r+1)}{2}+\frac{(m-2r-1)(m-2r-2)}{2}.$$

От неравенствата $0\leq r\leq\frac{m}{2}-1$ лесно следва, че

$$\frac{(m-r+2)(m-r+1)-(m-2r-1)(m-2r-2)}{2}>\min\left(3m,\frac{\left(\frac{m}{2}+3\right)\left(\frac{m}{2}+2\right)}{2}\right)$$

и следователно

$$\sigma+\varrho\leq\binom{m+2}{2}-\min\left(3m,\frac{\left(\frac{m}{2}+3\right)\left(\frac{m}{2}+2\right)}{2}\right).$$

Ако разгледаме сега едновременно случаите, когато $l=0$ и $l\neq 0$, ще имаме

$$\varrho\leq\max\left[\binom{m+2}{2}-\binom{\frac{m}{2}+2}{2},\binom{m+2}{2}-\min\left(3m,\frac{\left(\frac{m}{2}+3\right)\left(\frac{m}{2}+2\right)}{2}\right)\right]$$

$$=\binom{m+2}{2}-\min\left[\frac{\left(\frac{m}{2}+2\right)\left(\frac{m}{2}+1\right)}{2},3m,\frac{\left(\frac{m}{2}+3\right)\left(\frac{m}{2}+2\right)}{2}\right]$$

$$=\binom{m+2}{2}-\min\left[\frac{\left(\frac{m}{2}+2\right)\left(\frac{m}{2}+1\right)}{2},3m\right]=\binom{m+2}{2}-\min\left(\frac{m^2}{8}+\frac{3m}{4}+1,\,3m\right).$$

С това лемата е доказана.

Лема 7. Нека m е четно естествено число. Всеки линеен позитивен функционал F, дефиниран за $\tilde{X}_3^m$, може да се представи във вида

$$F(\tilde{x})=A_1\tilde{x}(t_1)+\cdots+A_s\tilde{x}(t_s),$$

където $0\leq s\leq\binom{m+2}{2}-\min\left(3m-1,\frac{m^2}{8}+\frac{3}{3}m\right)$.

Доказателство. Тъй като

$$\binom{m+2}{2}-\min\left(3m-1,\frac{m^2}{8}+\frac{3m}{4}\right)=\binom{m+2}{2}-\min\left(3m,\frac{m^2}{8}+\frac{3m}{4}+1\right)+1,$$

твърдението следва непосредствено от лема 6, ако F е нестрого позитивен. Ако F е строго позитивен, твърдението следва от лема 1 и лема 6.

Резултатът, изказан в лема 7, се пренася веднага за пространството X_3^m и дава споменатата по-рано оценка.

Теорема 2. Нека m е четно естествено число. Всеки линеен позитивен функционал, дефиниран в пространството X_3^m, може да се представи като сума от не повече от $\binom{m+2}{2}-\min\left(3m-1,\frac{m^2}{8}+\frac{3m}{4}\right)$ функционала от вида $F_{(u_1,u_2,u_3)}$.

Забележка 1. Пространството X_3^m е изоморфно с пространството на полиномите на две променливи с реални коефициенти от степен, не по-голяма от m. Това дава възможност да прередактираме доказаното по-горе твърдение по такъв начин, че то да се отнася за функционали, дефинирани в това пространство. Нужно е обаче да се има пред вид, че представянията на функционалите могат да съдържат членове, отговарящи на безкрайно отдалечени точки.

Забележка 2. Нека M е свързано отворено подмножество на реалната проективна равнина. Да означим с $R_3^+(M)$ множеството от онези полиноми $x\in R_3$, за които $x(u_1,u_2,u_3)\geq 0$ винаги, когато u_1, u_2, u_3 са координати на точка, принадлежаща на M. Лесно се вижда, че лемите 4 и 5 остават верни, ако в тях навсякъде заменим R_3^+ с $R_3^+(M)$. Това ни дава възможност да докажем следното обобщение на теорема 2. Нека m е четно естествено число. Всеки линеен функционал, който е дефиниран в пространството X_3^m и приема неотрицателни стойности за полиноми от

X_3^m, принадлежащи на множеството $R_3^+(M)$, може да се представи като сума на не повече от $\binom{m+2}{2}$ функционала от вида $F_{\langle u_1, u_2, u_3\rangle}$ където u_1, u_2, u_3 са координати на точка, принадлежаща на затворената обвивка $\bar{M}$ на M. При това сред тези функционали има не повече от

$$\binom{m+2}{2}-\min\left(3m-1, \frac{m^2}{3}+\frac{3}{4}m\right)$$

такива, че u_1, u_2, u_3 са координата на точка от самото множество M.

В следващото изложение ще разглеждаме линейни позитивни функционали, дефинирани в пространството X_n^m, където m е четно естествено число, а n — естествено число.

Нека $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ са реални числа. Означаваме с $x^{(m)}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}(u_1, \ldots, u_n)$ полинома $(\lambda_1 u_1+\cdots+\lambda_n u_n)^m$. Очевидно $x^{(m)}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} \in X_n^m$. На всеки линеен функционал E, дефиниран в X_n^m, съпоставяме функцията

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)=F(x^{(m)}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}).$$

Нека $a_1, \ldots, a_n$ са цели неотрицателни числа, чиято сума е равна на m. Полагаме

$$y^{(m)}_{a_1, \ldots, a_n}(u_1, \ldots, u_n)=\frac{m!}{a_1!\ldots a_n!}u_1^{a_1}\ldots u_n^{a_n}.$$

Очевидно имаме

$$x^{(m)}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}=\sum_{\substack{a_1\geq 0, \ldots, a_n\geq 0\\ a_1+\cdots+a_n=m}}\lambda_1^{a_1}\ldots\lambda_n^{a_n}y^{(m)}_{a_1, \ldots, a_n}$$

Тъй като за $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ имаме

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\sum_{\substack{a_1\geq 0, \ldots, a_n\geq 0\\ a_1+\cdots+a_n=m}}\lambda_1^{a_1}\ldots\lambda_n^{a_n}F(y^{(m)}_{a_1, \ldots, a_n}),$$

то $f \in X_n^m$. Изображението $F\to f$ е очевидно линейно. Освен това от последното равенство се вижда, че всяка функция $f \in X_n^m$ е образ на точно един функционал F. Следователно съответствието $F\to f$ е изоморфизъм на пространството, спрегнато на X_n^m, в пространството X_n^m. Лесно се намира образът на функционала $F_{\langle u_1, \ldots, u_n\rangle}$, където $u_1, \ldots, u_n$ са фиксирани числа. В този случай очевидно ще имаме

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)=x^{(m)}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}(u_1, \ldots, u_n)=(\lambda_1 u_1+\cdots+\lambda_n u_n)^m.$$

По този начин се вижда, че множеството функционали от вида $F_{\langle u_1, \ldots, u_n\rangle}$ се изобразява в множеството от полиномите на X_n^m, които се представят като m-ти степени на хомогенни реални линейни полиноми на n променливи. Тъй като конусът от позитивните функционали в пространството X_n^m съвпада с множеството от всевъзможните суми на функционали от вида $F_{\langle u_1,\ldots,u_n\rangle}$, този конус се изобразява в конуса от полиномите от X_n^m, които се представят като суми от m-ти степени на хомогенни линейни полиноми на n променливи.

От казаното по-горе следва

Теорема 3. Нека m е четно естествено число, а n и k — естествени числа. Следните две твърдения са еквивалентни:

а) всеки линеен позитивен функционал, дефиниран в X_n^m, се представя като сума от не повече от k функционала от вида $F_{\langle u_1,\ldots,u_n\rangle}$;

б) всяка сума от m-ти степени на реални хомогонни линейни полиноми на n променливи се представя като сума от такива степени, която съдържа не повече от k събираеми.

Следствие 1. Ако m е четно естествено число, всяка сума от m-ти степени на реални хомогенни линейни полиноми на две променливи се представя като сума от такива степени, която съдържа не повече от $\frac{m}{2}+1$ събираеми. Числото $\frac{m}{2}+1$ е най-малкото число с това свойство.

Следствие 2. Ако m е четно естествено число, всяка сума от m-ти степени на реални хомогенни линейни полиноми на три променливи се представя като сума от такива степени, която съдържа не повече от $\binom{m+2}{2}-\min\left(3m-1, \frac{m^2}{8}+\frac{3m}{4}\right)$ събираеми.

Следствие 3. Ако n е естествено число, всеки линеен позитивен функционал, дефиниран в X_n^2, се представя като сума от не повече от n функционала от вида $F_{\langle u_1,\ldots,u_n\rangle}$; n е най-малкото число с това свойство.

Нека m е четно естествено число, а s — естествено число. Означаваме с l_s^m линейното пространство от всичките s-мерни реални вектори $v=(v_1,\ldots,v_s)$, метризирано посредством нормата

$$\|v\|=(v_1^m+\cdots+v_s^m)^{\frac{1}{m}}.$$

Теорема 4. Нека m, n и k са такива числа, както в теорема 3. Условията а) и б), формулирани в теорема 3, са еквивалентни на следното условие: ако E е подпространство на някое от пространствата l_s^m $(s=1,2,\ldots)$ и ако броят на измеренията на E не надминава n, съществува линейно изометрично изображение на пространството E в пространството l_k^m.

Доказателство. Нека е изпълнено условието б) и нека E е подпространство на l_s^m с не повече от n измерения. Избираме в E n такива вектора $v^{(1)},\ldots,v^{(n)}$, че всеки елемент на E да се изразява като линейна комбинация на $v^{(1)},\ldots,v^{(n)}$. Разглеждаме функцията

$$\varphi(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=\|\lambda_1 v^{(1)}+\cdots+\lambda_n v^{(n)}\|^m$$

Имаме

$$\varphi(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=\sum_{i=1}^{s}(\lambda_1 a_{i1}+\cdots+\lambda_n a_{in})^m,$$

където a_{ij} означава i-тата компонента на вектора $v^{(j)}$. По силата на условието б) фунцията φ може да се представи като сума на не повече от

k m-ти степени на реални хомогенни линейни полиноми на n променливи (а значи и като сума на точно k такива m-ти степени). Нека имаме

$$\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)=\sum_{i=1}^{k}(\lambda_1 b_{i1}+\cdots+\lambda_n b_{in})^m.$$

При $1\leq j\leq n$ да означим с $w^{(j)}$ вектора $(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{kj})$. Очевидно $w^{(j)}\in l_k^m$. Равенството

$$\sum_{i=1}^{s}(\lambda_1 a_{i1}+\cdots+\lambda_n a_{in})^m=\sum_{i=1}^{k}(\lambda_1 b_{i1}+\cdots+\lambda_n b_{in})^m$$

показва, че за произволни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ще имаме

$$\|\lambda_1 w^{(1)}+\cdots+\lambda_n w^{(n)}\|=\|\lambda_1 v^{(1)}+\cdots+\lambda_n v^{(n)}\|.$$

Оттук се вижда най-напред, че от равенството

$$\lambda'_1 v^{(1)}+\cdots+\lambda'_n v^{(n)}=\lambda''_1 v^{(1)}+\cdots+\lambda''_n v^{(n)}$$

следва равенството

$$\lambda'_1 w^{(1)}+\cdots+\lambda'_n w^{(n)}=\lambda''_1 w^{(1)}+\cdots+\lambda''_n w^{(n)}.$$

Поради това, ако на елемента $\lambda_1 v^{(1)}+\cdots+\lambda_n v^{(n)}$ от пространството l_s^m съпоставим елемента $\lambda_1 w^{(1)}+\cdots+\lambda_n w^{(n)}$ от пространството l_k^m, ще получим едно изображение на l_s^m в l_k^m. Очевидно това изображение е линейно и изометрично.

Обратно, нека е изпълнено условието, формулирано в теорема 4, и нека е даден полиномът φ от вида

$$\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)=\sum_{i=1}^{s}(\lambda_1 a_{i1}+\cdots+\lambda_n a_{in})^m.$$

При $1\leq j\leq n$ да означим с $v^{(j)}$ вектора $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{sj})$; очевидно $v^{(j)}\in l_s^m$. В пространството l_s^m разглеждаме подпространството E от вектора v от вида

$$v=\lambda_1 v^{(1)}+\cdots+\lambda_n v^{(n)}.$$

Тъй като броят на измеренията на E не надминава n, съществува линейно изометрично изображение на E в l_k^m. Нека $w^{(j)}$ е образът на вектора $v^{(j)}$ при това изображение. Образът на вектора $\lambda_1 v^{(1)}+\cdots+\lambda_n v^{(n)}$ при произволни стойности на $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ще бъде векторът $\lambda_1 w^{(1)}+\cdots+\lambda_n w^{(n)}$, така че при произволни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ще имаме

$$\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)=\|\lambda_1 v^{(1)}+\cdots+\lambda_n v^{(n)}\|^m=\|\lambda_1 w^{(1)}+\cdots+\lambda_n w^{(n)}\|^m.$$

Да означим с b_{ij} i-тата компонента на вектора $w^{(j)}$. Тогава ще имаме

$$\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)=\sum_{i=1}^{k}(\lambda_1 b_{i1}+\cdots+\lambda_n b_{in})^m,$$

т. е. φ се представя като сума на k събираеми, всяко едно от които е m-та степен на реален хомогенен линеен полином на n променливи. С това доказателството е завършено.

Следствие 1. Нека m е четно естествено число, а n — естествено число. Ако E е n-мерно подпространство на някое от пространствата l_s^m $(s=n, n+1, \ldots)$, съществува линейно изометрично изображение на E в пространството l_k^m, където $k=\binom{m+n-1}{n-1}$.

За случаите $n=2$ и $n=3$ това твърдение може да се уточни с помощта на следствията 1 и 2 от теорема 3.

Следствие 2. Нека m е четно естествено число. Ако E е двумерно подпространство на някое от пространствата l_s^m $(s=2, 3, \ldots)$, съществува линейно изометрично изображение на E в пространството $l^m_{\frac{m}{2}+1}$; при това $l^m_{\frac{m}{2}+1}$ не може да се замени с $l^m_{\frac{m}{2}}$.

Следствие 3. Нека m е четно естествено число. Ако E е тримерно подпространство на някое от пространствата l_s^m $(s=3, 4, \ldots)$, съществува линейно изометрично изображение на E в пространството l_k^m, където $k=\binom{m+2}{2}-\min\left(3m-1, \frac{m^2}{8}+\frac{3}{4}m\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г., Идеи П. Л. Чебышева и А. А. Маркова в теории предельных величин интегралов и их дальнейшее развитие, Усп. мат. наук, VI, 4 (44), 3—120.
2. Курош А. Г., Курс высшей алгебры, Москва, 1959.
3. Riesz F., Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales, Ann. sci. Éc. Norm. Sup., (3) 28, 1911, 32—62.
4. Steinitz E., Über bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, J. reine und angew. Math., 143, 1913, 128—175.
5. Walker R. J., Algebraic curves, Princeton, New Jersey, 1950. Руски превод: Уокер Р., Алгебраические кривые, Москва, 1952.

Постъпила на 17. IV. 1964 г.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ ОДНОРОДНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ДАННОЙ ЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ

Владимир Чакалов и Димитр Скордев

(Резюме)

Пусть X_n^m — линейное пространство однородных вещественных многочленов m-ой степени (m — четное число) из n переменных. Используя один результат Рисса [1], легко видеть, что каждый положительный линейный функционал $F(x)\neq 0$ на X_n^m имеет представление вида

(*) $$F(x)=x(t_{11},\dots,t_{1n})+\dots+x(t_{s1},\dots,t_{sn}),$$

где $x\in X_n^m$, $s\leq\binom{m+n-1}{n-1}$ и $t_{ij}(1\leq i\leq s,\ 1\leq j\leq n)$ фиксированные числа.

Возникает задача о нахождении наименьшего числа a_n^m, обладающие свойством, что каждый положительный линейный функционал на X_n^m имеет представление вида (*), где $s\leq a_n^m$. Легко увидеть, что $a_1^m=1$, $a_2^m=\frac{m}{2}+1$. Используя метод максимальных масс [2], одну лемму Штейница [3] и некоторые алгебраические соображения, мы доказываем в теореме 2 следующее неравенство:

$$a_3^m\leq\binom{m+2}{2}-\min\left(3m-1,\frac{m^2}{8}+\frac{3m}{4}\right).$$

В общем случае имеют место установленные в теоремах 3 и 4 равенства $a_k^m=b_k^m=c_k^m$, где b_n^m и c_n^m определяются следующим образом:

b_n^m есть наименьшее среди чисел k, для которых верно, что каждая сумма m-ых степеней однородных вещественных линейных многочленов из n переменных представима в виде такой же суммы, состоящей из не более чем k слагаемых;

пусть l_r^m при натуральном r обозначает пространство r-мерных вещественных векторов $z=(z_1,\dots,z_r)$, метризованное при помощи нормы $\|z\|=(z_1^m+\dots+z_r^m)^{1/m}$; тогда c_n^m есть наименьшее среди натуральных чисел k, обладающих следующим свойством: каждое не более чем n-мерное подпространство любого l_2^m может быть отображено линейно и изометрически в пространство l_k^m.

REPRESENTATION OF POSITIVE LINEAR FUNCTIONALS DEFINED ON THE SPACE OF THE HOMOGENEOUS REAL POLYNOMIALS OF A GIVEN EVEN DEGREE

Vladimir Chakalov and Dimiter Skordev

(Summary)

Let X_n^m be the linear space of the homogeneous real polynomials of degree m (m being an even number) of n variables. It can easily be proved, making use of a result obtained by F. Riess [1], that each linear positive functional $F(x)\neq 0$ defined on X_n^m has a representation of the type

(*) $$F(x)=x(t_{11},\dots,t_{1n})+\dots+x(t_{s1},\dots,t_{sn})$$

wherein $x\in X_n^m$, $s\leq\binom{m+n-1}{n-1}$, and t_{ij} $(1\leq i\leq s,\ 1\leq j\leq n)$ are fixed numbers.

The problem arises of finding the smallest number a_n^m possessing the following property each positive linear functional defined on X_n^m has a representation of the (*) type, wherein $s\leq a_n^m$. It is obvious that $a_1^m=1$ and

$a_2^m = \frac{m}{2} + 1$. Using the method of the maximum masses [2], a lemma of Steinitz [3], and some algebraic considerations, the validity is established (see theorem 2) of the inequality

$$a_3^m \leq \binom{m+2}{2} - \min\left(3m-1, \frac{m^2}{8} + \frac{3m}{4}\right).$$

Valid in the general case are the equations $a_n^m = b_n^m = c_n^m$ established in theorems 3 and 4, wherein b_n^m and c_n^m are defined in the following manner:

b_n^m is the smallest among the numbers k for which it is true that each sum of m-th degrees of homogeneous real linear polynomials of n variables is represented as a sum of the same type with not less than k terms;

let l_r^m (r being a natural number) denote the space of the r-dimensional real vectors $z = (z_1, \ldots, z_r)$ metrized by means of the norm $\|z\| = (z_1^m + \cdots + z_r^m)^{1/m}$; then c_n^m is the smallest among the natural numbers k possessing the following property: each not more than n-dimensional subspace of any of the spaces l_r^m can be mapped linearly and isometrically into the space l_k^m.